С. М. ТАРГ

КРАТКИЙ КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ



С. М. ТАРГ

КРАТКИЙ КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

ИЗДАНИЕ ШЕСТОЕ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебника для высших технических учебных заведений



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1968

531
Т 19
УДК 531 1/2 (0,75. 8)

2-4-2
32-68

ОГЛАВЛЕНИЕ

Из предисловия к третьему изданию 9
Предисловие к шестому изданию 10
Введение 11

РАЗДЕЛ ПЕРВЫЙ

СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Глава I. **Основные понятия и аксиомы статики** 15

§ 1. Предмет статики 15
§ 2. Сила 16
§ 3. Аксиомы статики 18
§ 4. Связи и их реакции 22
§ 5. Аксиома связей 25

Глава II. **Сложение сил. Система сходящихся сил** 25

§ 6. Геометрический способ сложения сил. Равнодействующая сходящихся сил 25
§ 7. Разложение сил 27
§ 8. Проекция силы на ось и на плоскость 31
§ 9. Аналитический способ задания сил 32
§ 10. Аналитический способ сложения сил 33
§ 11. Равновесие системы сходящихся сил 35
§ 12. Системы статически определимые и статически неопределимые 37
§ 13. Решение задач статики 38
§ 14. Момент силы относительно центра (или точки) 46
§ 15. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей 48
§ 16*. Уравнения моментов для сходящихся сил 49

Глава III. **Системы параллельных сил и пар, расположенных в одной плоскости** 50

§ 17. Сложение и разложение параллельных сил 50
§ 18. Пара сил. Момент пары 53
§ 19. Эквивалентность пар 54
§ 20. Сложение пар, лежащих в одной плоскости. Условие равновесия пар 56

Глава IV. **Система сил, как угодно расположенных в одной плоскости** 58

§ 21. Теорема о параллельном переносе силы 58
§ 22. Приведение плоской системы сил к данному центру 60
§ 23. Случаи приведения плоской системы сил к простейшему виду 62
§ 24. Условия равновесия произвольной плоской системы сил. Случай параллельных сил 64

§ 25. Решение задач 66
§ 26. Равновесие систем тел 73
§ 27*. Определение внутренних усилий 77
§ 28*. Распределенные силы 78

Глава V. **Элементы графической статики** 81
§ 29. Силовой и веревочный многоугольники. Приведение плоской системы сил к двум силам 81
§ 30. Графическое определение равнодействующей 83
§ 31. Графическое определение результирующей пары 84
§ 32. Графические условия равновесия плоской системы сил 85
§ 33. Определение опорных реакций 85

Глава VI. **Расчет ферм** 87
§ 34. Понятие о ферме. Аналитический расчет плоских ферм 87
§ 35*. Графический расчет плоских ферм 91
§ 36*. Диаграмма Максвелла — Кремоны 92

Глава VII. **Трение** 94
§ 37. Законы трения скольжения 94
§ 38. Реакции шероховатых связей. Угол трения 96
§ 39. Равновесие при наличии трения 97
§ 40*. Трение нити о цилиндрическую поверхность 100
§ 41*. Трение качения и верчения 102

Глава VIII. **Системы пар и сил, как угодно расположенных в пространстве** 103
§ 42. Момент силы относительно центра как вектор 103
§ 43. Момент силы относительно оси 106
§ 44. Зависимость между моментами силы относительно центра и относительно оси 109
§ 45. Момент пары сил как вектор 110
§ 46*. Сложение пар в пространстве. Условия равновесия пар . . . 110
§ 47. Приведение пространственной системы сил к данному центру 113
§ 48*. Случаи приведения пространственной системы сил к простейшему виду 115
§ 49. Условия равновесия произвольной пространственной системы сил. Случай параллельных сил 117
§ 50. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей относительно оси 118
§ 51. Задачи на равновесие тела под действием пространственной системы сил 119
§ 52*. Условия равновесия несвободного твердого тела. Понятие об устойчивости равновесия 127

Глава IX. **Центр тяжести** 129
§ 53. Центр параллельных сил 129
§ 54. Центр тяжести твердого тела 131
§ 55. Координаты центров тяжести однородных тел 132
§ 56. Способы определения координат центров тяжести тел 132
§ 57. Центры тяжести некоторых однородных тел 135

РАЗДЕЛ ВТОРОЙ

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

Глава X. **Кинематика точки** 138
§ 58. Введение в кинематику 138
§ 59. Способы задания движения точки. Траектория 140

§ 60*. Переход от координатного способа задания движения к естественному . . . 143
§ 61. Вектор скорости точки . . . 144
§ 62. Вектор ускорения точки . . . 146
§ 63. Теорема о проекции производной вектора . . . 148
§ 64. Определение скорости и ускорения точки при координатном способе задания движения . . . 149
§ 65. Решение задач кинематики точки . . . 150
§ 66. Определение скорости точки при естественном способе задания движения . . . 154
§ 67. Касательное и нормальное ускорения точки . . . 155
§ 68. Некоторые частные случаи движения точки . . . 158
§ 69. Графики движения, скорости и ускорения точки . . . 161
§ 70. Решение задач . . . 162
§ 71*. Скорость в полярных координатах . . . 165
§ 72*. Графическое исследование движения точки . . . 166

Глава XI. **Поступательное и вращательное движения твердого тела** 170

§ 73. Поступательное движение . . . 170
§ 74. Вращательное движение твердого тела. Угловая скорость и угловое ускорение . . . 172
§ 75. Равномерное и равнопеременное вращения . . . 174
§ 76. Скорости и ускорения точек вращающегося тела . . . 175

Глава XII. **Плоскопараллельное движение твердого тела** . . . 179

§ 77. Уравнения плоскопараллельного движения. Разложение движения на поступательное и вращательное . . . 179
§ 78. Определение траекторий точек тела . . . 182
§ 79. Определение скоростей точек тела . . . 183
§ 80. Теорема о проекциях скоростей двух точек тела . . . 184
§ 81. Определение скоростей точек тела с помощью мгновенного центра скоростей. Понятие о центроидах . . . 185
§ 82. Решение задач . . . 189
§ 83*. План скоростей . . . 194
§ 84. Определение ускорений точек тела . . . 196
§ 85*. Мгновенный центр ускорений . . . 203

Глава XIII. **Движение твердого тела вокруг неподвижной точки и движение свободного твердого тела** . . . 205

§ 86. Движение твердого тела, имеющего одну неподвижную точку 205
§ 87*. Скорости и ускорения точек тела . . . 208
§ 88. Общий случай движения свободного твердого тела . . . 210

Глава XIV. **Сложное движение точки** . . . 212

§ 89. Относительное, переносное и абсолютное движения . . . 212
§ 90. Сложение скоростей . . . 214
§ 91*. Сложение ускорений . . . 218
§ 92. Решение задач . . . 222

Глава XV. **Сложное движение твердого тела** . . . 229

§ 93. Сложение поступательных движений . . . 229
§ 94. Сложение вращений вокруг двух параллельных осей . . . 230
§ 95*. Цилиндрические зубчатые передачи . . . 232
§ 96*. Сложение вращений вокруг пересекающихся осей . . . 236
§ 97*. Кинематические уравнения Эйлера . . . 237
§ 98*. Сложение поступательного и вращательного движений. Винтовое движение . . . 238

РАЗДЕЛ ТРЕТИЙ

ДИНАМИКА ТОЧКИ

Глава XVI. **Введение в динамику. Законы динамики** 242

§ 99. Основные понятия и определения 242
§ 100. Законы динамики 243
§ 101. Системы единиц 246
§ 102. Задачи динамики для свободной и несвободной материальной точки 247
§ 103. Решение первой задачи динамики (определение сил по заданному движению) 247

Глава XVII. **Дифференциальные уравнения движения точки и их интегрирование** 249

§ 104. Прямолинейное движение точки 249
§ 105. Решение задач 253
§ 106*. Падение тела в сопротивляющейся среде (в воздухе) 258
§ 107. Криволинейное движение точки 261
§ 108. Движение точки, брошенной под углом к горизонту в однородном поле тяжести 262

Глава XVIII. **Общие теоремы динамики точки** 265

§ 109. Количество движения и кинетическая энергия точки 265
§ 110. Импульс силы 266
§ 111. Теорема об изменении количества движения точки 267
§ 112. Работа силы. Мощность 268
§ 113. Примеры вычисления работы 271
§ 114. Теорема об изменении кинетической энергии точки 275
§ 115. Решение задач 276
§ 116. Теорема об изменении момента количества движения точки (теорема моментов) 282
§ 117*. Движение под действием центральной силы. Закон площадей 285

Глава XIX. **Несвободное движение точки** 286

§ 118. Уравнения движения точки по заданной неподвижной кривой 286
§ 119. Определение реакций связей 289

Глава XX. **Относительное движение точки** 291

§ 120. Уравнения относительного движения и покоя точки 291
§ 121. Влияние вращения Земли на равновесие и движение тел . . . 295
§ 122*. Отклонение падающей точки от вертикали вследствие вращения Земли 298

Глава XXI. **Прямолинейные колебания точки** 300

§ 123. Свободные колебания без учета сил сопротивления 300
§ 124. Свободные колебания при сопротивлении, пропорциональном скорости (затухающие колебания) 306
§ 125. Вынужденные колебания. Резонанс 308

Глава XXII*. **Движение тела в поле земного тяготения** 317

§ 126. Движение материальной точки, брошенной под углом к горизонту, в поле тяготения Земли 317
§ 127. Искусственные спутники Земли. Эллиптические траектории . . 321
§ 128. Понятие о невесомости 325

РАЗДЕЛ ЧЕТВЕРТЫЙ
ДИНАМИКА СИСТЕМЫ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

Глава XXIII. **Введение в динамику системы. Моменты инерции твердого тела** . . . 331

§ 129. Механическая система. Силы внешние и внутренние . . . 331
§ 130. Масса системы. Центр масс . . . 332
§ 131. Момент инерции тела относительно оси. Радиус инерции . . . 333
§ 132. Моменты инерции тела относительно параллельных осей. Теорема Гюйгенса . . . 337
§ 133*. Центробежные моменты инерции. Главные оси инерции тела 338

Глава XXIV. **Теорема о движении центра масс системы** . . . 342

§ 134. Дифференциальные уравнения движения системы . . . 342
§ 135. Теорема о движении центра масс . . . 343
§ 136. Закон сохранения движения центра масс . . . 344
§ 137. Решение задач . . . 346

Глава XXV. **Теорема об изменении количества движения системы** 350

§ 138. Количество движения системы . . . 350
§ 139. Теорема об изменении количества движения . . . 351
§ 140. Закон сохранения количества движения . . . 353
§ 141. Решение задач . . . 353
§ 142*. Тело переменной массы. Движение ракеты . . . 356

Глава XXVI. **Теорема об изменении момента количеств движения системы** . . . 359

§ 143. Главный момент количеств движения системы . . . 359
§ 144. Теорема об изменении главного момента количеств движения системы (теорема моментов) . . . 361
§ 145. Закон сохранения главного момента количеств движения . . . 363
§ 146. Решение задач . . . 366

Глава XXVII. **Теорема об изменении кинетической энергии системы** . . . 369

§ 147. Кинетическая энергия системы . . . 369
§ 148. Некоторые случаи вычисления работы . . . 373
§ 149. Теорема об изменении кинетической энергии системы . . . 375
§ 150. Решение задач . . . 378
§ 151. Потенциальное силовое поле и силовая функция . . . 383
§ 152. Потенциальная энергия . . . 387
§ 153. Закон сохранения механической энергии . . . 388

Глава XXVIII. **Приложения общих теорем к динамике твердого тела** . . . 389

§ 154. Вращательное движение твердого тела . . . 389
§ 155. Физический маятник . . . 392
§ 156. Плоскопараллельное движение твердого тела . . . 395
§ 157*. Приближенная теория гироскопических явлений . . . 401
§ 158*. Движение твердого тела вокруг неподвижной точки и движение свободного твердого тела . . . 407

Глава XXIX. **Приложения общих теорем к теории удара** . . . 411

§ 159. Основное уравнение теории удара . . . 411
§ 160. Общие теоремы теории удара . . . 413

§ 161. Коэффициент восстановления при ударе 414
§ 162. Удар тела о неподвижную преграду 416
§ 163. Прямой центральный удар двух тел (удар шаров) 417
§ 164. Потеря кинетической энергии при неупругом ударе двух тел. Теорема Карно 420
§ 165*. Удар по вращающемуся телу 422

Глава XXX. **Принцип Даламбера. Давления на ось вращающегося тела** 425

§ 166. Принцип Даламбера 425
§ 167. Главный вектор и главный момент сил инерции твердого тела 428
§ 168. Решение задач 430
§ 169*. Динамические реакции, действующие на ось вращающегося тела. Динамическое уравновешивание масс 435

Глава XXXI. **Принцип возможных перемещений и общее уравнение динамики** 440

§ 170. Возможные перемещения системы. Число степеней свободы . . 440
§ 171. Принцип возможных перемещений 442
§ 172. Решение задач 444
§ 173. Общее уравнение динамики 449

Глава XXXII*. **Условия равновесия и уравнения движения системы в обобщенных координатах** 453

§ 174. Обобщенные координаты и обобщенные скорости 453
§ 175. Обобщенные силы 455
§ 176. Условия равновесия системы в обобщенных координатах . . . 459
§ 177. Уравнения Лагранжа 461
§ 178. Решение задач 464

Предметный указатель 473

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Третье издание Краткого курса теоретической механики отличается от предыдущего некоторыми дополнениями и рядом поправок и изменений, внесенных почти во все главы книги.

Бо́льшая часть сделанных добавлений связана с включением в курс параграфов, содержащих дополнительные сведения о движении твердого тела вокруг неподвижной точки (кинематические и динамические уравнения Эйлера), и главы, где излагаются основы метода обобщенных координат (уравнения Лагранжа); разнообразие требований, предъявляемых к курсу теоретической механики при подготовке специалистов разных профилей, заставляет уделить какое-то место этому материалу и в кратком курсе. Изложение в минимальном объеме элементарной теории гироскопа и таких актуальных в наши дни вопросов, как движение в поле тяготения (эллиптические траектории и космические полеты) и движение тела переменной массы (движение ракеты), в книге сохранено; дополнительно написан параграф, посвященный понятию о невесомости. Представление о содержании книги в целом и порядке изложения материала дает оглавление.

Как и в предыдущем издании, большое место в курсе отведено примерам и методам решения задач. Этот материал занимает свыше одной трети всей книги. При его подборе главное внимание было обращено на уяснение сути соответствующих механических явлений и на рассмотрение основных типов задач, решаемых с помощью каждого из изложенных в курсе методов. Таких задач, помимо примеров, в книге рассмотрено 176; их решения содержат указания, которые должны помочь студентам при самостоятельной работе над курсом. В этой части книга может быть полезной для студентов всех специальностей и особенно для студентов заочных вузов и для самообразования.

Материал в книге изложен так, что им можно пользоваться при изучении курса и по кратким и по более полным программам. При этом та часть материала, которую в случае необходимости можно целиком опустить без ущерба для понимания остального текста, выделена в главы, параграфы или пункты, помеченные звездочкой; однако следует иметь в виду, что между собой эти параграфы

(пункты) могут быть связаны взаимными ссылками. Хотя в книге широко используется общепринятая в настоящее время векторная символика, для чтения материала, не входящего в параграфы и пункты, помеченные звездочкой, предварительного знания векторной алгебры не требуется.

Нумерация формул в каждом из четырех разделов курса является сплошной, и при ссылках на формулы данного раздела обычно указывается только их номер; в ссылках же на формулы из других разделов указывается еще и номер параграфа.

С. Тарг

Москва
Май 1963 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ШЕСТОМУ ИЗДАНИЮ

В шестом издании Краткого курса теоретической механики сделан целый ряд небольших изменений, дополнений и поправок, не затрагивающих, однако, основного содержания курса и принятого порядка изложения материала. Заметной переработке подвергся лишь материал § 91 и второй части § 128.

При внесении поправок и дополнений был учтен ряд замечаний и пожеланий, высказанных читателями. Всем, сообщившим эти замечания, автор выражает глубокую благодарность.

Январь 1968 г. *С. Тарг*

ВВЕДЕНИЕ

Развитие современной техники ставит перед инженерами самые разнообразные задачи, связанные с расчетом различных сооружений (зданий, мостов, каналов, плотин и т. п.), с проектированием, производством и эксплуатацией всевозможных машин, механизмов, двигателей и, в частности, таких объектов, как автомобили, тепловозы, морские и речные суда, самолеты, ракеты, космические корабли и т. п. Несмотря на многообразие всех этих проблем, решения их в определенной части основываются на некоторых общих принципах и имеют общую научную базу. Объясняется это тем, что в названных задачах значительное место занимают вопросы, требующие изучения законов движения или равновесия тех или иных материальных тел.

Наука об общих законах движения и равновесия материальных тел и о возникающих при этом взаимодействиях между телами называется *теоретической* (или *общей) механикой.* Теоретическая механика представляет собой одну из научных основ современных технических дисциплин.

Механикой в широком смысле этого слова называется наука, посвященная решению любых задач, связанных с изучением движения или равновесия тех или иных материальных тел и происходящих при этом взаимодействий между телами. Теоретическая механика представляет собой часть механики, в которой изучаются *общие законы* движения и взаимодействия материальных тел, т. е. те законы, которые, например, справедливы и для движения Земли вокруг Солнца и для полета ракеты или артиллерийского снаряда и т. п. Другую часть механики составляют различные общие и специальные технические дисциплины, посвященные проектированию и расчету всевозможных конкретных сооружений, двигателей, механизмов и машин или их частей (деталей). Все эти технические дисциплины в основе своей базируются на законах и методах теоретической механики.

Под движением в механике мы понимаем *механическое движение,* т. е. происходящее с течением времени изменение взаимного положения материальных тел в пространстве. Механическим взаимодействием между телами называется тот вид взаимодействия, в результате которого происходит изменение движения этих тел или изменение их формы (деформация). Величина, являющаяся количественной мерой механического взаимодействия тел, называется в механике *силой.*

Основной задачей теоретической механики является изучение общих законов движения и равновесия материальных тел под действием приложенных к ним сил.

По характеру рассматриваемых задач механику принято разделять на *статику, кинематику* и *динамику*. В статике излагается учение о силах и об условиях равновесия материальных тел под действием сил. В кинематике рассматриваются общие геометрические свойства движения тел. Наконец, в динамике изучаются законы движения материальных тел под действием сил.

По свойствам изучаемого объекта теоретическая механика делится на а) механику материальной точки, т. е. тела, размерами которого при изучении его движения (или равновесия) можно пренебречь, и механику системы материальных точек; б) механику твердого тела, т. е. тела, деформациями которого при изучении его движения (или равновесия) можно пренебречь; в) механику тела переменной массы (тела, масса которого с течением времени изменяется вследствие изменения состава частиц, образующих тело); г) механику деформируемого тела (теория упругости и теория пластичности); д) механику жидкости (гидромеханика) и е) механику газа (аэромеханика и газовая динамика).

В общем курсе теоретической механики обычно изучаются механика материальной точки и твердого тела и общие законы движения систем материальных точек.

Теоретическая механика относится к разряду естественных наук, т. е. наук о природе. В ее основе лежат почерпнутые из опыта законы, отражающие определенный класс явлений природы, связанных с движением материальных тел. Роль и значение теоретической механики состоит не только в том, что она является научной базой многих областей современной техники, но и в том, что ее законы и методы позволяют изучить и объяснить целый ряд важных явлений в окружающем нас мире и способствуют дальнейшему росту и развитию естествознания в целом, а также выработке правильного материалистического мировоззрения.

Возникновение и развитие механики[1]) как науки неразрывно связано с историей развития производительных сил общества, с уровнем производства и техники на каждом этапе этого развития.

В древние времена, когда запросы производства сводились главным образом к удовлетворению нужд строительной техники, начинает развиваться учение о так называемых простейших машинах (блок, ворот, рычаг, наклонная плоскость) и общее учение о равно-

---

[1]) Термин «механика» впервые появляется в сочинениях одного из выдающихся философов древности Аристотеля (384—322 до н. э.) и происходит от греческого слова μηχανή, означающего по современным понятиям «сооружение», «машина», «изобретение».

весии тел (статика). Обоснование начал статики содержится уже в сочинениях одного из великих ученых древности Архимеда (287—212 г. до н. э.).

Развитие динамики начинается значительно позже. В XV—XVI столетиях возникновение и рост в странах Западной и Центральной Европы буржуазных отношений послужили толчком к значительному подъему ремесел, торговли, мореплавания и военного дела (появление огнестрельного оружия), а также к важным астрономическим открытиям. Все это способствовало накоплению большого опытного материала, систематизация и обобщение которого привели в XVII столетии к открытию законов динамики. Главные заслуги в создании основ динамики принадлежат гениальным исследователям Галилео Галилею (1564—1642) и Исааку Ньютону (1643—1727). В сочинении Ньютона «Математические начала натуральной философии», изданном в 1687 г., были изложены в систематическом виде основные законы так называемой классической механики (законы Ньютона). В дальнейшем эти законы прошли большую опытную проверку и нашли подтверждение в процессе всей общественно-производственной практики человечества. Это позволяет рассматривать наши знания в области механики, основанные на законах Ньютона, как достоверные знания, на которые инженер может смело опираться в своей практической деятельности[1]).

В XVIII веке начинается интенсивное развитие в механике аналитических методов, т. е. методов, основанных на применении дифференциального и интегрального исчисления. Методы решения задач динамики точки и твердого тела путем составления и интегрирования соответствующих дифференциальных уравнений были разработаны великим математиком и механиком Л. Эйлером (1707—1783). Из других исследований в этой области наибольшее значение для развития механики имели труды выдающихся французских ученых Ж. Даламбера (1717—1783), предложившего свой известный принцип решения задач динамики, и Ж. Лагранжа (1736—1813), разработавшего общий аналитический метод решения задач динамики на основе принципа Даламбера и принципа возможных перемещений. В настоящее время аналитические методы решения задач являются в динамике основными.

Кинематика, как отдельный раздел механики, выделилась лишь в первой половине XIX в. под влиянием запросов развивающегося

---

[1]) Последующее развитие науки показало, что при скоростях, близких к скорости света, движение тел подчиняется законам механики теории относительности, а движение микрочастиц (электроны, позитроны и др.) описывается законами квантовой механики. Однако эти открытия только уточнили область приложений классической механики и подтвердили достоверность ее законов для движений всех тел, отличных от микрочастиц, при скоростях, не близких к скорости света, т. е. для тех движений, которые имели и имеют огромное практическое значение в технике и небесной механике.

машиностроения. В настоящее время кинематика имеет большое самостоятельное значение для изучения движения механизмов и машин.

В России на развитие первых исследований по механике большое влияние оказали труды гениального ученого и мыслителя М. В. Ломоносова (1711—1765) и творчество Л. Эйлера, долгое время жившего и работавшего в Петербурге. Из многочисленных отечественных ученых, внесших значительный вклад в развитие различных областей теоретической механики, прежде всего должны быть названы: М. В. Остроградский (1801—1861), которому принадлежит ряд важных исследований по аналитическим методам решения задач механики; П. Л. Чебышев (1821—1894), создавший новое направление в исследовании движения механизмов; С. В. Ковалевская (1850—1891), решившая одну из труднейших задач динамики твердого тела; А. М. Ляпунов (1857—1918), разработавший новые методы исследования устойчивости движения; И. В. Мещерский (1859—1935), заложивший основы механики тел переменной массы; К. Э. Циолковский (1857—1935), сделавший ряд фундаментальных открытий в теории реактивного движения; А. Н. Крылов (1863—1945), разработавший теорию корабля и много внесший в развитие теории гироскопических приборов.

Выдающееся значение для дальнейшего развития механики имели труды «отца русской авиации» Н. Е. Жуковского (1847—1921) и его ближайшего ученика С. А. Чаплыгина (1869—1942). Характерной чертой в творчестве Н. Е. Жуковского было приложение методов механики к решению актуальных технических задач. Большое влияние идеи Н. Е. Жуковского оказали и на преподавание теоретической механики в высших технических учебных заведениях нашей страны.

Стоящая в наши дни перед отечественной наукой и техникой задача непрерывного роста и совершенствования социалистического производства и внедрения в производство новой техники требует дальнейшего повышения качества подготовки инженерных кадров, расширения теоретической базы их знаний. Известную роль в решении этой задачи должно сыграть и изучение одной из научных основ современной техники — теоретической механики.

РАЗДЕЛ ПЕРВЫЙ

СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И АКСИОМЫ СТАТИКИ

§ 1. Предмет статики. *Статикой* называется раздел механики, в котором излагается общее учение о силах и изучаются условия равновесия материальных тел, находящихся под действием сил.

Под равновесием мы будем понимать состояние покоя тела по отношению к другим материальным телам. Если движением тела, по отношению к которому изучается равновесие, можно пренебречь, то равновесие условно называют абсолютным, а в противном случае — относительным. В статике мы будем изучать только так называемое абсолютное равновесие тел. Практически при инженерных расчетах абсолютным можно считать равновесие по отношению к Земле или к телам, жестко связанным с Землей. Справедливость этого утверждения будет обоснована в динамике, где понятие об абсолютном равновесии можно определить более строго. Там же будет рассмотрен и вопрос об относительном равновесии тел.

Условия равновесия тела существенно зависят от того, является ли это тело твердым, жидким или газообразным. Равновесие жидких и газообразных тел изучается в курсах гидростатики и аэростатики. В общем курсе механики рассматриваются обычно только задачи о равновесии твердых тел.

Все встречающиеся в природе твердые тела под влиянием внешних воздействий в той или иной мере изменяют свою форму (деформируются). Величины этих деформаций зависят от материала тел, их геометрической формы и размеров и от действующих нагрузок. Для обеспечения прочности различных инженерных сооружений и конструкций материал и размеры их частей подбирают так, чтобы деформации при действующих нагрузках были достаточно малы [1]). Вследствие этого при изучении условий равновесия вполне допустимо

[1]) Например, материал и размеры стержней, входящих в те или иные конструкции, выбирают такими, что при действующих нагрузках стержни удлиняются (или укорачиваются) менее чем на одну тысячную долю их первоначальной длины. Таков же порядок допускаемых деформаций при изгибе, кручении и т. п.

пренебрегать малыми деформациями соответствующих твердых тел и рассматривать их как недеформируемые или абсолютно твердые. *Абсолютно твердым телом* будем называть такое тело, расстояние между двумя любыми точками которого всегда остается постоянным. В дальнейшем при решении задач статики все тела будем рассматривать как абсолютно твердые, хотя часто для краткости будем называть их просто твердыми телами. Как будет показано в конце § 3, условия равновесия, получаемые для абсолютно твердых тел, могут применяться не только к малым деформируемым, но и к любым изменяемым телам. Таким образом, область практических приложений статики твердого тела оказывается довольно широкой.

Учет деформаций тел приобретает существенное значение при расчете прочности частей тех или иных инженерных сооружений или машин. Эти вопросы рассматриваются в курсах сопротивления материалов и теории упругости.

Чтобы твердое тело под действием некоторой системы сил находилось в равновесии (в покое), необходимо, чтобы эти силы удовлетворяли определенным *условиям равновесия* данной системы сил. Нахождение этих условий является одной из основных задач статики. Но для отыскания условий равновесия различных систем сил, а также для решения ряда других задач механики оказывается необходимым уметь складывать силы, действующие на твердое тело, заменять действие одной системы сил другой системой и, в частности, приводить данную систему сил к простейшему виду. Поэтому в статике твердого тела рассматриваются следующие две основные проблемы: 1) сложение сил и приведение систем сил, действующих на твердое тело, к простейшему виду; 2) определение условий равновесия действующих на твердое тело систем сил.

Задачи статики могут решаться или путем соответствующих геометрических построений (геометрический и графический методы), или с помощью численных расчетов (аналитический метод). В курсе будут рассмотрены оба эти метода, однако следует иметь в виду, что наглядные геометрические построения всегда играют при решении задач механики первостепенную роль.

§ 2. Сила. Состояние равновесия или движения данного тела зависит от характера его механических взаимодействий с другими телами, т. е. от тех давлений, притяжений или отталкиваний, которые данное тело испытывает в результате этих взаимодействий. *Величина, являющаяся количественной мерой механического взаимодействия материальных тел, называется в механике силой.*

Рассматриваемые в механике величины можно разделить на скалярные, т. е. такие, которые полностью характеризуются их численным значением, и векторные, т. е. такие, которые, помимо численного значения, характеризуются еще и направлением в пространстве.

Сила является величиной векторной. Ее действие на тело определяется: 1) *численной величиной* или *модулем* силы, 2) *направлением* силы, 3) *точкой приложения* силы.

Модуль данной силы находится путем сравнения ее с силой, принятой за единицу. В механике основными единицами измерения силы являются или 1 *ньютон* (1 *н*) или 1 *килограмм силы* (1 *кГ*); при этом 1 *кГ* $\approx$ 9,81 *н* (подробнее см. § 101). Для статического измерения сил служат известные из курса физики приборы, называемые динамометрами.

Направление и точка приложения силы зависят от характера взаимодействия тел и их взаимного положения. Например, сила тяжести, действующая на какое-нибудь тело, направлена по вертикали вниз. Силы давления двух прижатых друг к другу гладких шаров направлены по нормали к поверхностям шаров в точках их касания и приложены в этих точках и т. д.

Графически сила, как и всякий вектор, изображается направленным отрезком (со стрелкой). Длина этого отрезка (AB на рис. 1) выражает в выбранном масштабе модуль силы, направление отрезка соответствует направлению силы, его начало (точка A на рис. 1) обычно совпадает с точкой приложения силы. Иногда бывает удобно изображать силу так, что точкой приложения является ее конец — острие стрелки (как на рис. 4,*в*). Прямая DE, вдоль которой направлена сила, называется *линией действия силы*. Силу, как и всякую другую векторную величину, будем обозначать или какой-нибудь буквой жирного шрифта ($\boldsymbol{F}$), или двумя буквами с чертой над ними ($\overline{AB}$). Модуль силы обозначают символом $|\boldsymbol{F}|$ или той же буквой светлого шрифта (F). (При написании формул от руки вместо букв жирного шрифта ставятся черточки над буквами.)

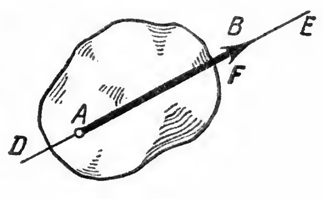


Рис. 1.

В дальнейшем совокупность сил, действующих на какое-нибудь твердое тело, будем называть *системой сил*. Условимся еще о следующих определениях:

1. Тело, не скрепленное с другими телами, которому из данного положения можно сообщить любое перемещение в пространстве, называется *свободным*.

2. Если одну систему сил, действующих на свободное твердое тело, можно заменить другой системой, не изменяя при этом состояния покоя или движения, в котором находится тело, то такие две системы сил называются *эквивалентными*.

3. Система сил, под действием которой свободное твердое тело *может* находиться в покое, называется *уравновешенной* или *эквивалентной нулю*.

4. Если данная система сил эквивалентна одной силе, то эта сила называется *равнодействующей* данной системы сил. Таким образом, *равнодействующая — это сила, которая одна заменяет действие данной системы сил на твердое тело.*

Сила, равная равнодействующей по модулю, прямо противоположная ей по направлению и действующая вдоль той же прямой, называется *уравновешивающей* силой.

5. Силы, действующие на твердое тело, можно разделить на внешние и внутренние. *Внешними* называются силы, действующие на частицы данного тела со стороны других материальных тел. *Внутренними* называются силы, с которыми частицы данного тела действуют друг на друга.

6. Сила, приложенная к телу в какой-нибудь одной его точке, называется *сосредоточенной*. Силы, действующие на все точки данного объема или данной части поверхности тела, называются *распределенными*.

Понятие о сосредоточенной силе является условным, так как практически приложить силу к телу в одной точке нельзя. Силы, которые мы в механике рассматриваем как сосредоточенные, представляют собою по существу равнодействующие некоторых систем распределенных сил.

В частности, обычно рассматриваемая в механике сила тяжести, действующая на данное твердое тело, представляет собою равнодействующую сил тяжести его частиц. Линия действия этой равнодействующей проходит через точку, называемую центром тяжести тела [1]).

§ 3. Аксиомы статики. Все теоремы и уравнения статики выводятся из нескольких исходных положений, принимаемых без математических доказательств и называемых аксиомами или принципами статики. Аксиомы статики представляют собою результат обобщений многочисленных опытов и наблюдений над равновесием и движением тел, неоднократно подтвержденных практикой. Часть из этих аксиом является следствиями основных законов механики, с которыми мы познакомимся в динамике.

Аксиома 1. *Если на свободное абсолютно твердое тело действуют две силы, то тело может находиться в равновесии тогда и только тогда, когда эти силы равны по модулю* ($F_1 = F_2$) *и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны* (рис. 2).

---

[1]) Вопрос об определении центров тяжести тел будет рассмотрен в главе IX. Предварительно заметим, что если однородное тело имеет центр симметрии (прямоугольный брус, цилиндр, шар и т. п.), то центр тяжести такого тела находится в его центре симметрии.

Аксиома 1 определяет простейшую уравновешенную систему сил, так как опыт показывает, что свободное тело, на которое действует только одна сила, находиться в равновесии не может.

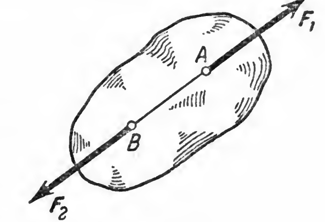


Рис. 2.

Аксиома 2. *Действие данной системы сил на абсолютно твердое тело не изменится, если к ней прибавить или от нее отнять уравновешенную систему сил.*

Эта аксиома устанавливает, что две системы сил, отличающиеся на уравновешенную систему, эквивалентны друг другу.

Следствие из 1-й и 2-й аксиом. *Действие силы на абсолютно твердое тело не изменится, если перенести точку приложения силы вдоль ее линии действия в любую другую точку тела.*

В самом деле, пусть на твердое тело действует приложенная в точке A сила $\boldsymbol{F}$ (рис. 3). Возьмем на линии действия этой силы произвольную точку B и приложим к ней две уравновешенные силы $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$, такие, что $\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}_2 = -\boldsymbol{F}$. От этого действие силы $\boldsymbol{F}$ на тело не изменится. Но силы $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{F}_2$ согласно аксиоме 1 также образуют уравновешенную систему, которая может быть отброшена[1]). В результате на тело будет действовать только одна сила $\boldsymbol{F}_1$, равная $\boldsymbol{F}$, но приложенная в точке B.

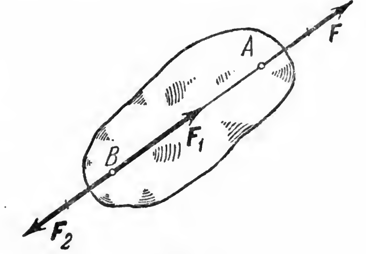


Рис. 3.

Таким образом, вектор, изображающий силу $\boldsymbol{F}$, можно считать приложенным в любой точке на линии действия силы (такой вектор называется *скользящим*).

Полученный результат справедлив только для сил, действующих на абсолютно твердое тело. При инженерных расчетах им можно пользоваться лишь тогда, когда определяются условия равновесия той или иной конструкции и не рассматриваются возникшие в ее частях внутренние усилия.

Например, изображенный на рис. 4, *а* стержень AB будет находиться в равновесии, если $F_1 = F_2$. При переносе точек приложения обеих сил в какую-нибудь точку C стержня (рис. 4, *б*) или при переносе точки приложения $\boldsymbol{F}_1$ в точку B, а силы $\boldsymbol{F}_2$ в точку A (рис. 4, *в*) равновесие не нарушается. Однако внутренние усилия будут в каждом из рассмотренных случаев разными. В первом случае

---

[1]) Отброшенные или перенесенные силы будем на рисунках перечеркивать.

стержень под действием приложенных сил растягивается, во втором случае он не напряжен, а в третьем стержень будет сжиматься [1]).

Следовательно, при определении внутренних усилий переносить точку приложения силы вдоль линии действия нельзя.

Аксиома 3 (аксиома параллелограмма сил). *Две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют равнодействующую, приложенную в той же точке и изображаемую диагональю параллелограмма, построенного на этих силах, как на сторонах.*

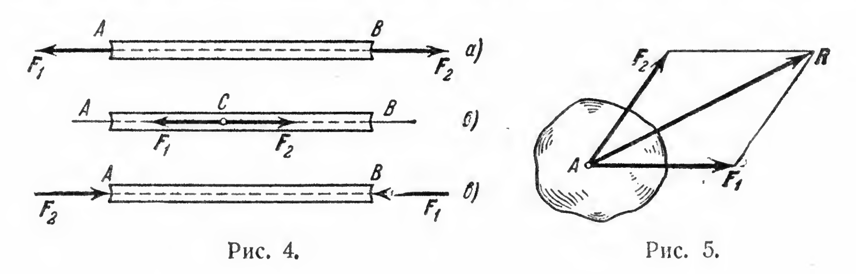


Рис. 4. Рис. 5.

Вектор $\boldsymbol{R}$, равный диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ (рис. 5), называется геометрической суммой векторов $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$:

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2.$$

Следовательно, аксиому 3 можно еще формулировать так: *две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют равнодействующую, равную геометрической (векторной) сумме этих сил и приложенную в той же точке.*

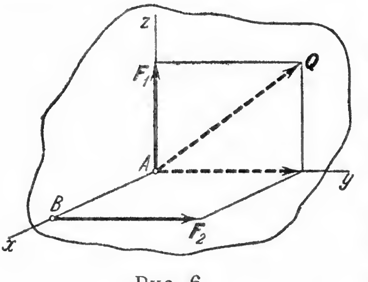


Рис. 6.

В дальнейшем следует различать понятия суммы сил и их равнодействующей. Поясним это примером. Рассмотрим две силы $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ (рис. 6), приложенные к телу в точках A и B. Показанная на рис. 6 сила $\boldsymbol{Q}$ равна геометрической сумме сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ ($\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$) как диагональ соответствующего параллелограмма. Но сила $\boldsymbol{Q}$ не является равнодействующей этих сил, так как нетрудно понять, что одна сила $\boldsymbol{Q}$ не может заменить действие сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ на данное

[1]) Чтобы стержень растягивать (или сжимать) с силой F_1, надо к одному концу стержня приложить эту силу, а другой конец или закрепить жестко, или удерживать с силой $\boldsymbol{F}_2=-\boldsymbol{F}_1$, как на рис. 4. Растягивающая (или сжимающая) сила будет в обоих случаях одна и та же и равна F_1, а не $2F_1$, как иногда ошибочно полагают.

тело. Больше того, эти две силы, как будет показано, вообще не имеют равнодействующей (§ 48, задача 42).

Аксиома 4. *При всяком действии одного материального тела на другое имеет место такое же по величине, но противоположное по направлению противодействие.*

Закон о равенстве действия и противодействия является одним из основных законов механики. Из него следует, что если тело A действует на тело B с силой $\boldsymbol{F}$, то одновременно тело B действует на тело A с такой же по модулю и направленной вдоль той же прямой, но в противоположную сторону силой $\boldsymbol{F}' = -\boldsymbol{F}$ (рис. 7). Однако силы $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{F}'$ не образуют уравновешенной системы сил, так как они приложены к разным телам.

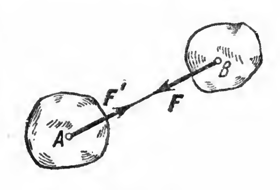


Рис. 7.

Свойство внутренних сил. По аксиоме 4 любые две частицы твердого тела будут действовать друг на друга с равными по модулю и противоположно направленными силами. Так как при изучении условий равновесия тело рассматривают как абсолютно твердое, то (по аксиоме 1) все внутренние силы образуют при этом уравновешенную систему, которую (по аксиоме 2) можно отбросить. Следовательно, при изучении условий равновесия тела (конструкции) необходимо учитывать только внешние силы, действующие на это тело (конструкцию). В дальнейшем, говоря о действующих силах, мы будем подразумевать, если не сделано специальной оговорки, что речь идет только о *внешних силах.*

Аксиома 5 (принцип отвердевания). *Равновесие изменяемого (деформируемого) тела, находящегося под действием данной системы сил, не нарушится, если тело считать отвердевшим (абсолютно твердым).*

Высказанное в этой аксиоме утверждение очевидно. Например, ясно, что равновесие цепи не нарушится, если ее звенья считать сваренными друг с другом и т. д. Так как на покоящееся тело до и после отвердевания действует одна и та же система сил, то аксиому 5 можно еще выразить в другой форме: *при равновесии силы, действующие на любое изменяемое (деформируемое) тело, удовлетворяют тем же условиям, что и для тела абсолютно твердого*; однако для изменяемого тела эти условия, будучи *необходимыми,* могут не быть *достаточными.*

Например, для равновесия гибкой нити под действием двух сил, приложенных к ее концам, необходимы те же условия, что и для жесткого стержня (силы должны быть равны по модулю и направлены вдоль нити в разные стороны). Но эти условия не будут достаточными. Для равновесия нити требуется еще, чтобы приложенные силы были растягивающими, т. е. направленными так, как на рис. 4, *а*.

Принцип отвердевания широко используется в инженерных расчетах. Он позволяет при составлении условий равновесия рассматривать любое изменяемое тело (ремень, трос, цепь и т. п.) или любую изменяемую конструкцию как абсолютно жесткие и применять к ним методы статики твердого тела. Если полученных таким путем уравнений для решения задачи оказывается недостаточно, то дополнительно составляют уравнения, учитывающие или условия равновесия отдельных частей конструкции, или их деформации (задачи, требующие учета деформаций, решаются в курсе сопротивления материалов).

§ 4. Связи и их реакции. По определению, тело, которое не скреплено с другими телами и может совершать из данного положения любые перемещения в пространстве, называется свободным (например, воздушный шар в воздухе). Тело, перемещениям которого в пространстве препятствуют какие-нибудь другие, скрепленные или соприкасающиеся с ним тела, называется несвободным. *Все то, что ограничивает перемещения данного тела в пространстве, будем называть связью.*

Примерами несвободных тел являются груз, лежащий на столе, дверь, подвешенная на петлях, и т. п. Связями в этих случаях будут: для груза — плоскость стола, не дающая грузу перемещаться по вертикали вниз; для двери — петли, не дающие двери отойти от косяка.

Тело, стремясь под действием приложенных сил осуществить перемещение, которому препятствует связь, будет действовать на нее с некоторой силой, называемой силой давления на связь. Одновременно, по аксиоме 4, связь будет действовать на тело с такой же по модулю, но противоположно направленной силой. *Сила, с которой данная связь действует на тело, препятствуя тем или иным его перемещениям, называется силой реакции (противодействия) связи* или просто *реакцией связи.*

В дальнейшем силы, не являющиеся реакциями связей (такие, например, как сила тяжести), будем называть *активными силами.* Особенностью активной силы является то, что ее модуль и направление непосредственно не зависят от других, действующих на тело сил. Реакция связи отличается от действующих на тело активных сил тем, что ее численная величина всегда зависит от этих сил и наперед неизвестна (если никакие активные силы на тело не действуют, то реакции связей равны нулю); для определения величины реакции надо решить соответствующую задачу статики. *Направлена реакция связи в сторону, противоположную той, куда связь не дает перемещаться телу.* Когда связь одновременно препятствует перемещениям тела по нескольким направлениям, направление реакции связи также наперед неизвестно и должно определяться в результате решения рассматриваемой задачи.

Правильное определение направлений реакций связей играет при решении задач статики очень важную роль. Рассмотрим поэтому подробнее, как направлены реакции некоторых основных видов связей (дополнительные примеры приведены в § 25).

1. Гладкая плоскость (поверхность) или опора. Гладкой будем называть поверхность, трением о которую данного тела можно в первом приближении пренебречь. Такая поверхность не дает телу перемещаться только по направлению общего перпендикуляра (нормали) к поверхностям соприкасающихся тел в точке их касания (рис. 8, *а*)[1]). Поэтому *реакция* $\boldsymbol{N}$ *гладкой поверхности*

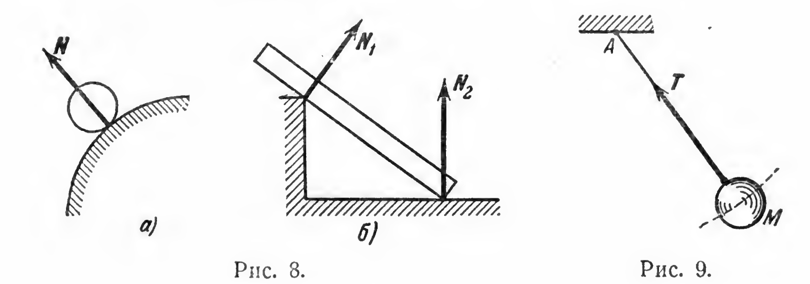


Рис. 8. Рис. 9.

или опоры направлена по общей нормали к поверхностям соприкасающихся тел в точке их касания и приложена в этой точке. Когда одна из соприкасающихся поверхностей является точкой (рис. 8, *б*), то реакция направлена *по нормали к другой поверхности.*

2. Нить. Связь, осуществленная в виде гибкой нерастяжимой нити (рис. 9), не дает телу M удаляться от точки подвеса нити по направлению AM. Поэтому *реакция* $\boldsymbol{T}$ *натянутой нити направлена вдоль нити к точке ее подвеса.*

3. Цилиндрический шарнир (подшипник). Если два тела соединены болтом, проходящим через отверстия в этих телах, то такое соединение называется шарнирным или просто шарниром; осевая линия болта называется осью шарнира. Тело AB, прикрепленное шарниром к опоре D (рис. 10, *а*), может поворачиваться как угодно вокруг оси шарнира (в плоскости чертежа); при этом конец A тела не может переместиться ни по какому направлению, перпендикулярному к оси шарнира. Поэтому *реакция* $\boldsymbol{R}$ *цилиндрического шарнира может иметь любое направление в плоскости, перпен-*

---

[1]) На рис. 8 — 11 действующие на тела заданные силы не показаны. В случаях, изображенных на рис. 8 и 9, реакции имеют указанные направления при *любых* заданных силах и независимо от того, находится ли при этом тело в покое или в движении.

дикулярной к оси шарнира, т. е. в плоскости Axy. Для силы $\mathbf{R}$ в этом случае наперед не известны ни ее модуль R, ни направление (угол α).

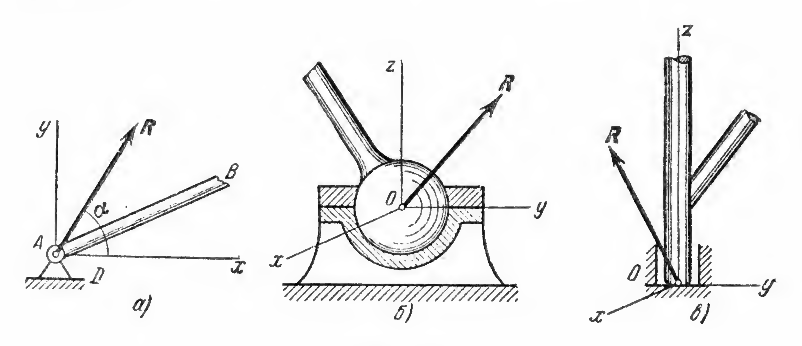


Рис. 10.

4. Шаровой шарнир и подпятник. Этот вид связи закрепляет какую-нибудь точку тела так, что она не может совершать никаких перемещений в пространстве. Примерами таких связей служат шаровая пята, с помощью которой прикрепляется фотоаппарат к штативу (рис. 10, *б*) и подшипник с упором (подпятник) (рис. 10, *в*). *Реакция* $\mathbf{R}$ *шарового шарнира или подпятника может иметь любое направление в пространстве.* Для нее наперед не известны ни модуль реакции R, ни углы, образуемые ею с осями x, y, z.

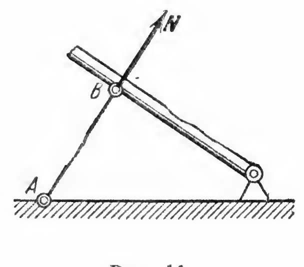


Рис. 11.

5. Стержень. Пусть в какой-нибудь конструкции связью является стержень AB, закрепленный на концах шарнирами (рис. 11). Примем, что весом стержня по сравнению с воспринимаемой им нагрузкой можно пренебречь. Тогда на стержень будут действовать только две силы, приложенные в шарнирах A и B. Вообще эти силы могут быть направлены произвольно. Но если стержень AB находится в равновесии, то по аксиоме 1 приложенные в точках A и B силы должны быть направлены вдоль одной прямой, т. е. вдоль оси стержня (см. рис. 4, *а* и 4, *в*). Следовательно, нагруженный на концах стержень, *весом которого по сравнению с этими нагрузками можно пренебречь,* работает только на растяжение или на сжатие. Если такой стержень является связью, то *реакция* $\mathbf{N}$ *стержня будет направлена вдоль оси стержня.*

§ 5. Аксиома связей. Равновесие несвободных тел изучается в статике на основании следующей аксиомы: *всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если отбросить связи и заменить их действие реакциями этих связей.*

Например, брус AB весом P (рис. 12, *а*), для которого связями являются плоскость OE, опора D и трос KO, можно рассматривать как свободное тело (рис. 12, *б*), находящееся в равновесии под действием заданной силы $\boldsymbol{P}$ и реакций связей N_A, N_D и $\boldsymbol{T}$. Модули этих реакций, которые наперед неизвестны, можно найти из условий равновесия сил, действующих на теперь уже свободное тело. В этом и состоит основной метод решения задач статики.

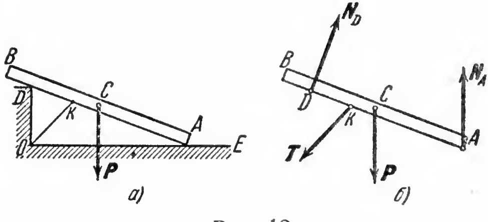


Рис. 12.

Определение реакций связей имеет то практическое значение, что, зная их, мы, согласно аксиоме 4, будем знать и силы давления на связи, т. е. те исходные данные, которые необходимы для расчета прочности соответствующих частей конструкции.

ГЛАВА II

СЛОЖЕНИЕ СИЛ. СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

§ 6. Геометрический способ сложения сил. Равнодействующая сходящихся сил. Решение многих задач механики связано с известной из векторной алгебры операцией сложения векторов и, в частности, сил. Изучение статики начнем с рассмотрения геометрического способа сложения сил. Величину, равную геометрической сумме сил какой-нибудь системы, будем в дальнейшем называть *главным вектором* этой системы сил. Как отмечалось в § 3 (см. рис. 6), понятие о геометрической сумме сил не следует смешивать с понятием о равнодействующей; для многих систем сил, как мы увидим в дальнейшем, равнодействующей вообще не существует, геометрическую же сумму (главный вектор) можно вычислить для *любой* системы сил.

1) Сложение двух сил. Геометрическая сумма $\boldsymbol{R}$ двух сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ находится или по правилу параллелограмма (рис. 13, *а*), или построением силового треугольника (рис. 13, *б*), изображающего одну из половин этого параллелограмма. Для построения силового треугольника надо от произвольной точки A_1 отложить вектор, изображающий одну из сил, а от его конца — вектор, изображающий

вторую силу. Соединяя начало первого вектора с концом второго, получим вектор, изображающий силу $\boldsymbol{R}$.

Модуль R определяется как сторона A_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$ из равенства

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos(180° - \alpha),$$

где α — угол между силами. Следовательно,

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos\alpha}. \qquad (1)$$

Углы β и γ, которые сила $\boldsymbol{R}$ образует со слагаемыми силами, находятся по теореме синусов. Замечая, что $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, получим:

$$\frac{F_1}{\sin\gamma} = \frac{F_2}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\alpha}. \qquad (2)$$

2) Сложение трех сил, не лежащих в одной плоскости. Геометрическая сумма $\boldsymbol{R}$ трех сил $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$, не лежащих в одной плоскости, изображается диагональю параллелепипеда,

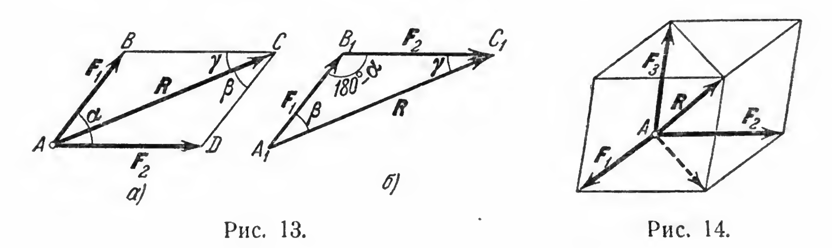


Рис. 13. Рис. 14.

построенного на этих силах (*правило параллелепипеда*). В справедливости этого убеждаемся, применяя последовательно правило параллелограмма (рис. 14).

3) Сложение системы сил. Геометрическая сумма (главный вектор) любой системы сил определяется или последовательным сложением сил системы по правилу параллелограмма, или построением силового многоугольника. Второй способ является более простым и удобным. Для нахождения этим способом суммы сил $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3 \ldots \boldsymbol{F}_n$ (рис. 15, *а*) откладываем от произвольной точки O (рис. 15, *б*) вектор $\overline{Oa}$, изображающий в выбранном масштабе силу $\boldsymbol{F}_1$, от точки a откладываем вектор $\overline{ab}$, изображающий силу $\boldsymbol{F}_2$, от точки b откладываем вектор $\overline{bc}$, изображающий силу $\boldsymbol{F}_3$, и т. д.; от конца m предпоследнего вектора откладываем вектор $\overline{mn}$, изображающий силу $\boldsymbol{F}_n$. Соединяя начало первого вектора с концом последнего, получаем вектор $\overline{On} = \boldsymbol{R}$, изображающий геометрическую сумму или главный

вектор слагаемых сил:

$$R = F_1 + F_2 + \ldots + F_n \quad \text{или} \quad R = \sum F_k. \tag{3}$$

От порядка, в котором будут откладываться векторы сил, модуль и направление R не зависят. Легко видеть, что проделанное построение представляет собою результат последовательного применения правила силового треугольника.

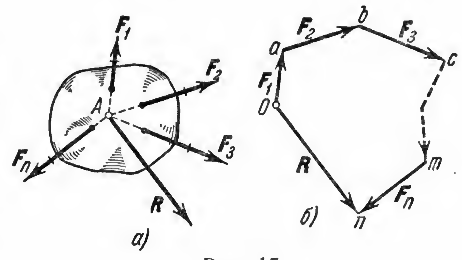


Рис. 15.

Фигура, построенная на рис. 15, *б*, называется *силовым* (в общем случае *векторным*) *многоугольником*. Таким образом, ***геометрическая сумма или главный вектор нескольких сил изображается замыкающей стороной силового многоугольника, построенного из этих сил*** (***правило силового многоугольника***). При построении векторного многоугольника следует помнить, что у всех слагаемых векторов стрелки должны быть направлены в одну сторону (по обводу многоугольника), а у вектора R — в сторону противоположную.

Равнодействующая сходящихся сил. При изучении статики мы будем последовательно переходить от рассмотрения более простых систем сил к более сложным. Начнем с рассмотрения системы сходящихся сил. *Сходящимися называются силы, линии действия которых пересекаются в одной точке* (см. рис. 15, *а*). По следствию из первых двух аксиом статики система сходящихся сил, действующих на абсолютно твердое тело, эквивалентна системе сил, приложенных в одной точке (на рис. 15, *а* в точке A).

Последовательно применяя аксиому параллелограмма сил, приходим к выводу, что *система сходящихся сил имеет равнодействующую, равную геометрической сумме (главному вектору) этих сил и приложенную в точке их пересечения.* Следовательно, если силы F_1, F_2, ..., F_n сходятся в точке A (рис. 15, *а*), то сила, равная главному вектору R, найденному построением силового многоугольника, и приложенная в точке A, будет равнодействующей этой системы сил.

Когда силы сходятся за пределами рисунка, точку, через которую проходит их равнодействующая, можно найти графическим методом, изложенным в § 30.

§ 7. Разложение сил. Разложить данную силу на несколько составляющих — значит найти такую систему нескольких сил, для которой данная сила является равнодействующей. Эта задача является

неопределенной и имеет однозначное решение лишь при задании дополнительных условий. Рассмотрим два наиболее важных частных случая.

1) Разложение силы по двум заданным направлениям. Разложим заданную силу $\boldsymbol{F}$ (рис. 16) по направлениям, параллельным данным прямым AB и AD (сила и прямые лежат в одной плоскости). Задача сводится к построению такого параллелограмма, у которого диагональ будет изображать силу $\boldsymbol{F}$, а стороны будут параллельны прямым AB и AD. Для решения задачи проводим через начало и конец силы $\boldsymbol{F}$ прямые, параллельные AB и AD. Силы $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$ и будут искомыми составляющими, так как $\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{F}$.

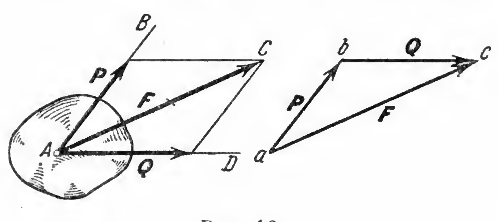


Рис. 16.

Разложение можно также произвести построением силового треугольника (рис. 16, *б*). Для этого от произвольной точки a откладывается сила $\boldsymbol{F}$ и через ее концы проводятся прямые, параллельные AB и AD, до их взаимного пересечения. Найденные силы $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$ заменяют силу $\boldsymbol{F}$, если их приложить в точке A или в любой другой точке на линии действия силы $\boldsymbol{F}$.

2) Разложение силы по трем заданным направлениям. Если заданные направления не лежат в одной плоскости, то задача является определенной и сводится к построению такого параллелепипеда, у которого диагональ изображает заданную силу $\boldsymbol{F}$, а ребра параллельны заданным направлениям (см. рис. 14).

Предоставляем читателю самому рассмотреть случай разложения данной силы $\boldsymbol{F}$ на две силы $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$, лежащие в одной плоскости с $\boldsymbol{F}$, если модули этих сил P и Q заданы, причем $P+Q\geqslant F$. Задача имеет два решения.

Решение задач. Способом разложения можно пользоваться для определения давлений, оказываемых на связи действием заданной силы. При этом, чтобы найти давления на связи, жестко закрепляющие тело, надо заданную силу разложить по направлениям реакций этих связей, так как по аксиоме 4 сила давления на связь и реакция связи направлены вдоль одной и той же прямой. Следовательно, для применения этого метода надо знать наперед *направления* реакций соответствующих связей.

Задача 1. Кронштейн состоит из стержней AC и BC, соединенных со стеной и друг с другом шарнирами, причем $\angle BAC=90°$, $\angle ABC=\alpha$ (рис. 17). К шарниру C подвешен груз весом P. Пренебрегая весом стержней, найти силу, сжимающую стержень BC.

Решение. Действие силы $\boldsymbol{P}$ воспринимается обоими стержнями. Реакции их в этом случае направлены вдоль стержней. Поэтому для нахождения искомого усилия приложим силу $\boldsymbol{P}$ в точке C и разложим ее по направлениям AC и BC. Составляющая $\boldsymbol{S}_1$ и будет искомой силой. Из треугольника CDE получаем:

$$S_1 = \frac{P}{\cos\alpha}.$$

Из того же треугольника находим, что стержень AC растягивается с силой

$$S_2 = P\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

С увеличением угла α нагрузки на оба стержня растут и при угле α, близком к 90°, достигают очень больших значений. Например, при $P = 100$ *кГ* и $\alpha = 85°$ получаем $S_1 \approx 1150$ *кГ*, $S_2 \approx 1140$ *кГ*. Для уменьшения нагрузок следует уменьшать угол α.

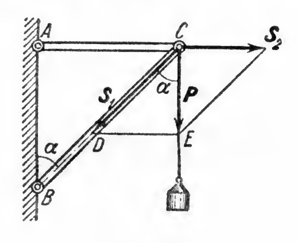


Рис. 17.

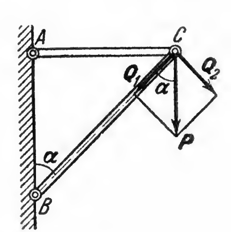


Рис. 18.

Из полученных результатов видно, что иногда при действии малой заданной силы нагрузки на отдельные части конструкции могут оказаться очень большими (см. также задачу 2). Это объясняется тем, что силы складываются и разлагаются по закону параллелограмма, а в параллелограмме диагональ может быть много меньше его сторон. Поэтому, если при решении задачи те или иные усилия (реакции) получаются очень большими по сравнению с заданными силами, то это еще вовсе не означает ошибочности решения.

Покажем в заключение, почему при решении подобных задач заданную силу следует обязательно разлагать по направлениям реакций связей. В рассматриваемой задаче требуется определить усилие в стержне BC. Приложим силу $\boldsymbol{P}$ в точке C (рис. 18) и разложим ее по направлению стержня BC и направлению, перпендикулярному к нему. Получаем:

$$Q_1 = P\cos\alpha, \quad Q_2 = P\sin\alpha.$$

Разложение произведено верно, но сила $\boldsymbol{Q}_1$ не дает искомого усилия в стержне BC, так как действие силы $\boldsymbol{Q}_2$ не воспринимается полностью стержнем AC. Поэтому сила $\boldsymbol{Q}_2$ будет действовать одновременно на оба стержня и окажет, следовательно, дополнительное давление на стержень BC, не учтенное величиною $\boldsymbol{Q}_1$.

Рассмотренный пример показывает, что если мы будем разлагать силу не по направлениям реакций наложенных связей, то не получим искомого решения.

Задача 2. Фонарь весом $P = 20$ *кГ* (рис. 19) подвешен на двух тросах AC и BC, образующих одинаковые углы $\alpha = 5°$ с горизонтом. Определить, с какой силой натянуты тросы.

Решение. Изображаем силу $\boldsymbol{P}$ в точке C и разлагаем ее по направлениям тросов. Параллелограмм сил в данном случае будет ромбом. Диагонали

его взаимно перпендикулярны и делятся в точке пересечения пополам. Из треугольника aCb получаем:

$$\frac{P}{2}=T_1\sin\alpha,$$

откуда

$$T_1=T_2=\frac{P}{2\sin\alpha}\approx 115\ кГ.$$

Из полученной формулы видно, что с уменьшением угла α натяжение тросов сильно растет (например, при $\alpha=1^\circ$ $T\approx 573$ *кГ*). Если пытаться натянуть трос так, чтобы он стал горизонтальным, то трос оборвется, так как при $\alpha\to 0$ $T\to\infty$.

Рис. 19.

Задача 3. В кривошипно-шатунном механизме, изображенном на рис. 20, определить окружное усилие в точке B и давление на ось O кривошипа, вызываемые действием приложенной к поршню A силы $\boldsymbol{P}$, при данных углах α и β. Весом шатуна AB и кривошипа OB пренебречь.

Решение. Для определения искомых усилий надо знать силу $\boldsymbol{Q}$, с которой шатун AB действует на шарнир B. Величину $\boldsymbol{Q}$ найдем, разложив силу $\boldsymbol{P}$, по направлениям AB и AD (AD — направление, по которому поршень A давит на направляющие). В результате получим:

$$Q=\frac{P}{\cos\alpha}.$$

Приложив теперь силу $\boldsymbol{Q}$ в точке B и разлагая ее так, как показано на

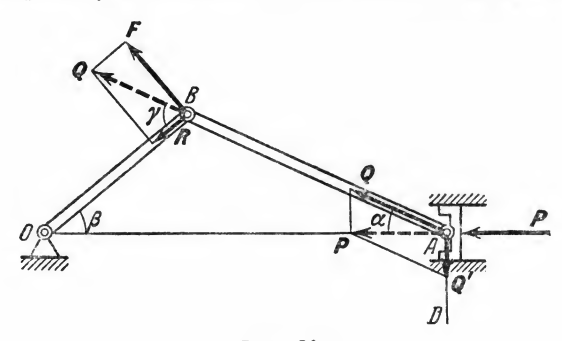


Рис. 20.

рис. 20, найдем окружное усилие $\boldsymbol{F}$ и давление $\boldsymbol{R}$ на ось. При этом

$$F=Q\sin\gamma,\quad P=Q\cos\gamma.$$

Угол γ, как внешний угол треугольника OBA, равен $\alpha+\beta$. Поэтому

окончательно получим:

$$F = P\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha}, \qquad R = P\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha}.$$

Так как $\alpha+\beta \leqslant 180°$ и $\alpha < 90°$, то всегда $F > 0$, т. е. сила $\boldsymbol{F}$ всегда направлена так, как показано на чертеже. Сила же $\boldsymbol{R}$ будет направлена от B к O до тех пор, пока $\alpha+\beta < 90°$; при $\alpha+\beta > 90°$ направление $\boldsymbol{R}$ изменяется на противоположное. Когда $\alpha+\beta = 90°$, получаем $R = 0$.

Из данного примера видно, что разложением сил можно пользоваться и в тех случаях, когда силы действуют на тела, не находящиеся в равновесии. В этом случае для определения давления на связь силу надо разлагать по направлению реакции этой связи и по направлению перемещения точки приложения силы (как это сделано в точке B). Давления на связи, определенные таким способом, называются *статическими*, так как при их вычислении не учитывались массы, скорости и ускорения движущихся тел. Практически результатами таких расчетов можно пользоваться лишь тогда, когда скорости и ускорения тел малы. Давления на связи, определенные с учетом масс, скоростей и ускорений движущихся тел, называются *динамическими*. Вычисление их производится методами динамики (§ 169).

§ 8. Проекция силы на ось и на плоскость. Перейдем к рассмотрению аналитического (численного) метода решения задач статики. Этот метод основывается на понятии о проекции силы на ось. Как и для всякого другого вектора, *проекцией силы на ось называется скалярная величина, равная взятой с соответствующим знаком длине отрезка, заключенного между проекциями начала и конца силы.* Проекция имеет знак плюс, если перемещение от ее начала к концу происходит в положительном направлении оси, и знак минус — если в отрицательном. Из определения следует, что проекции данной силы на любые параллельные и одинаково направленные оси равны друг другу. Этим удобно пользоваться при вычислении проекции силы на ось, не лежащую в одной плоскости с силой.

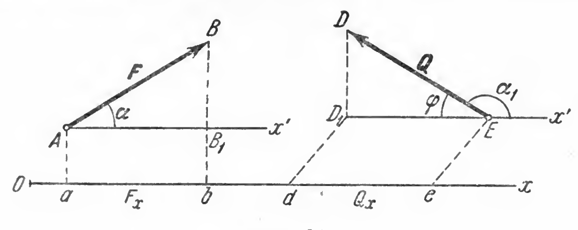


Рис. 21.

Обозначать проекцию силы $\boldsymbol{F}$ на ось Ox будем символом F_x. Тогда для сил, изображенных на рис. 21, получим[1]):

$$F_x = AB_1 = ab, \qquad Q_x = -ED_1 = -ed.$$

[1]) Положительное направление на оси считаем от точки O (начало отсчета) в ту сторону, где стоит буква x, указывающая наименование оси. Стрелки на чертежах будем употреблять только при изображении векторов.

Но из чертежа видно, что $AB_1 = F\cos\alpha$, $ED_1 = Q\cos\varphi = -Q\cos\alpha_1$. Следовательно,

$$F_x = F\cos\alpha,\quad Q_x = -Q\cos\varphi = Q\cos\alpha_1, \tag{4}$$

т. е. *проекция силы на ось равна произведению модуля силы на косинус угла между направлением силы и положительным направлением оси.* При этом проекция будет положительной, если угол между направлением силы и положительным направлением оси — острый, и отрицательной, если этот угол — тупой; *если сила перпендикулярна к оси, то ее проекция на ось равна нулю.*

Проекцией силы F на плоскость Oxy называется вектор $F_{xy} = \overline{OB_1}$, заключенный между проекциями начала и конца силы F на эту плоскость (рис. 22). Таким образом, в отличие от проекции силы на ось, проекция силы на плоскость есть величина векторная, так как она характеризуется не только своим численным значением, но и направлением в плоскости Oxy. По модулю $F_{xy} = F\cos\theta$, где θ — угол межу направлением силы $\boldsymbol{F}$ и ее проекции $\boldsymbol{F}_{xy}$.

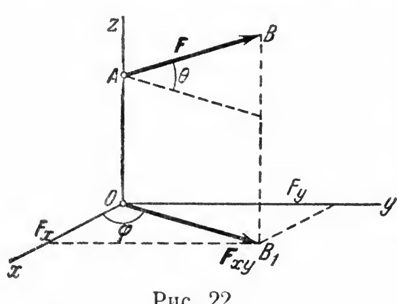


Рис. 22.

В некоторых случаях для нахождения проекции силы на ось бывает удобнее найти сначала ее проекцию на плоскость, в которой эта ось лежит, а затем найденную проекцию на плоскость спроектировать на данную ось. Например, в случае, изображенном на рис. 22, найдем таким способом, что

$$\begin{aligned} F_x &= F_{xy}\cos\varphi = F\cos\theta\cos\varphi,\\ F_y &= F_{xy}\sin\varphi = F\cos\theta\sin\varphi. \end{aligned} \tag{5}$$

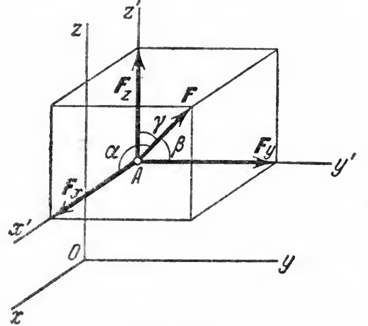


Рис. 23.

§ 9. Аналитический способ задания сил. Для аналитического задания силы необходимо выбрать систему координатных осей $Oxyz$, по отношению к которой будет определяться направление силы в пространстве. В механике мы будем пользоваться правой системой координат, т. е. такой системой, в которой кратчайшее совмещение оси Ox с осью Oy происходит, если смотреть с положительного конца оси Oz, против хода часовой стрелки (рис. 23).

Вектор, изображающий силу $\boldsymbol{F}$, можно построить, если известны модуль этой силы F и углы α, β, γ, которые сила образует с данными

осями координат. Задание величин F, α, β, γ и определяет данную силу $\boldsymbol{F}$. Точка A приложения силы должна быть задана дополнительно ее координатами x, y, z.

Для решения задач статики оказывается более удобным задавать силу ее проекциями. Покажем, что сила $\boldsymbol{F}$ будет задана, если будут известны ее проекции F_x, F_y, F_z на оси прямоугольной декартовой системы координат. В самом деле, из формулы (4) следует, что

$$F_x = F\cos\alpha, \qquad F_y = F\cos\beta, \qquad F_z = F\cos\gamma.$$

Возводя эти равенства почленно в квадрат и складывая их, получим $F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 = F^2$, так как $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. В результате найдем:

$$\left.\begin{aligned} F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}; \\ \cos\alpha = \frac{F_x}{F}, \quad \cos\beta = \frac{F_y}{F}, \quad \cos\gamma = \frac{F_z}{F}. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Формулы (6) позволяют, зная проекции силы на оси координат, найти ее модуль и углы с осями, т. е. определить силу. Заметим, что в первой из этих формул перед корнем всегда берется знак плюс, так как формула определяет *модуль* силы.

Если силу $\boldsymbol{F}$ разложить по направлениям, параллельным координатным осям (см. рис. 23), то полученные *составляющие* $\boldsymbol{F}_x$, $\boldsymbol{F}_y$, $\boldsymbol{F}_z$ будут численно равны проекциям силы на соответствующие оси. Отсюда следует, что если известны проекции силы на оси координат, то вектор силы можно построить геометрически, пользуясь правилом параллелепипеда.

В случае, когда все рассматриваемые силы расположены в одной плоскости, каждую из сил можно задать ее проекциями на две оси Ox и Oy. Тогда формулы, определяющие силу по ее проекциям, примут вид:

$$\left.\begin{aligned} F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}, \\ \cos\alpha = \frac{F_x}{F}, \quad \cos\beta = \frac{F_y}{F}. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

В этом случае сила, если известны ее проекции, может быть построена геометрически по правилу параллелограмма.

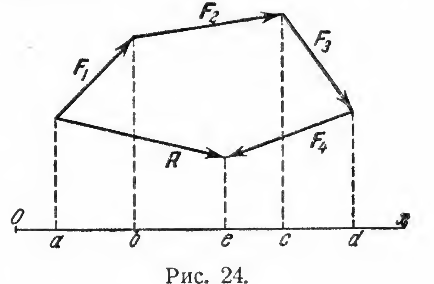


Рис. 24.



§ 10. Аналитический способ сложения сил. Переход от зависимостей между векторами к зависимостям между их проекциями осуществляется с помощью следующей теоремы геометрии: ***проекция вектора суммы на какую-нибудь ось равна алгебраической сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось.*** Отсюда, так как

сила есть вектор, следует, что если, например, $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3+\boldsymbol{F}_4$ (рис. 24), то

$$R_x=F_{1x}+F_{2x}+F_{3x}+F_{4x},$$

где

$$F_{1x}=ab,\ F_{2x}=bc,\ F_{3x}=cd,\ F_{4x}=-de,\ R_x=ae.$$

Для любой системы сил $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$, обозначая их сумму (главный вектор) через $\boldsymbol{R}$, где $\boldsymbol{R}=\sum \boldsymbol{F}_k$, будем согласно этой теореме иметь:

$$R_x=\sum F_{kx},\ R_y=\sum F_{ky},\ R_z=\sum F_{kz}. \tag{8}$$

Зная R_x, R_y и R_z, по формулам (6) находим:

$$\left.\begin{aligned} &R=\sqrt{R_x^2+R_y^2+R_z^2}\,; \\ &\cos\alpha=\frac{R_x}{R},\quad \cos\beta=\frac{R_y}{R},\quad \cos\gamma=\frac{R_z}{R}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Формулы (8), (9) и позволяют решить задачу о сложении сил аналитически.

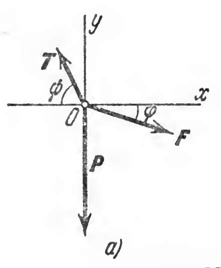
Для сил, расположенных в одной плоскости, соответствующие формулы принимают вид

$$\left.\begin{aligned} &R_x=\sum F_{kx},\quad R_y=\sum F_{ky}; \\ &R=\sqrt{R_x^2+R_y^2},\quad \cos\alpha=\frac{R_x}{R},\quad \cos\beta=\frac{R_y}{R}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Если силы заданы их модулями и углами с осями, то для применения аналитического метода сложения надо предварительно вычислить проекции этих сил на оси координат.

Задача 4. Определить сумму трех сил $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{F}$, проекции которых на оси координат равны:

$$P_x=6\ н,\ \ P_y=3\ н,\ \ P_z=12\ н;\ \ Q_x=3\ н,\ \ Q_y=-7\ н,\ \ Q_z=1\ н;$$
$$F_x=5\ н,\ \ F_y=2\ н,\ \ F_z=-8\ н.$$





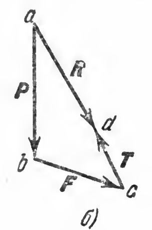


Рис. 25.

Решение. По формулам (8) находим:

$$R_x=6+3+5=14\ н,$$
$$R_y=3-7+2=-2\ н,$$
$$R_z=12+1-8=5\ н.$$

Подставляя эти значения в равенства (9), получим:

$$R=\sqrt{14^2+(-2)^2+5^2}=15\ н,$$
$$\cos\alpha=\frac{14}{15},\ \ \cos\beta=-\frac{2}{15},$$
$$\cos\gamma=\frac{1}{3}.$$

Окончательно: $R=15\ н$, $\alpha=21^\circ$, $\beta=97^\circ 40'$, $\gamma=70^\circ 30'$.

Задача 5. Найти равнодействующую трех лежащих в одной плоскости сил (рис. 25, *а*), если дано:

$$F = 17{,}32\ \kappa\Gamma,\ T = 10\ \kappa\Gamma,\ P = 24\ \kappa\Gamma,\ \varphi = 30°,\ \psi = 60°.$$

Решение. Вычисляем проекции заданных сил на оси координат:

$$F_x = F\cos\varphi = 15\ \kappa\Gamma,\ T_x = -T\cos\psi = -5\ \kappa\Gamma,\ P_x = 0;$$

$$F_y = -F\sin\varphi = -8{,}66\ \kappa\Gamma;\quad T_y = T\sin\psi = 8{,}66\ \kappa\Gamma;\quad P_y = -P = -24\ \kappa\Gamma.$$

Тогда по формулам (10):

$$R_x = 15 - 5 = 10\ \kappa\Gamma;\quad R_y = -8{,}66 + 8{,}66 - 24 = -24\ \kappa\Gamma.$$

Следовательно,

$$R = \sqrt{10^2 + (-24)^2} = 26\ \kappa\Gamma;\quad \cos\alpha = \frac{5}{13},\quad \cos\beta = -\frac{12}{13}.$$

Окончательно $R = 26\ \kappa\Gamma$, $\alpha = 67°20'$, $\beta = 157°20'$.

Для решения той же задачи геометрическим методом надо, выбрав соответствующий масштаб (например, в 1 *см* 10 *кГ*), построить из сил $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{T}$ силовой многоугольник (рис. 25, *б*). Его замыкающая $\overline{ad}$ и определяет в данном масштабе модуль и направление $\boldsymbol{R}$. Если, например, при измерении получим $ad \approx 2{,}5$ *см*, то, следовательно, $R \approx 25$ *кГ* с ошибкой по отношению к точному решению около 4%.

§ 11. Равновесие системы сходящихся сил. Из законов механики следует, что твердое тело, на которое действуют взаимно уравновешенные внешние силы, может не только находиться в покое, но и совершать движение, которое мы назовем движением «по инерции». Таким движением будет, например, поступательное равномерное и прямолинейное движение тела.

Отсюда получаем два важных вывода. 1) Условиям равновесия статики удовлетворяют силы, действующие как на покоящееся тело, так и на тело, движущееся «по инерции» (см. задачу 6). 2) Уравновешенность сил, приложенных к свободному твердому телу, является необходимым, но не достаточным условием равновесия (покоя) самого тела; в покое тело будет при этом находиться лишь в том случае, если оно было в покое и до момента приложения к нему уравновешенных сил.

Для равновесия приложенной к твердому телу системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая этих сил была равна нулю. Условия, которым при этом должны удовлетворять сами силы, можно выразить в геометрической или аналитической форме.

1. Геометрическое условие равновесия. Так как равнодействующая $\boldsymbol{R}$ сходящихся сил определяется как замыкающая сторона силового многоугольника, построенного из этих сил, то $\boldsymbol{R}$ может обратиться в нуль тогда и только тогда, когда конец последней силы в многоугольнике совпадает с началом первой, т. е. когда многоугольник замкнется.

Следовательно, *для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный из этих сил, был замкнут.*

2. Аналитические условия равновесия. Аналитически равнодействующая системы сходящихся сил определяется формулой

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}.$$

Так как под корнем стоит сумма положительных слагаемых, то R обратится в нуль только тогда, когда одновременно $R_x = 0$, $R_y = 0$, $R_z = 0$, т. е. как это следует из формул (8), когда действующие на тело силы будут удовлетворять равенствам:

$$\sum F_{kx} = 0, \ \sum F_{ky} = 0, \ \sum F_{kz} = 0. \tag{11}$$

Равенства (11) выражают условия равновесия в аналитической форме: *для равновесия пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил на каждую из трех координатных осей были равны нулю.*

Если все действующие на тело сходящиеся силы лежат в одной плоскости, то они образуют *плоскую систему сходящихся сил.* В случае плоской системы сходящихся сил получим, очевидно, только два условия равновесия

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0. \tag{12}$$

Равенства (11) и (12) выражают также *необходимые* условия (или уравнения) равновесия свободного твердого тела, находящегося под действием сходящихся сил.

3. Теорема о трех силах. При решении задач статики иногда удобно пользоваться следующей теоремой: *если свободное твердое тело находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.*

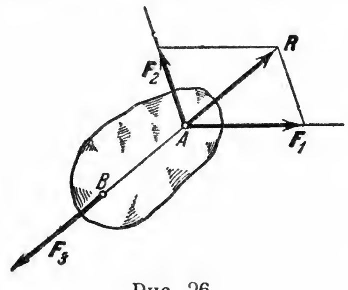


Рис. 26.

Для доказательства теоремы изобразим сначала какие-нибудь две из действующих на тело сил, например $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$. Так как по условиям теоремы эти силы лежат в одной плоскости и не параллельны, то их линии действия будут пересекаться в некоторой точке A (рис. 26). Приложим силы $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ в этой точке и заменим их равнодействующей $\boldsymbol{R}$. Тогда на тело будут действовать две силы: сила $\boldsymbol{R}$ и сила $\boldsymbol{F}_3$, приложенная в какой-то точке B тела. Если тело при этом находится в равновесии, то по аксиоме 1 силы $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{F}_3$ должны быть направлены

по одной прямой, т. е. вдоль AB. Следовательно, сила F_3 тоже проходит через точку A, что и требовалось доказать.

Заметим, что обратная теорема не имеет места, т. е. если линии действия трех сил пересекаются в одной точке, то тело под действием этих сил может и не находиться в равновесии. Следовательно, доказанная теорема выражает *необходимое, но не достаточное* условие равновесия свободного твердого тела под действием трех сил.

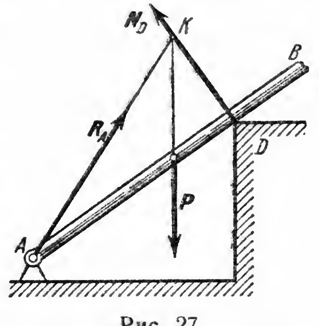


Рис. 27.

Пример. Брус AB, закрепленный в точке A шарниром и опирающийся на выступ D (рис. 27), можно рассматривать как свободный, отбросив связи и заменив их соответствующими реакциями. Тогда брус будет в равновесии под действием трех сил $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{N}_D$ и $\boldsymbol{R}_A$, линии действия которых по доказанной теореме должны пересекаться в одной точке. Но линии действия сил $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{N}_D$ известны; они пересекаются в точке K. Следовательно, реакция $\boldsymbol{R}_A$ шарнира, приложенная в точке A, также должна проходить через точку K, т. е. должна быть направлена вдоль прямой AK. Теорема о трех силах позволила в этом случае определить заранее неизвестное направление реакции шарнира A.

§ 12. Системы статически определимые и статически неопределимые. При решении задач о равновесии несвободного твердого тела реакции наложенных связей являются величинами, наперед неизвестными. Число этих неизвестных зависит от числа и характера наложенных связей. Соответствующая задача статики может быть решена только в том случае, когда для нее число неизвестных реакций связей не превышает числа уравнений равновесия, содержащих эти реакции. Такие задачи называются *статически определенными*, а системы тел, для которых это имеет место, — *статически определимыми системами.*

Задачи, в которых число неизвестных реакций связей больше числа уравнений равновесия, содержащих эти реакции, называются *статически неопределенными*, а системы тел, для которых это имеет место, — *статически неопределимыми системами.*

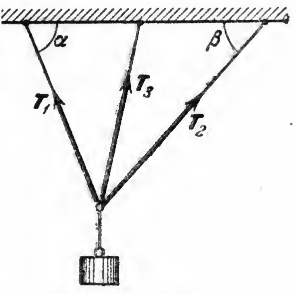


Рис. 28.

Примером статически неопределимой системы может служить груз, подвешенный на трех нитях, лежащих в одной плоскости (рис. 28). Неизвестных величин в этой задаче три (натяжения нитей T_1, T_2 и T_3), а уравнений равновесия в случае плоской системы сходящихся сил мы можем составить только два [формулы (12)]. Другие примеры статически неопределимых систем приведены в § 25.

Очевидно, статическая неопределимость появляется от наложения лишних связей. В данном примере, чтобы при произвольных углах α и β обеспечить равновесие, достаточно подвесить груз на двух нитях (см. задачу 2, рис. 19), третья нить для обеспечения равновесия не нужна.

В дальнейшем мы будем рассматривать только статически определимые системы, т. е. такие, для которых число неизвестных реакций связей равно числу уравнений равновесия, содержащих эти реакции. Для расчета статически неопределимых систем нужно отказаться от предположения, что входящие в них тела можно считать абсолютно твердыми, и учесть их деформации. Такого рода задачи решаются в курсах сопротивления материалов или статики сооружений.

§ 13. Решение задач статики. Решаемые методами статики задачи могут быть одного из следующих двух типов: 1) задачи, в которых известны (полностью или частично) действующие на тело силы и требуется найти, в каком положении или при каких соотношениях между действующими силами тело будет в равновесии (задачи 6, 7); 2) задачи, в которых известно, что тело заведомо находится в равновесии (или движется «по инерции»), и требуется найти, чему равны при этом все или некоторые из действующих на тело сил (задачи 8, 9, 10 и др.). Реакции связей являются величинами, наперед неизвестными во всех задачах статики.

При инженерных расчетах в результате решения задач статики определяются условия равновесия конструкции (если она не закреплена наложенными связями жестко), а также давления на опоры или усилия в тех или иных частях конструкции при ее равновесии. Так как рассматриваемая конструкция представляет собою совокупность ряда связанных друг с другом тел, то приступая к решению задачи, надо прежде всего *установить, равновесие какого именно тела следует рассмотреть, чтобы найти искомые величины.*

Весь процесс решения сводится к следующим операциям:

1. Выбор тела, равновесие которого должно быть рассмотрено. Для решения задачи надо рассмотреть равновесие тела, к которому приложены заданные и искомые силы или силы, равные искомым (например, если надо найти давление на опору, то можно рассмотреть равновесие тела, к которому приложена равная этой силе реакция опоры, и т. п.).

Когда заданные силы действуют на одно тело, а искомые на другое, может оказаться необходимым рассмотреть последовательно равновесие каждого тела в отдельности, а иногда и равновесие промежуточных тел.

2. Освобождение тела от связей и изображение действующих на него заданных сил и реакций отброшенных связей. Тело, освобожденное от связей, следует изо-

бражать отдельно[1]) (как на рис. 12, *б*). При изображении реакций связей надо иметь в виду все, сказанное о них в § 4.

3. Составление условий равновесия. Вид этих условий зависит от того, какая система сил будет действовать на рассматриваемое тело, после его освобождения от связей, и какой метод решения (геометрический или аналитический) применяется. Об особенностях составления условий равновесия для разных систем сил будет сказано в соответствующих местах курса.

4. Определение искомых величин, проверка правильности решения и исследование полученных результатов.

Важное значение в процессе решения имеет аккуратный чертеж (он помогает быстрее найти правильный путь решения и избежать ошибок при составлении условий равновесия) и последовательное проведение всех выкладок.

Все расчеты при решении задач рекомендуется, как правило, производить в общем виде (алгебраически). Тогда для искомых величин будут получаться формулы, дающие возможность проанализировать найденные результаты. Кроме того, решение в общем виде позволяет иногда обнаружить сделанные ошибки путем проверки размерностей (размерности каждого из слагаемых в обеих частях равенства должны быть одинаковыми). Числа, если решение производится в общем виде, подставляются только в окончательные результаты.

В этом параграфе мы рассмотрим задачи на равновесие тела под действием сходящихся сил. Для их решения можно пользоваться геометрическим или аналитическим методом.

а) Геометрический метод. Им удобнее пользоваться, когда общее число действующих на тело сил (и заданных и искомых) равно трем. При равновесии треугольник, построенный из этих сил, должен быть замкнутым (построение следует начинать с заданной силы). Решая этот треугольник, найдем искомые величины.

б) Аналитический метод. Им можно пользоваться при любом числе приложенных сил. Для составления условий равновесия, которых в случае плоской системы сходящихся сил будет два (формулы 12), а в случае пространственной системы три (формулы 11), надо сначала выбрать оси координат. Этот выбор можно производить произвольно, но полученные уравнения будут решаться проще, если *одну из осей направить перпендикулярно какой-либо неизвестной силе.* Прежде чем составлять условия равновесия, рекомендуется

---

[1]) Когда будет приобретен достаточный навык, можно тело, равновесие которого рассматривается, выделять из конструкции мысленно и рисовать все действующие на него (и только на него) заданные силы и реакции связей на общем чертеже (как на рис. 31). Однако, если окажется необходимым рассмотреть равновесие еще одного из тел конструкции, это тело лучше выделить и изобразить на отдельном рисунке.

на первых порах вычислять проекции всех сил на выбранные координатные оси, внося их в отдельную таблицу (см. задачи 6, 10, 11).

Ряд дополнительных указаний дается в ходе решения рассматриваемых ниже задач.

Задача 6. Груз весом P лежит на гладкой наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом (рис. 29, *а*). Определить величину силы F, параллельной плоскости, которую надо приложить к грузу, чтобы удержать его в равновесии, и найти, чему при этом равна сила давления Q груза на плоскость.

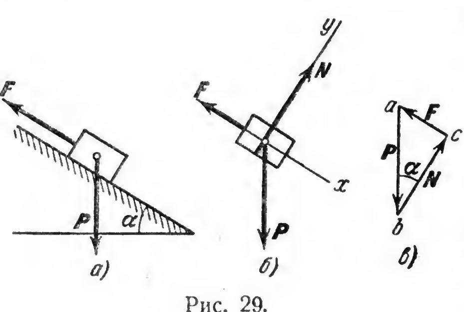


Рис. 29.

Решение. Искомые силы действуют на разные тела: сила $\boldsymbol{F}$ на груз, сила $\boldsymbol{Q}$ — на плоскость. Для решения задачи вместо силы $\boldsymbol{Q}$ будем искать равную ей по модулю, но противоположно направленную реакцию плоскости N. Тогда и заданная сила $\boldsymbol{P}$ и искомые силы $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{N}$ будут действовать на груз, т. е. на одно и то же тело. Рассмотрим равновесие груза. Мысленно отбросив связь (плоскость), рассматриваем груз как свободный (рис. 29, *б*) и изображаем действующие на него активные силы $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{F}$ и реакцию связи N. Для определения искомых сил можно воспользоваться геометрическим или аналитическими условиями равновесия свободного твердого тела. Рассмотрим оба способа решения.

Геометрический способ. При равновесии треугольник, построенный из сил $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{F}$ и N, должен быть замкнутым. Построение треугольника начинаем с заданной силы. От произвольной точки a в выбранном масштабе откладываем силу $\boldsymbol{P}$ (рис. 29, *в*). Через начало и конец этой силы проводим прямые, параллельные направлениям сил $\boldsymbol{F}$ и N. Точка пересечения этих прямых дает третью вершину c замкнутого силового треугольника abc, в котором стороны bc и ca будут равны в выбранном масштабе искомым силам. Направление сил определяется правилом стрелок: так как здесь равнодействующая равна нулю, то при обходе треугольника острия стрелок нигде не должны встречаться в одной точке.

Модули искомых сил можно из треугольника abc найти и путем численного расчета (в этом случае соблюдать масштаб при изображении сил не надо). Замечая, что $\angle bca = 90°$, а $\angle abc = \alpha$, получим

$$F = P \sin\alpha, \quad N = P \cos\alpha.$$

Аналитический способ. Так как система действующих сил является плоской, выбираем две оси координат, причем для упрощения расчетов ось Ox проводим перпендикулярно неизвестной силе N. Вычисляем проекции этих сил на оси x, y (см. таблицу [1])):

---

[1]) Таблицу следует заполнять по столбцам, т. е. сначала вычислить проекции на обе оси силы $\boldsymbol{P}$, затем силы $\boldsymbol{F}$ и т. д. Предварительное составление таких таблиц уменьшает вероятность ошибок в уравнениях и особенно полезно на первых порах, пока не будет приобретен достаточный навык в проектировании сил.

F_k	P	F	N
F_{kx}	$P \sin \alpha$	$-F$	0
F_{ky}	$-P \cos \alpha$	0	N

и, пользуясь условиями равновесия (12), составляем уравнения:

$$P \sin \alpha - F = 0, \quad -P \cos \alpha + N = 0.$$

Благодаря удачному выбору осей x, y каждое из уравнений содержит только по одному неизвестному. Решая эти уравнения, получим

$$F = P \sin \alpha, \quad N = P \cos \alpha.$$

Искомое давление груза на плоскость равно по модулю найденной силе $N = P \cos \alpha$, но направлено в противоположную сторону.

Заметим, что для удержания груза на наклонной плоскости надо приложить силу F, меньшую чем вес груза P. Таким образом наклонная плоскость представляет собой простейшую машину, позволяющую меньшей силой уравновесить бóльшую.

Как было указано в начале § 11, полученные результаты справедливы не только при покое тела, но и при его движении «по инерции». Следовательно, чтобы двигать груз равномерно вверх по данной гладкой плоскости, к нему надо приложить такую же силу $F = P \sin \alpha$, которая нужна для удержания груза в равновесии; точно так же с силой $F = P \sin \alpha$ надо притормаживать груз, если мы хотим, чтобы он равномерно опускался вдоль плоскости вниз. Чтобы груз совершал одно из этих движений, ему надо дополнительно сообщить соответствующую начальную скорость. Если такая скорость не будет сообщена, то груз при действии силы $F = P \sin \alpha$ будет находиться в покое. Давление на плоскость во всех случаях равно $P \cos \alpha$.

Из рассмотренного примера следует один общий вывод: *в задачах статики, решаемых с помощью уравнений равновесия, вместо сил давления тела на связи находятся равные им по модулю, но противоположно направленные реакции этих связей.* При решении же задач способом разложения (§ 7) непосредственно находятся сами силы давления на связи.

Задача 7. Стержень AB прикреплен к неподвижной опоре шарниром A (рис. 30, a). К концу B стержня подвешен груз весом $P = 10$ *кГ* и прикреплена

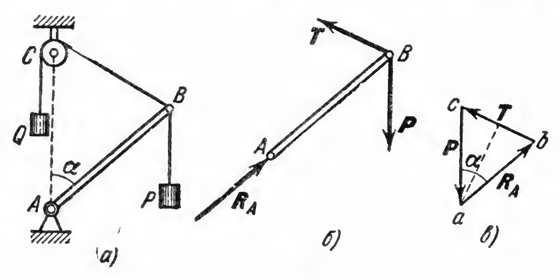


Рис. 30.

нить. Нить перекинута через блок C, и к ней подвешен груз весом $Q = 14{,}1$ *кГ*. Оси блока C и шарнира A расположены на одной вертикали, причем $AC = AB$.

Найти, при каком угле α система будет в равновесии и чему при этом равно усилие в стержне AB; весом стержня и размером блока пренебречь.

Решение. Рассмотрим равновесие стержня AB, к которому приложены все данные и искомые силы. Отбросив связи и рассматривая стержень как свободный (рис. 30, *б*), изображаем действующие на него силы: силу $\boldsymbol{P}$, равную весу груза, натяжение нити $\boldsymbol{T}$ и реакцию шарнира $\boldsymbol{R}_A$, направленную вдоль AB, так как стержень в данном случае может работать только на растяжение или сжатие (см. § 4). Если трением нити о блок можно пренебречь, то натяжение нити, перекинутой через блок, при равновесии будет всюду одинаково; следовательно, $T = Q$.

Применяя геометрический способ решения, строим из сил $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{T}$ и $\boldsymbol{R}_A$ замкнутый силовой треугольник cab (рис. 30, *в*), начиная с силы $\boldsymbol{P}$. Из подобия треугольников abc и ABC находим, что $ca = ab$ и $\angle\ cab = \alpha$. Следовательно,

$$R_A = P, \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{Q}{2P},$$

так как $T = Q = 2P\sin\frac{\alpha}{2}$.

Из полученных результатов следует, что при $\alpha < 180°$ равновесие возможно только, если $Q < 2P$. Стержень при этом будет сжат с силой, равной P, независимо от величины груза Q и угла α.

Случай, когда $\alpha = 180°$, должен быть рассмотрен отдельно. Легко видеть, что в этом случае равновесие возможно при любых значениях P и Q. При этом, если $P > Q$, то стержень будет растягиваться с силой, равной $P - Q$, если же $Q > P$, то стержень будет сжиматься с силой, равной $Q - P$.

При численных данных задачи получим $R_A = 10$ *кГ*, $\alpha = 90°$ (стержень горизонтален).

Обращаем внимание на то, что сила тяжести $\boldsymbol{Q}$ непосредственно в условие равновесия (в силовой треугольник) не вошла, так как эта сила приложена к грузу, а не к стержню AB, равновесие которого рассматривалось.

В дальнейшем, для уменьшения числа чертежей, тело, равновесие которого рассматривается, мы не будем изображать отдельно (как свободное); однако при изображении действующих сил его всегда надо мысленно представлять себе свободным, т. е. в таком виде, как на рис. 29, *б*, 30, *б*, или 12, *б*.

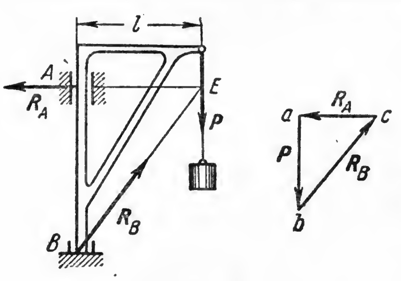


Рис. 31.

Задача 8. Кран, закрепленный цилиндрическим подшипником A и подпятником B, несет нагрузку P (рис. 31). Пренебрегая весом конструкции, определить реакции опор R_A и R_B, если вылет крана равен l и $AB = h$.

Решение. Рассмотрим равновесие всего крана, так как к нему приложены данная и искомые силы. Мысленно отбросив связи (подшипник A и подпятник B) и считая кран свободным, изображаем действующую на него заданную силу $\boldsymbol{P}$ и реакцию подшипника $\boldsymbol{R}_A$, направленную перпендикулярно оси AB. Реакция подпятника $\boldsymbol{R}_B$ может иметь любое направление в плоскости чертежа. Но кран находится в равновесии под действием трех сил;

следовательно, их линии действия должны пересекаться в одной точке. Такой точкой является точка E, где пересекаются линии действия сил $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{R}_A$. Таким образом реакция $\boldsymbol{R}_B$ будет направлена вдоль BE.

Применяя геометрический способ решения, строим из сил $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{R}_A$ и $\boldsymbol{R}_B$ замкнутый треугольник abc, начиная построение с заданной силы $\boldsymbol{P}$. Из подобия треугольников abc и ABE находим:

$$\frac{R_A}{P}=\frac{l}{h}, \quad \frac{R_B}{P}=\frac{\sqrt{h^2+l^2}}{h},$$

откуда

$$R_A=\frac{l}{h}P, \quad R_B=\sqrt{1+\frac{l^2}{h^2}}\,P.$$

Из треугольника abc видно, что направления реакций $\boldsymbol{R}_A$ и $\boldsymbol{R}_B$ показаны на чертеже правильно. Давления на подшипник A и подпятник B будут численно равны R_A и R_B, но направлены противоположно реакциям. Величины этих давлений будут тем больше, чем больше отношение l/h.

Рассмотренная задача дает пример использования теоремы о трех силах.

Отметим следующий вывод: *если в задаче даются линейные размеры частей конструкции, то при решении силового треугольника удобнее пользоваться подобием; если задаются углы* (задача 6), *то целесообразнее применять тригонометрические формулы.*

Задача 9. К шарниру A коленчатого пресса приложена горизонтальная сила $\boldsymbol{P}$ (рис. 32, *а*). Пренебрегая весом стержней и поршня, определить силу давления поршня на тело M при данных углах α и β.

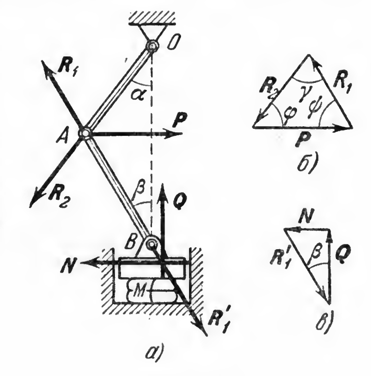


Рис. 32.

Р е ш е н и е. Рассмотрим сначала равновесие шарнира A, к которому приложена единственная заданная сила $\boldsymbol{P}$. На ось шарнира, если ее рассматривать как свободную, кроме силы $\boldsymbol{P}$, будут действовать реакции стержней $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$, направленные вдоль стержней. Строим силовой треугольник (рис. 32, *б*). Углы в нем равны: $\varphi=90°-\alpha$, $\psi=90°-\beta$, $\gamma=\alpha+\beta$. Пользуясь теоремой синусов, получим:

$$\frac{R_1}{\sin\varphi}=\frac{P}{\sin\gamma}, \quad R_1=\frac{P\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Теперь рассмотрим равновесие поршня. На поршень, если его рассматривать как свободный, действуют тоже три силы: давление $\boldsymbol{R}'_1=-\boldsymbol{R}_1$ стержня AB, реакция $\boldsymbol{N}$ стенки и реакция $\boldsymbol{Q}$ прессуемого тела. Так как сил три, то они при равновесии должны быть сходящимися.

Строя из этих сил силовой треугольник (рис. 32, *в*), находим из него

$$Q=R'_1\cos\beta.$$

Подставляя вместо R'_1 равную ей величину R_1, получаем окончательно

$$Q=\frac{P\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{P}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}.$$

Сила давления поршня на тело M равна по модулю Q и направлена в

противоположную сторону. Из последней формулы видно, что при одной и той же силе P давление Q будет возрастать с уменьшением углов α и β.

Если длины стержней OA и AB одинаковы, то $\alpha=\beta$ и $Q=0{,}5P\ \mathrm{ctg}\ \alpha$.

Из решения следует вывод: ***в некоторых задачах заданная сила (или заданные силы) может быть приложена к одному телу, а искомая (или искомые) — к другому; в таких случаях надо сначала рассмотреть равновесие первого тела и определить силу, с которой оно действует на другое, а затем перейти к рассмотрению второго тела и определить искомые величины.***

Задача 10. На кронштейне, состоящем из стержней AB и BC, скрепленных друг с другом и со стеной шарнирами, укреплен в точке B блок (рис. 33, *а*). Через блок перекинута нить, один конец которой привязан к стене, а на другом подвешен груз весом Q. Определить реакции стержней, пренебрегая их весом и размерами блока. Углы α и β заданы.

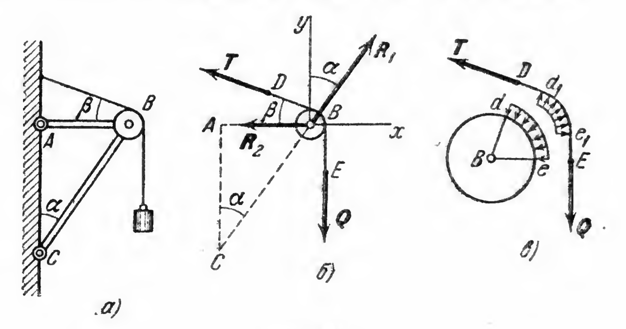


Рис. 33.

Решение. Рассмотрим равновесие блока с прилегающим к нему отрезком DE нити [1]); отбросим связи и заменим их соответствующими реакциями (рис. 33, *б*). Тогда на блок с отрезком нити будут действовать четыре внешние силы: натяжение правой ветви нити, равное $\boldsymbol{Q}$, натяжение левой ветви нити $\boldsymbol{T}$, по численной величине тоже равное Q $(T=Q)$ и реакции стержней $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$, направленные вдоль стержней. Силы, пренебрегая размерами блока, считаем сходящимися. Так как число их больше трех, удобнее применить аналитический способ решения. Проводим оси координат, как показано на чертеже, и вычисляем проекции всех сил на эти оси (см. таблицу).

F_k	Q	T	R_1	R_2
F_{kx}	0	$-T\cos\beta$	$R_1\sin\alpha$	$-R_2$
F_{ky}	$-Q$	$T\sin\beta$	$R_1\cos\alpha$	0

[1]) В подобных случаях целесообразно рассматривать блок вместе с прилегающим к нему отрезком нити как одно тело. Тогда заранее неизвестные взаимные давления нити и блока, распределенные по дуге de, образуют си-

Затем, пользуясь условиями равновесия (12), составляем соответствующие уравнения, заменяя одновременно T равной ей величиной Q; получаем:

$$-Q\cos\beta + R_1\sin\alpha - R_2 = 0;$$
$$-Q + Q\sin\beta + R_1\cos\alpha = 0.$$

Из второго уравнения находим:

$$R_1 = \frac{1-\sin\beta}{\cos\alpha}Q.$$

Подставляя это значение в первое уравнение, после преобразования получаем:

$$R_2 = Q\,\frac{\sin\alpha - \cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha}.$$

Из выражения для R_1 следует, что при любых острых углах α и β $R_1 > 0$. Это означает, что реакция $\boldsymbol{R}_1$ направлена всегда так, как показано на чертеже. Сила же давления блока на стержень направлена в противоположную сторону (стержень BC сжат). Для $\boldsymbol{R}_2$ получаем другой результат. Будем считать углы α и β всегда острыми. Так как

$$\sin\alpha - \cos(\alpha-\beta) = \sin\alpha - \sin(90° - \alpha + \beta),$$

то эта разность будет положительная, если $\alpha > (90° - \alpha + \beta)$ или когда $2\alpha > 90° + \beta$. Отсюда следует, что при $\alpha > (45° + \beta/2)$ величина $R_2 > 0$, т. е. реакция $\boldsymbol{R}_2$ имеет направление, изображенное на чертеже; если же $\alpha < (45° + \beta/2)$, то $R_2 < 0$, т. е. реакция $\boldsymbol{R}_2$ имеет противоположное направление (от A к B). При этом стержень AB в первом случае растянут, а во втором сжат. Когда $\alpha = 45° + \beta/2$, получаем $R_2 = 0$.

Обращаем внимание на следующие выводы: 1) Если в систему входят блоки с перекинутыми через них нитями, то при составлении условий равновесия *блок следует рассматривать вместе с прилегающим к нему отрезком нити как одно тело*. При этом, если трением нити о блок или трением в оси блока пренебречь, то *натяжения на обоих концах нити будут по модулю равны и направлены от блока* (иначе нить скользила бы в сторону большего натяжения или блок вращался бы; см. еще задачу 13).

2) *Если при изображении реакций связей какая-нибудь из них окажется направленной не в ту сторону, куда она фактически действует, то при геометрическом решении это непосредственно обнаружится из силового многоугольника (правило стрелок), а при аналитическом решении величина соответствующей реакции получится отрицательной.*

Однако во всех случаях, когда это можно наперед сделать, следует реакции связей сразу направлять верно. Например, в задаче 8 направление реакции подшипника A устанавливается следующими рассуждениями: если убрать подшипник, то кран под действием силы $\boldsymbol{P}$ начнет падать вправо; следовательно, сила $\boldsymbol{R}_A$, заменяющая действие подшипника, чтобы удержать кран в равновесии, должна быть направлена влево.

стему уравновешенных внутренних сил и в условия равновесия не войдут (см. § 3, следствие из аксиомы 4). Если же рассматривать блок отдельно (рис. 33, *в*; масштаб изображения на нем изменен), то на блок будут действовать распределенные по дуге de силы давления нити, равнодействующую которых надо искать, рассматривая дополнительно условия равновесия отрезка нити DE (пользуясь принципом отвердевания), что удлиняет расчет.

Задача 11. Вертикальный столб OA, стоящий на земле, удерживается растяжками AB и AD, образующими со столбом равные углы $\alpha = 30°$; угол между плоскостями AOB и AOD равен $\varphi = 60°$ (рис. 34). К столбу подвешены параллельно осям Ox и Oy два взаимно перпендикулярных горизонтальных провода, натянутых с силой $P = 100$ *кГ* каждый. Найти вертикальное давление на столб и усилия в тросах, пренебрегая их весами.

F_k	P_1	P_2	R_1	R_2	R_3
F_{kx}	0	$-P$	0	0	$R_3 \sin\alpha \sin\varphi$
F_{ky}	$-P$	0	0	$R_2 \sin\alpha$	$R_3 \sin\alpha\cos\varphi$
F_{kz}	0	0	R_1	$-R_2\cos\alpha$	$-R_3\cos\alpha$

Решение. Рассмотрим равновесие узла A, к которому прикреплены провода и тросы. На него действуют силы натяжения проводов $\boldsymbol{P}_1$ и $\boldsymbol{P}_2$ ($P_1 = P_2 = P$), реакции растяжек $\boldsymbol{R}_2$ и $\boldsymbol{R}_3$ и реакция столба $\boldsymbol{R}_1$. Система сил оказалась пространственной. В этом случае будем пользоваться только аналитическим способом решения. Проводим оси координат (см. чертеж) и вычисляем проекции всех сил на эти оси, нанося их в таблицу (проекции силы $\boldsymbol{R}_3$ на оси x и y вычисляем так, как это было указано в конце § 8).

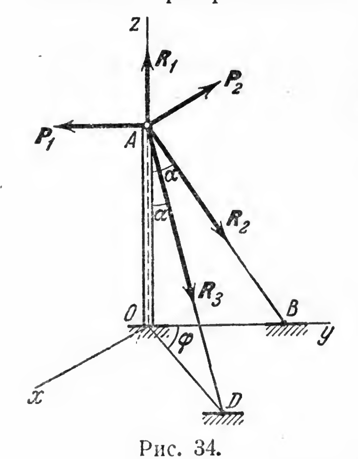


Рис. 34.

Теперь, пользуясь условиями равновесия (11), составляем уравнения:

$$-P + R_3\sin\alpha\sin\varphi = 0,$$
$$-P + R_2\sin\alpha + R_3\sin\alpha\cos\varphi = 0,$$
$$R_1 - R_2\cos\alpha - R_3\cos\alpha = 0.$$

Решая эти уравнения, найдем:

$$R_3 = \frac{P}{\sin\alpha\sin\varphi}, \quad R_2 = P\frac{1-\operatorname{ctg}\varphi}{\sin\alpha},$$
$$R_1 = P\left(1 + \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)\operatorname{ctg}\alpha.$$

Из полученных результатов видно, что при $\varphi < 45°$ величина $R_2 < 0$ и реакция $\boldsymbol{R}_2$ имеет направление, противоположное показанному на чертеже. Так как трос не может работать на сжатие, то, следовательно, растяжку AD надо располагать так, чтобы угол φ был больше 45°. При численных данных задачи получим:

$$R_3 = 231 \text{ кГ}, \; R_2 = 85 \text{ кГ}, \; R_1 = 273 \text{ кГ}.$$

§ 14. Момент силы относительно центра (или точки). Опыт показывает, что под действием силы твердое тело может наряду с поступательным перемещением совершать вращение вокруг того или

иного центра. Вращательный эффект силы характеризуется ее *моментом.*

Рассмотрим силу $\boldsymbol{F}$, приложенную в точке A твердого тела (рис. 35). Допустим, что сила стремится повернуть тело вокруг центра O. Перпендикуляр h, опущенный из центра O на линию действия силы $\boldsymbol{F}$, называется *плечом* силы $\boldsymbol{F}$ относительно центра O. Так как точку приложения силы можно произвольно перемещать вдоль линии действия, то, очевидно, вращательный эффект силы будет зависеть: 1) от модуля силы F и длины плеча h; 2) от положения плоскости поворота OAB, проходящей через центр O и силу $\boldsymbol{F}$; 3) от направления поворота в этой плоскости.

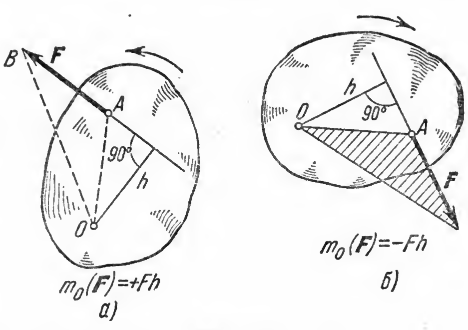


Рис. 35.

Ограничимся пока рассмотрением систем сил, лежащих в одной плоскости. В этом случае плоскость поворота для всех сил является общей и в дополнительном задании не нуждается, а направление поворота можно охарактеризовать знаком, считая условно поворот в каком-нибудь одном направлении положительным, а в направлении противоположном — отрицательным.

Тогда для количественного измерения вращательного эффекта можно ввести следующее понятие о моменте силы: ***моментом силы F относительно центра O называется величина, равная взятому с соответствующим знаком произведению модуля силы на длину плеча.***

Момент силы $\boldsymbol{F}$ относительно центра O будем обозначать символом $m_O(\boldsymbol{F})$. Следовательно,

$$m_O(\boldsymbol{F}) = \pm Fh. \qquad (13)$$

В дальнейшем условимся считать, что момент имеет знак плюс, если сила стремится повернуть тело вокруг центра O против хода часовой стрелки, и знак минус, — если по ходу часовой стрелки. Так, для силы $\boldsymbol{F}$, изображенной на рис. 35, *а*, момент относительно центра O имеет знак плюс, а для силы, показанной на рис. 35, *б*, — знак минус. Если плечо измерять в метрах, то момент силы будет измеряться или в ньютонах на метр (*нм*) или же в килограммометрах (*кГм*).

Отметим следующие свойства момента силы:

1) Момент силы не изменяется при переносе точки приложения силы вдоль ее линии действия.

2) Момент силы относительно центра O равен нулю только тогда, когда сила равна нулю или когда линия действия силы проходит через центр O (плечо равно нулю).

3) Момент силы численно выражается удвоенной площадью треугольника OAB (рис. 35, *б*)

$$m_O(\boldsymbol{F}) = \pm 2 \text{ пл. } \triangle OAB. \tag{14}$$

Этот результат следует из того, что

$$\text{пл. } \triangle OAB = \frac{1}{2} AB \cdot h = \frac{1}{2} Fh.$$

§ 15. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей. Докажем следующую теорему Вариньона[1]): *момент равнодействующей плоской системы сходящихся сил относительно любого центра равен алгебраической сумме моментов слагаемых сил относительно того же центра.*

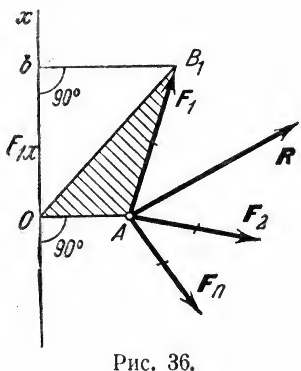


Рис. 36.

Рассмотрим систему сил $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$, сходящихся в точке A (рис. 36). Возьмем произвольный центр O и проведем через него ось Ox, перпендикулярную к прямой OA; положительное направление оси Ox выбираем так, чтобы знак проекции любой из сил на эту ось совпадал со знаком ее момента относительно центра O.

Для доказательства теоремы найдем соответствующие выражения моментов $m_O(\boldsymbol{F}_1)$, $m_O(\boldsymbol{F}_2)$, ... По формуле (14) $m_O(\boldsymbol{F}_1) = +2 \text{ пл. } \triangle OAB_1$. Но, как видно из рисунка, $2 \text{ пл. } \triangle OAB_1 = OA \cdot Ob = OA \cdot F_{1x}$, где F_{1x} — проекция силы F_1 на ось Ox; следовательно,

$$m_O(\boldsymbol{F}_1) = OA \cdot F_{1x}. \tag{15}$$

Аналогично вычисляются моменты всех других сил. При этом формула (15) справедлива и в случае, когда сила $\boldsymbol{F}$ проходит ниже линии OA; момент при этом получится отрицательным, так как будет отрицательна сама проекция F_x.

Обозначим равнодействующую сил $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$ через $\boldsymbol{R}$, где $\boldsymbol{R} = \sum \boldsymbol{F}_k$. Тогда, по теореме о проекции суммы сил на ось, получим $R_x = \sum F_{kx}$. Умножая обе части этого равенства на OA, найдем:

$$OA \cdot R_x = \sum (OA \cdot F_{kx})$$

[1]) П. Вариньон (1654 — 1722) — выдающийся французский ученый, математик и механик. Изложил основы статики в книге «Проект новой механики» (1687).

или, согласно формуле (15),

$$m_O(\boldsymbol{R}) = \sum m_O(\boldsymbol{F}_k). \tag{16}$$

Формула (16) дает математическое выражение теоремы Вариньона.

§ 16*. Уравнения моментов для сходящихся сил. Аналитические условия равновесия сходящихся сил можно выразить не только через проекции этих сил, но и через их моменты. Покажем, что для равновесия плоской системы сходящихся сил необходимо и достаточно выполнения условий:

$$\sum m_B(\boldsymbol{F}_k) = 0, \quad \sum m_C(\boldsymbol{F}_k) = 0, \tag{17}$$

где B и C — любые точки, не лежащие на одной прямой с точкой A, в которой сходятся силы (рис. 37).

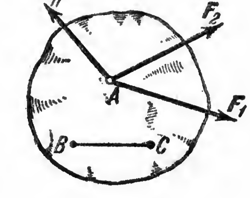


Рис. 37.

Необходимость этих условий очевидна, так как если, например, $\sum m_B(\boldsymbol{F}_k) \neq 0$, то, как видно из (16), $m_B(\boldsymbol{R}) \neq 0$, а значит $\boldsymbol{R} \neq 0$, и равновесие невозможно.

Докажем достаточность этих условий. Если условия (17) выполняются, то по теореме Вариньона $m_B(\boldsymbol{R}) = 0$ и $m_C(\boldsymbol{R}) = 0$, что возможно или когда $\boldsymbol{R} = 0$, или когда линия действия силы $\boldsymbol{R}$ проходит через точки B и C одновременно. Но в нашем случае последнее невозможно, так как равнодействующая сходящихся сил должна проходить через точку A (рис. 37), а прямая BC по принятому условию через точку A не проходит. Следовательно, при выполнении условий (17) равнодействующая $\boldsymbol{R} = 0$, т. е. система сил действительно находится в равновесии.

Выполнения только какого-нибудь одного из условий (17) для равновесия, очевидно, недостаточно.

При решении задач с помощью условий (17) можно получать уравнения, каждое из которых будет содержать по одному неизвестному; для этого надо брать центры моментов на линиях действия неизвестных сил.

Задача 12. Решить задачу 7 с помощью уравнений моментов.

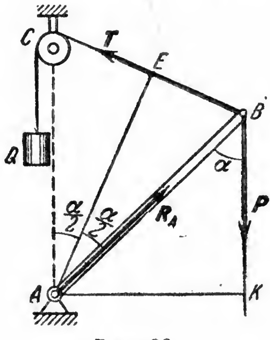


Рис. 38.

Р е ш е н и е. Введем обозначение $AB = AC = a$ и возьмем за центры моментов точки A и C (рис. 38). Опуская из точки A перпендикуляры AE и AK на линии действия сил $\boldsymbol{T}$ и $\boldsymbol{P}$, найдем: $AE = a\cos\frac{\alpha}{2}$, $AK = a\sin\alpha$; следовательно, $m_A(\boldsymbol{T}) = Ta\cos\frac{\alpha}{2}$, $m_A(\boldsymbol{P}) = -Pa\sin\alpha$. Кроме того, $m_A(\boldsymbol{R}_A) = 0$. Аналогично вычисляются моменты сил относительно центра C. В результате, составляя условия равновесия (17), получим:

$$\sum m_A(\boldsymbol{F}_k) \equiv Ta\cos\frac{\alpha}{2} - Pa\sin\alpha = 0, \tag{а}$$

$$\sum m_C(\boldsymbol{F}_k) \equiv R_A a\sin\alpha - Pa\sin\alpha = 0. \tag{б}$$

Из уравнения (а), так как $T=Q$, находим

$$\left(Q-2P\sin\frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}=0.$$

Отсюда для угла α, определяющего положение равновесия, получаем два значения:

$$\alpha=180^\circ \text{ и } \sin\frac{\alpha}{2}=\frac{Q}{2P}.$$

Из уравнения (б) при $\alpha\neq180^\circ$ находим $R_A=P$.

Задача 13. В задаче 10 найти реакцию R_2 с помощью уравнения моментов.

Решение. Беря моменты относительно центра C (см. рис. 33, *б*) и полагая $CB=a$, получим:

$$\sum m_C(F_k)\equiv Ta\cos(\alpha-\beta)+R_2a\cos\alpha-Qa\sin\alpha=0.$$

Отсюда, так как $T=Q$, находим сразу:

$$R_2=Q\frac{\sin\alpha-\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha}.$$

Реакцию R_1 можно найти, беря моменты относительно центра A.

Уравнениями моментов, как видим, можно также пользоваться для проверки правильности решений, полученных другими методами.

Заметим, что в справедливости равенства $T=Q$ можно убедиться, составляя уравнение моментов относительно центра блока (это уравнение, как будет доказано в § 24, справедливо и для несходящихся сил). Тогда получим $Tr-Qr=0$, где r — радиус блока, или $T=Q$.

ГЛАВА III

СИСТЕМЫ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ И ПАР, РАСПОЛОЖЕННЫХ В ОДНОЙ ПЛОСКОСТИ

§ 17. Сложение и разложение параллельных сил. Найдем равнодействующую двух действующих на твердое тело параллельных сил. Здесь возможны два случая: 1) силы направлены в одну сторону и 2) силы направлены в разные стороны.

1) Сложение двух сил, направленных в одну сторону. Рассмотрим твердое тело, на которое действуют две параллельные силы $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ (рис. 39). Пользуясь аксиомами 1 и 2 статики, перейдем от данной системы параллельных сил к эквивалентной ей системе сходящихся сил $\boldsymbol{Q}_1$ и $\boldsymbol{Q}_2$. Для этого приложим в точках A и B две уравновешенные силы $\boldsymbol{P}_1$ и $\boldsymbol{P}_2$ ($\boldsymbol{P}_1=-\boldsymbol{P}_2$), направленные вдоль прямой AB, и сложим их с силами $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ по правилу параллелограмма. Полученные силы $\boldsymbol{Q}_1$ и $\boldsymbol{Q}_2$ перенесем в точку O, где пересекаются их линии действия, и разложим на первоначальные составляющие. После этого в точке O будут действовать две уравно-

вешенные силы $\boldsymbol{P}_1$ и $\boldsymbol{P}_2$, которые отбросим, и две направленные вдоль одной прямой силы $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$. Эти силы перенесем в точку C и заменим их равнодействующей $\boldsymbol{R}$, модуль которой равен:

$$R = F_1 + F_2. \tag{18}$$

Сила $\boldsymbol{R}$ и является равнодействующей параллельных сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$, приложенных в точках A и B. Для определения положения точки C рассмотрим треугольники OAC, Oak и OCB, Omb. Из подобия соответствующих треугольников следует, что

$$\frac{AC}{OC} = \frac{P_1}{F_1} \quad \text{и} \quad \frac{BC}{OC} = \frac{P_2}{F_2}$$

или $AC \cdot F_1 = BC \cdot F_2$, так как $P_1 = P_2$.

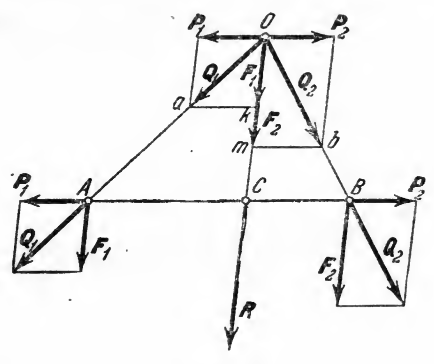


Рис. 39.

Отсюда, принимая во внимание свойства пропорций и учитывая, что $BC + AC = AB$, а $F_1 + F_2 = R$, получим:

$$\frac{BC}{F_1} = \frac{AC}{F_2} = \frac{AB}{R}. \tag{19}$$

Итак, *равнодействующая двух действующих на абсолютно твердое тело параллельных сил, направленных в одну сторону, равна по модулю сумме модулей слагаемых сил, им параллельна и направлена в ту же сторону; линия действия равнодействующей проходит между точками приложения слагаемых сил на расстояниях от этих точек, обратно пропорциональных силам.*

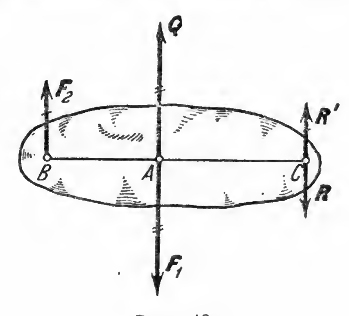


Рис. 40.

2) Сложение двух сил, направленных в разные стороны. Изобразим действующие на тело силы $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$, считая для определенности $F_1 > F_2$ (рис. 40). Возьмем на продолжении прямой BA точку C и приложим в ней уравновешенные силы $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{R}'$, параллельные силам $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$. При этом модули сил и положение точки C выберем так, чтобы удовлетворялись равенства:

$$R = F_1 - F_2; \tag{20}$$

$$\frac{BC}{F_1} = \frac{AC}{F_2} = \frac{AB}{R}. \tag{21}$$

Тогда, сложив силы $\boldsymbol{F}_2$ и $\boldsymbol{R}'$, мы по формулам (18) и (19) найдем, что их равнодействующая $\boldsymbol{Q}$ будет по модулю равна F_2+R', т. е. равна $\boldsymbol{F}_1$ и приложена в точке A. После этого силы $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{Q}$, как уравновешенные, можно отбросить. В результате заданные силы $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ будут заменены одной силой $\boldsymbol{R}$, которая и является их равнодействующей. Модуль этой равнодействующей и точка ее приложения C определяются формулами (20), (21). Таким образом, *равнодействующая двух действующих на абсолютно твердое тело параллельных сил, направленных в разные стороны, равна по модулю разности модулей слагаемых сил, им параллельна и направлена в сторону большей силы; линия действия равнодействующей проходит вне отрезка, соединяющего точки приложения слагаемых сил, на расстояниях от этих точек, обратно пропорциональных силам.*

Если на тело действует несколько параллельных сил, то их равнодействующую, если она существует, можно найти или последовательно применяя правила сложения двух сил, или с помощью метода, который будет рассмотрен в главе IV.

3) Разложение сил. С помощью полученных формул можно решать задачу о разложении данной силы на две ей параллельные, направленные в одну или в разные стороны. Задача будет определенной при задании дополнительных условий (например, линий действия обеих искомых сил или модуля и линии действия одной из них).

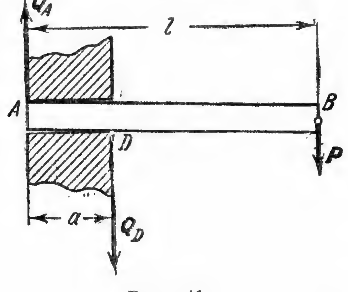


Рис. 41.

Задача 14. В стену, толщиной $a=0{,}5$ *м*, заделана балка AB длиной $l=2{,}5$ *м* (рис. 41). К концу B балки подвешен груз весом $P=3$ *Т*. Пренебрегая весом балки, определить силы давления на стену, считая, что они приложены в точках A и D (балка немного перекошена).

Решение. Для определения искомых давлений разлагаем силу $\boldsymbol{P}$ по направлениям реакций опор D и A на силы $\boldsymbol{Q}_D$ и $\boldsymbol{Q}_A$. Так как сила $\boldsymbol{P}$ не лежит между искомыми силами, то эти последние будут направлены в разные стороны, причем по модулю сила $\boldsymbol{Q}_D$ (ближайшая к $\boldsymbol{P}$) будет больше $\boldsymbol{Q}_A$ и будет направлена так же, как $\boldsymbol{P}$. Из равенств

$$\frac{Q_D}{l}=\frac{P}{a} \quad \text{и} \quad P=Q_D-Q_A$$

находим

$$Q_D=\frac{l}{a}P=15\ T,\ Q_A=12\ T.$$

Для проверки решения можно составить вторую пропорцию: $\dfrac{Q_A}{l-a}=\dfrac{P}{a}$.

§ 18. Пара сил. Момент пары. *Парой сил* называется система двух равных по модулю, параллельных и направленных в противоположные стороны сил, действующих на абсолютно твердое тело (рис. 42). Система сил, образующих пару, очевидно, не находится в равновесии (см. аксиому 1). В то же время пара сил, в отличие от ранее рассматривавшихся систем, не имеет равнодействующей.

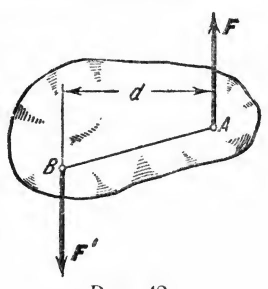


Рис. 42.

В самом деле, если допустить, что пара (F, F') имеет какую-то равнодействующую $Q \neq 0$, то сила $Q_1 = -Q$ должна эту пару уравновесить, т. е. система сил F, F', Q_1 должна находиться в равновесии. Но, как будет доказано, для равновесия любой системы сил необходимо, чтобы их геометрическая сумма равнялась нулю. Следовательно, при сделанном допущении должно быть $F + F' + Q_1 = 0$, что невозможно, так как $F + F' = 0$, а $Q_1 \neq 0$. Таким образом, пару сил нельзя заменить или уравновесить одной силой. Поэтому свойства пары, как особой меры механического взаимодействия тел, должны быть изучены отдельно.

Плоскость, проходящая через линии действия сил пары, называется *плоскостью действия пары.* Расстояние d между линиями действия сил пары называется *плечом пары.* Действие пары сил на твердое тело сводится к некоторому вращательному эффекту, зависящему от: 1) модуля F сил пары и длины ее плеча d; 2) положения плоскости действия пары; 3) направления поворота в этой плоскости. Для характеристики этого эффекта вводится понятие момента пары.

В данной главе будут рассматриваться свойства пар, лежащих в одной плоскости. Для этого случая по аналогии с моментом силы (§ 14) введем следующее определение: *моментом пары называется величина, равная взятому с соответствующим знаком произведению модуля одной из сил пары на ее плечо*[1]. Будем обозначать момент пары буквой m или M. Тогда

$$m = \pm Fd. \tag{22}$$

Момент пары (как и момент силы) *будем считать положительным, когда пара стремится повернуть тело против хода часовой стрелки, и отрицательным — когда по ходу часовой стрелки.* Измеряется момент пары в тех же единицах, что и момент силы. Из рис. 42 видно, что момент пары равен моменту одной из ее

[1]) Это понятие не следует смешивать с моментом силы. Понятие момента силы связано с точкой, относительно которой берется момент. Момент пары определяется только ее силами и плечом; ни с какой точкой плоскости эта величина не связана. Теорию пар разработал известный французский механик и геометр Л. Пуансо (1777 — 1859).

сил относительно точки приложения другой, т. е.

$$m = m_B(F) = m_A(F'). \tag{23}$$

Докажем следующую теорему о моментах сил пары: *алгебраическая сумма моментов сил пары относительно любого центра, лежащего в плоскости ее действия, не зависит от выбора этого центра и равна моменту пары.* В самом деле, беря в плоскости действия пары любую точку O (рис. 43), находим: $m_O(F) = -F\cdot Oa$, $m_O(F') = F'\cdot Ob$. Складывая эти равенства почленно и замечая, что $F' = F$ и $Ob - Oa = d$, где d — плечо пары, получаем:

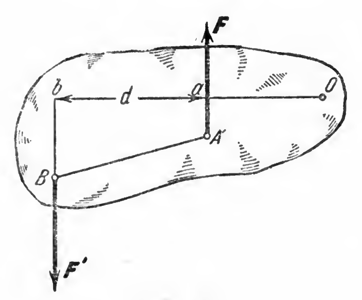


Рис. 43.

$$m_O(F) + m_O(F') = m. \tag{24}$$

Доказанной теоремой удобно пользоваться при вычислении моментов сил пары относительно любого центра.

§ 19. Эквивалентность пар. Чтобы установить условия эквивалентности двух пар, докажем сначала следующую теорему: ***не изменяя оказываемого на тело действия, можно пару сил, приложенную к абсолютно твердому телу, заменить любой другой парой, лежащей в той же плоскости и имеющей тот же момент.*** Пусть на твердое тело действует пара сил (F, F') с плечом d_1. Проведем в плоскости действия пары через произвольные точки D и E две параллельные прямые до пересечения их с линиями действия сил пары (F, F') в точках A и B (рис. 44) и приложим силы F и F' в этих точках (первоначально силы F, F' могли быть приложены в любых других точках на их линиях действия). Расстояние между прямыми AD и BE назовем d_2. Разложим теперь силу F по направлениям BA и DA на силы Q и P, а силу F' — по направлениям AB и BE на силы Q' и P'. Очевидно, при этом $P = -P'$, $Q = -Q'$. Силы Q и Q', как уравновешенные, можно отбросить. В результате пара сил (F, F') будет заменена парой (P, P') с другим плечом и другими силами, которые можно, очевидно, приложить в точках D, E на их линиях действия. При этом, в силу произвола в выборе точек D, E и направлений прямых AD и BE, пара

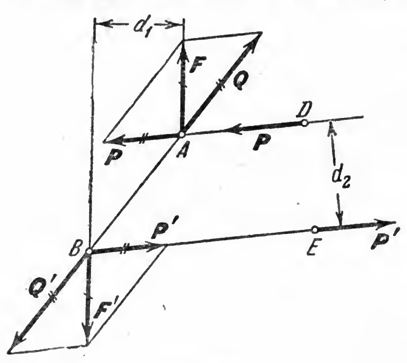


Рис. 44.

(P, P') может оказаться расположенной в плоскости ее действия где угодно (в положение, при котором силы P и P' параллельны F, пару можно привести, проделав указанное преобразование дважды).

Покажем в заключение, что моменты пар P, P' и F, F' равны. В самом деле, так как сила F является равнодействующей сил P и Q, то по теореме Вариньона

$$m_B(F) = m_B(P) + m_B(Q).$$

Но $m_B(F) = Fd_1$, $m_B(P) = Pd_2$, $m_B(Q) = 0$; следовательно, $Fd_1 = Pd_2$, т. е. моменты пар равны друг другу и теорема доказана.

Из доказанной теоремы вытекают следующие свойства пары сил:

1) данную пару, не изменяя оказываемого ею на тело действия, можно переносить куда угодно в плоскости действия пары;

2) у данной пары, не изменяя оказываемого ею на тело действия, можно произвольно менять модули сил или длину плеча, сохраняя неизменным ее момент.

Отсюда следует, что две пары, лежащие в одной плоскости и имеющие одинаковые моменты, эквивалентны, так как указанными операциями (т. е. путем изменения плеча и перемещения в плоскости действия) они могут быть преобразованы одна в другую. Одновременно из всех доказанных выше теорем видно, что действие пары сил на твердое тело действительно характеризуется ее моментом.

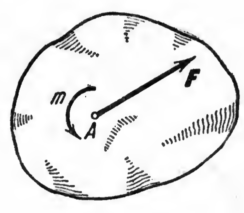


Рис. 45.

Чтобы задать пару, лежащую в данной плоскости, достаточно по доказанному задать ее момент; чему при этом равны силы пары или ее плечо и где пара расположена в плоскости действия — не существенно. Поэтому, особенно в технике, пару сил часто изображают круговой стрелкой, указывающей направление поворота, не изображая сами силы (например, на рис. 45 показано, что на тело действует сила F и пара с моментом m).

Докажем теперь вторую теорему: *действие пары сил на твердое тело не изменяется, если пару перенести из данной плоскости в любую другую плоскость, ей параллельную.*

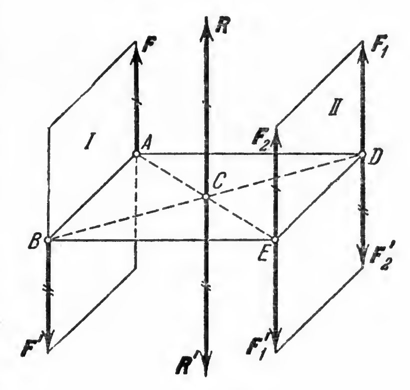


Рис. 46.

Рассмотрим пару (F, F'), лежащую в плоскости I (рис. 46). Проведем плоскость II, параллельную плоскости I, и возьмем в ней отрезок DE, равный и параллельный AB. В точках D и E приложим четыре попарно уравновешенные силы, из которых $F_1 = F_2 = F$; $F_1' = F_2' = F'$. Заметим, что фигура

ABED является параллелограммом, диагонали которого делятся в точке пересечения *C* пополам. Сложим теперь параллельные силы $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{F}_2$; они, как равные по модулю, заменятся равнодействующей $\boldsymbol{R}$, приложенной в середине отрезка *AE*, т. е. в точке *C*; при этом $R=2F$. Силы же $\boldsymbol{F}'$ и $\boldsymbol{F}_2'$ заменятся после сложения равнодействующей $\boldsymbol{R}'$, приложенной в середине отрезка *BD*, т. е. тоже в точке *C*; при этом $R'=2F'=R$. Следовательно, силы $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{R}'$, как уравновешенные, можно отбросить. В результате пара $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}')$ действительно заменяется такой же парой $(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_1')$, но лежащей в плоскости *II*.

Из доказанных теорем следует, что две пары, лежащие в параллельных плоскостях и имеющие одинаковые моменты, будут тоже эквивалентны.

Отметим следующую аналогию. Сила, действующая на твердое тело, определяется ее модулем, линией действия и направлением вдоль линии действия; точку приложения силы можно помещать на линии действия где угодно. Пара, действующая на твердое тело, определяется модулем ее момента, плоскостью действия и направлением поворота; располагать пару в плоскости ее действия можно где угодно.

Вопрос о том, какое движение будет совершать твердое тело под действием пары сил, относится к задачам динамики. С помощью теорем динамики можно доказать, что любая пара, действующая на свободное твердое тело, будет поворачивать его вокруг центра тяжести (см. стр. 345). Если же тело имеет неподвижную ось вращения, то пара, расположенная как угодно в плоскости, перпендикулярной к этой оси, будет поворачивать тело вокруг данной оси с одним и тем же вращательным усилием (моментом), что следует из равенства (24).

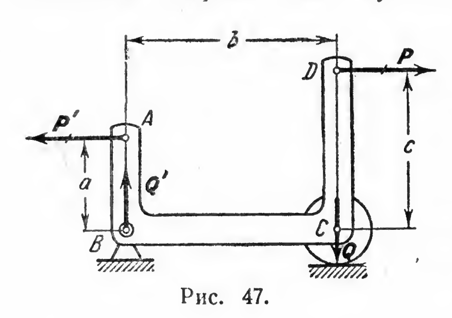


Рис. 47.

Задача 15. Криволинейный рычаг *ABCD* (рис. 47) находится в равновесии под действием двух параллельных сил $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{P}'$, образующих пару. Определить давление на опоры, если $AB=a=15$ *см*, $BC=b=30$ *см*, $CD=c=20$ *см*. $P=P'=30$ *кГ*.

Решение. Заменим пару $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{P}')$ эквивалентной ей парой $(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Q}')$, силы которой направлены по направлениям реакций опор. При этом моменты пар должны быть одинаковы, т. е. $P(c-a)=Qb$.

Следовательно, давления на опоры численно равны

$$Q=Q'=\frac{c-a}{b}P=5\ кГ$$

и направлены так, как показано на чертеже.

§ 20. Сложение пар, лежащих в одной плоскости. Условие равновесия пар. Докажем следующую теорему о сложении пар: *система пар, лежащих в одной плоскости, эквивалентна одной паре, лежащей в той же плоскости и имеющей момент, равный алгебраической сумме моментов слагаемых пар.* Пусть для опре-

деленности на тело действуют три пары с моментами m_1, m_2, m_3 (рис. 48). На основании теоремы об эквивалентности пар мы можем заменить эти пары тремя парами (P_1, P'_1), (P_2, P'_2), (P_3, P'_3), имеющими общее плечо d и такие же моменты:

$$P_1 d = m_1, \quad -P_2 d = m_2,$$
$$P_3 d = m_3.$$

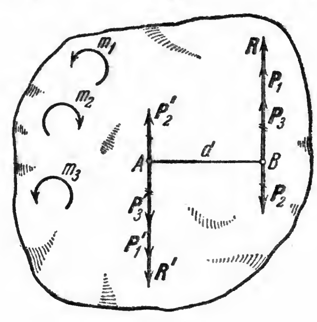


Рис. 48.

Сложив теперь отдельно силы, приложенные в точках A и B, получим в точке B силу $\boldsymbol{R}$, а в точке A — силу $\boldsymbol{R}'$, которые по модулю будут равны

$$R = R' = P_1 - P_2 + P_3.$$

В результате вся система пар заменится одной парой ($\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{R}'$) с моментом $M = Rd = P_1 d + (-P_2 d) + P_3 d = m_1 + m_2 + m_3$.

Для случая трех пар теорема доказана. Очевидно, тот же результат получится при любом числе пар. Система, состоящая из n пар с моментами m_1, m_2, ..., m_n, заменится одной парой с моментом

$$M = \sum m_k. \tag{25}$$

Из доказанной теоремы вытекает, что для равновесия плоской системы пар необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма моментов этих пар была равна нулю:

$$\sum m_k = 0. \tag{26}$$

Задача 16. На шестерню *1* радиуса r_1 действует пара сил с моментом m_1 (рис. 49, *а*). Определить момент m_2 пары, которую надо приложить к шестерне *2* радиуса r_2, чтобы сохранить равновесие.

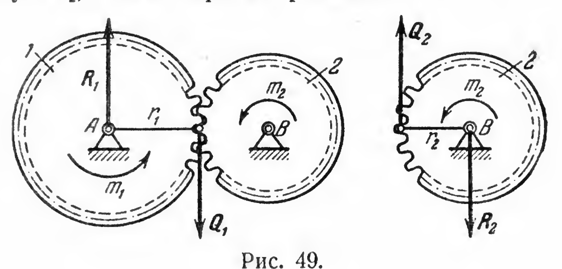


Рис. 49.

Решение. Рассмотрим сначала условия равновесия шестерни *1*. На нее действует пара с моментом m_1, которая может быть уравновешена только действием другой пары, в данном случае пары ($\boldsymbol{Q}_1$, $\boldsymbol{R}_1$). Здесь $\boldsymbol{Q}_1$ — перпендикулярная к радиусу составляющая силы давления на зуб со стороны шестерни *2*, а $\boldsymbol{R}_1$ — тоже перпендикулярная к радиусу составляющая

реакции оси A (сила давления на зуб и реакция оси A имеют еще составляющие вдоль радиуса, которые взаимно уравновешиваются и в условие равновесия не войдут). При этом, согласно условию равновесия (26), $m_1+(-Q_1r_1)=0$ или $Q_1=m_1/r_1$.

Теперь рассмотрим условия равновесия шестерни *2*. По аксиоме 4 на нее со стороны шестерни *1* будет действовать сила $\boldsymbol{Q}_2=-\boldsymbol{Q}_1$ (рис. 49, *б*), которая с перпендикулярной к радиусу составляющей реакции оси B образует пару $(\boldsymbol{Q}_2, \boldsymbol{R}_2)$ с моментом, равным $-Q_2r_2$. Эта пара и должна уравновеситься приложенной к шестерне *2* парой с моментом m_2; следовательно, по условию равновесия (26) $m_2+(-Q_2r_2)=0$. Отсюда, так как $Q_2=Q_1$, находим:

$$m_2=\frac{r_2}{r_1}m_1.$$

Естественно, что пары с моментами m_1 и m_2 не удовлетворяют условию равновесия (26), так как они приложены к *разным* телам.

Полученная в процессе решения задачи сила Q_1 (или Q_2) называется *окружным усилием*, действующим на шестерню. Как видим, окружное усилие равно моменту вращающей пары, деленному на радиус шестерни

$$Q_1=\frac{m_1}{r_1}=\frac{m_2}{r_2}.$$

ГЛАВА IV

СИСТЕМА СИЛ, КАК УГОДНО РАСПОЛОЖЕННЫХ В ОДНОЙ ПЛОСКОСТИ

§ 21. Теорема о параллельном переносе силы. Равнодействующая системы сходящихся сил непосредственно находится с помощью аксиомы параллелограмма сил. Для двух параллельных сил эта задача была решена путем приведения их к сходящимся силам (см. рис. 39). Очевидно, что аналогичную задачу легко будет решить и для произвольной системы сил, если найти и для них метод приведения к силам, приложенным в одной точке. Такой метод дает следующая теорема: ***силу, приложенную к абсолютно твердому телу, можно, не изменяя оказываемого действия, переносить параллельно ей самой в любую точку тела, прибавляя при этом пару с моментом, равным моменту переносимой силы относительно точки, куда сила переносится.***

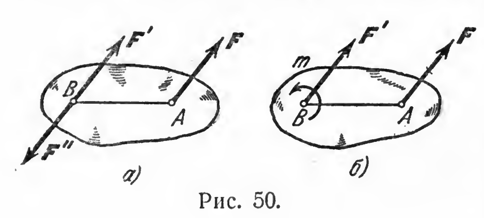


Рис. 50.

Пусть на твердое тело действует сила $\boldsymbol{F}$, приложенная в точке A (рис. 50, *а*). Действие этой силы не изменится, если в любой точке B

тела приложить две уравновешенные силы $\boldsymbol{F}'$ и $\boldsymbol{F}''$, такие, что $\boldsymbol{F}'=\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}''=-\boldsymbol{F}$. Полученная система трех сил и представляет собой силу $\boldsymbol{F}'$, равную $\boldsymbol{F}$, но приложенную в точке B, и пару $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}'')$ с моментом

$$m = m_B(\boldsymbol{F}). \tag{27}$$

Последнее равенство следует из формулы (23). Таким образом, теорема доказана. Результат, даваемый теоремой, можно еще изобразить так, как это показано на рис. 50, *б* (силу $\boldsymbol{F}$ на этом рисунке надо считать отброшенной). Рассмотрим некоторые примеры приложения теоремы.

Пример 1. Чтобы удержать в равновесии однородный брус AB длиной $2a$ и весом P, надо, очевидно, приложить в его середине C направленную вверх силу $\boldsymbol{Q}$, по модулю равную P (рис. 51, *а*). Согласно доказанной теореме силу $\boldsymbol{Q}$ можно заменить силой $\boldsymbol{Q}'$, приложенной к концу A бруса, и парой с моментом $m = Qa$. Если плечо этой пары уменьшить до величины h (рис. 51, *б*), то образующие ее силы $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}'$ надо увеличить так, чтобы было $Fh = Qa$. Следовательно, чтобы удержать брус за его конец A, надо, кроме силы $\boldsymbol{Q}'$, приложить еще пару $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}')$. Этот результат, вытекающий из доказанной теоремы, непосредственно «ощущает» рука человека, удерживающая брус за его середину (рис. 51, *а*) или за конец (рис. 51, *б*).

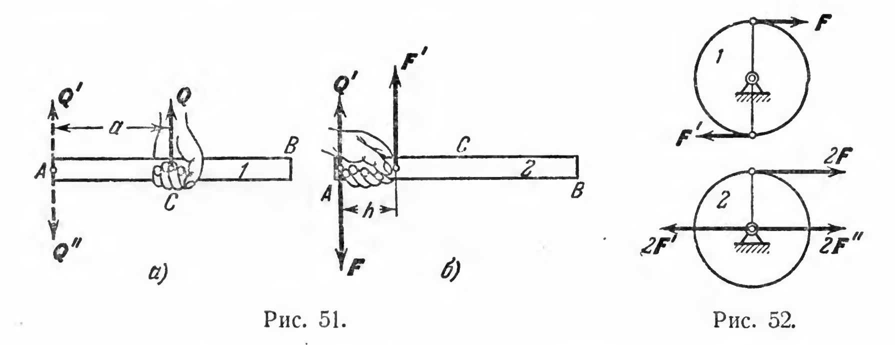


Рис. 51. Рис. 52.

Пример 2. На барабан *1* радиуса r намотаны в противоположных направлениях две нити, к концам которых прикладывают силы F и $F' = -F$ (рис. 52); на барабан *2* того же радиуса намотана одна нить, к которой прикладывают силу, равную $2F$. Рассмотрим, чем будут отличаться действия этих сил.

На барабан *1* действует только пара сил $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}')$ с моментом $2Fr$, вращающая барабан. Силу, действующую на барабан *2*, можно заменить силой $2\boldsymbol{F}' = 2\boldsymbol{F}$, приложенной к оси барабана, и парой $(2\boldsymbol{F}, 2\boldsymbol{F}')$. В результате находим, что на этот барабан действуют: 1) пара с таким же, как и в первом случае, моментом $2Fr$, вращающая барабан, и 2) сила $2\boldsymbol{F}''$, оказывающая давление на ось барабана.

Итак, оба барабана будут вращаться одинаково. Но при этом ось второго барабана испытывает давление, равное $2F$, а ось первого барабана никакого давления не испытывает.

§ 22. Приведение плоской системы сил к данному центру. Пусть на твердое тело действует какая-нибудь система сил F_1, F_2, ..., F_n, лежащих в одной плоскости. Возьмем в этой плоскости произвольную точку O, которую назовем *центром приведения*, и, поль-

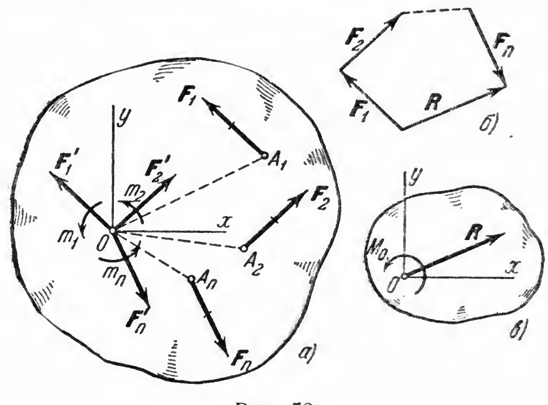


Рис. 53.

зуясь доказанной в § 21 теоремой, перенесем все силы в центр O (рис. 53, *а*). В результате на тело будет действовать система сил

$$F'_1 = F_1,\ F'_2 = F_2,\ \ldots,\ F'_n = F'_n, \tag{28}$$

приложенных в центре O, и система пар, моменты которых согласно формуле (27) будут равны:

$$m_1 = m_O(F_1),\ m_2 = m_O(F_2),\ \ldots,\ m_n = m_O(F_n). \tag{28'}$$

Силы, приложенные в центре O, можно заменить одной силой R, приложенной в том же центре; при этом $R = \sum F'_k$ или, согласно равенствам (28),

$$R = \sum F_k. \tag{29}$$

Точно так же, по теореме о сложении пар, все пары можно заменить одной парой, лежащей в той же плоскости. Момент этой пары $M_O = \sum m_k$ или согласно равенствам (28'):

$$M_O = \sum m_O(F_k). \tag{30}$$

Величина R, равная геометрической сумме всех сил системы, называется, как известно, *главным вектором системы*; величину M_O, равную сумме моментов всех сил системы относительно центра O, будем называть *главным моментом системы относительно центра O*. В результате мы доказали следующую теорему: *всякая плоская система сил, действующих на абсолютно твердое тело, при*

*приведении к произвольно взятому центру O заменяется одной силой **R**, равной главному вектору системы и приложенной в центре приведения O, и одной парой с моментом M_O, равным главному моменту системы относительно центра O* (рис. 53, *в*).

Заметим, что сила **R** не является равнодействующей данной системы сил, так как она заменяет систему сил не одна, а вместе с парой.

Из доказанной теоремы видно, что две системы сил, имеющие одинаковые главные векторы и главные моменты, статически эквивалентны. Следовательно, *для задания плоской системы сил достаточно задать ее главный вектор **R** и главный момент M_O относительно некоторого центра O.*

Величина **R** может быть найдена или геометрически построением силового многоугольника (рис. 53, *б*), или аналитически по формулам (10) (см. § 10); от выбора центра O значение **R**, очевидно, не зависит. Величина M_O определяется по формуле (30). При изменении положения центра O значение M_O может в общем случае изменяться вследствие изменения моментов слагаемых сил. Поэтому, задавая главный момент, нужно указывать, относительно какого центра он вычислен.

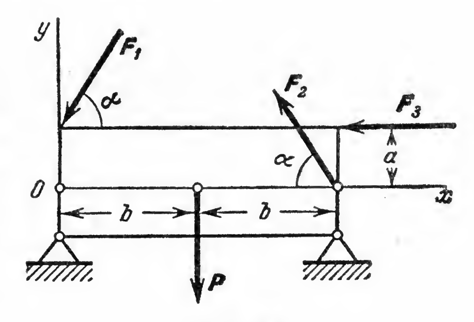


Рис. 54.

Задача 17. Привести к центру O систему сил **P**, $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$, изображенных на рис. 54, если $P = 30$ *кГ*, $F_1 = F_2 = F_3 = F = 20$ *кг*, $a = 0{,}3$ *м*, $b = 0{,}5$ *м*, $\alpha = 60°$.

Решение. Задача сводится к нахождению главного вектора **R** заданной системы сил, который будем определять по его проекциям R_x, R_y, и главного момента M_O этих сил относительно центра O. Проводя оси Oxy, как показано на рисунке, вычисляем проекции каждой из сил на эти оси и их моменты относительно центра O (см. таблицу).

F_k	P	F_1	F_2	F_3
F_{kx}	0	$-F\cos\alpha$	$-F\cos\alpha$	$-F$
F_{ky}	$-P$	$-F\sin\alpha$	$F\sin\alpha$	0
$m_O(F_k)$	$-bP$	$aF\cos\alpha$	$2bF\sin\alpha$	aF

После этого, учитывая данные задачи, находим

$$R_x \equiv \sum F_{kx} = -40 \text{ кГ}, \quad R_y \equiv \sum F_{ky} = -30 \text{ кГ},$$
$$M_O \equiv \sum m_O(F_k) = 11{,}3 \text{ кГм}.$$

Таким образом, при приведении к центру O заданная система сил заменяется силой $\boldsymbol{R}$ с проекциями $R_x = -40$ *кГ*, $R_y = -30$ *кГ* ($R = 50$ *кГ*), приложенной в центре O, и парой с моментом $M_O = 11{,}3$ *кГм*.

§ 23. Случаи приведения плоской системы сил к простейшему виду. Доказанная в § 22 теорема позволяет найти, к какому простейшему виду может быть приведена данная плоская система сил. Результат будет зависеть от того, чему равны главный вектор $\boldsymbol{R}$ и главный момент M_O этой системы.

1) Если для данной системы сил $\boldsymbol{R} = 0$ и $M_O = 0$, то она находится в равновесии. Подробнее случай равновесия будет рассмотрен в следующем параграфе.

2) Если для данной системы сил $\boldsymbol{R} = 0$, $M_O \neq 0$, то она приводится к одной паре с моментом $M_O = \sum m_O(\boldsymbol{F}_k)$. В этом случае величина M_O не будет зависеть от выбора центра O, так как иначе мы получили бы, что одна и та же система сил заменяется разными, не эквивалентными друг другу парами, что невозможно.

3) Если для данной системы сил $\boldsymbol{R} \neq 0$, то она приводится к одной равнодействующей. При этом возможны два случая.

а) $\boldsymbol{R} \neq 0$, $M_O = 0$. В этом случае система сразу заменяется одной силой, т. е. равнодействующей $\boldsymbol{R}$, проходящей через центр O.

б) $\boldsymbol{R} \neq 0$, $M_O \neq 0$ (рис. 55, *а*). В этом случае пару с моментом M_O можно изобразить двумя силами $\boldsymbol{R}'$ и $\boldsymbol{R}''$, беря $\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{R}$, а $\boldsymbol{R}'' = -\boldsymbol{R}$ (рис. 55, *б*). При этом если $d = OC$ — плечо пары, то должно быть

$$Rd = |M_O|. \tag{31}$$

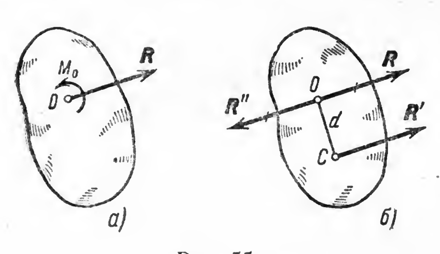


Рис. 55.

Отбросив теперь силы $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{R}''$, как уравновешенные, найдем, что вся система сил заменяется одной равнодействующей $\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{R}$, проходящей через точку C. Положение точки C определяется двумя условиями: 1) расстояние $OC = d$ ($OC \perp \boldsymbol{R}$) должно удовлетворять равенству (31); 2) знак момента относительно центра O силы $\boldsymbol{R}'$, приложенной в точке C, т. е. знак $M_O(\boldsymbol{R}')$, должен совпадать со знаком M_O. Пример соответствующего расчета дан в задаче 20.

Рассмотренные случаи показывают, что плоская система сил, если она не находится в равновесии, приводится или к одной равнодействующей (когда $\boldsymbol{R} \neq 0$), или к одной паре (когда $\boldsymbol{R} = 0$).

Задача 18. Привести к простейшему виду систему сил $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{P}_3$, действующих на балку AB (рис. 56), и найти давления на опоры A и B, если $P_1 = P_2 = P_3 = P$.

Решение. Многоугольник, построенный из сил $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{P}_3$, замкнут; следовательно, $\boldsymbol{R} = 0$. Сумма моментов всех сил относительно любой точки (например, точки C) равна $-Pa$. Следовательно, данная система сил приводится к паре с моментом $m = -Pa$. Располагая эту пару так, как показано на чертеже пунктиром, заключаем, что силы $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{P}_3$ оказывают на опоры давления $\boldsymbol{Q}_1$ и $\boldsymbol{Q}_2$, численно равные $\frac{Pa}{b}$.

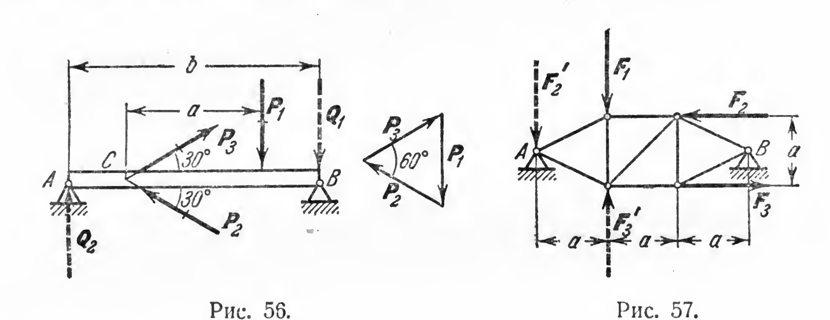


Рис. 56. Рис. 57.

Задача 19. Привести к простейшему виду систему сил $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$, действующих на ферму AB (рис. 57), и найти давления на опоры A и B, если $F_1 = F_2 = F_3 = F$.

Решение. Замечая, что силы $\boldsymbol{F}_2$ и $\boldsymbol{F}_3$ образуют пару, перемещаем ее в положение, показанное на чертеже пунктиром. Тогда силы $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_3'$ взаимно уравновешиваются и вся система сил приводится к равнодействующей $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}_2'$.

Отсюда заключаем, что действие сил $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$ сводится к вертикальному давлению на опору A; опора B при этом не нагружена.

Задача 20. Найти равнодействующую сил, действующих на балку AB (рис. 58), если $P = 3T$, $Q_1 = Q_2 = Q = 4T$, расстояние $OB = a = 0{,}8$ *м*.

Решение. Строя из сил $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}_1$, $\boldsymbol{Q}_2$ силовой многоугольник, находим, что сила $\boldsymbol{R}$ (главный вектор системы) равна по модулю $R = 5T$, так как в силовом многоугольнике $be = 2Q\cos 60° = 4T$; $ab = 3T$. Далее, беря за центр моментов точку O, где пересекаются силы $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}_2$, вычисляем главный момент системы $M_O = m_O(\boldsymbol{Q}_1) = -aQ\cos 30° = -1{,}6\sqrt{3}$ *Тм*. Тогда, по формуле (31)

$$d = \frac{|M_O|}{R} = 0{,}32\sqrt{3} \approx 0{,}55 \text{ м}.$$

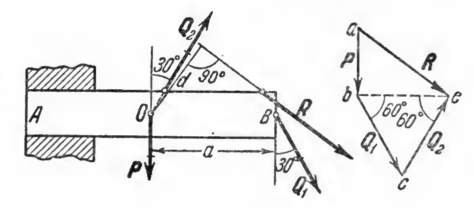


Рис. 58.

Проводя из точки O прямую, перпендикулярную к направлению $\boldsymbol{R}$, и откладывая вдоль нее отрезок d, найдем линию действия равнодействующей. Так как $M_O < 0$, то равнодействующая проходит справа от точки O (момент силы $\boldsymbol{R}$ относительно точки O должен быть отрицательным).

§ 24. Условия равновесия произвольной плоской системы сил. Случай параллельных сил. Для равновесия любой плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись условия:

$$\boldsymbol{R}=0,\ M_O=0. \tag{32}$$

Здесь O — любая точка плоскости, так как при $\boldsymbol{R}=0$ величина M_O от выбора центра O не зависит (см. § 23, п. 2).

Условия (32) являются необходимыми, так как если какое-нибудь из них не выполняется, то система действующих на тело сил приводится или к равнодействующей (когда $\boldsymbol{R}\neq 0$), или к паре (когда $M_O\neq 0$) и, следовательно, не является уравновешенной. Одновременно условия (32) являются достаточными, потому что при $\boldsymbol{R}=0$ система может приводиться только к паре с моментом M_O, а так как $M_O=0$, то имеет место равновесие.

Найдем вытекающие из равенств (32) аналитические условия равновесия. Эти условия можно получить в трех различных формах, которые мы последовательно рассмотрим.

1. Основная форма условий равновесия. Величины $\boldsymbol{R}$ и M_O определяются равенствами:

$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2},\qquad M_O=\sum m_O(\boldsymbol{F}_k),$$

где $R_x=\sum F_{xk}$, $R_y=\sum F_{yk}$. Но R может равняться нулю только тогда, когда одновременно $R_x=0$ и $R_y=0$. Следовательно, условия (32) будут выполнены, если будет:

$$\sum F_{kx}=0,\qquad \sum F_{ky}=0,\qquad \sum m_O(\boldsymbol{F}_k)=0. \tag{33}$$

Равенства (33) выражают следующие аналитические условия равновесия: *для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из двух координатных осей и сумма их моментов относительно любого центра, лежащего в плоскости действия сил, были равны нулю.* Одновременно уравнения (33) выражают необходимые условия равновесия свободного твердого тела, находящегося под действием плоской системы сил. По механическому смыслу первые два из этих условий выражают необходимые условия того, чтобы тело не имело перемещений вдоль осей координат, а третье является условием отсутствия вращения в плоскости Oxy.

2*. Вторая форма условий равновесия: *для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех этих сил относительно каких-нибудь двух центров A и B и сумма их проекций на ось Ox, не перпендикулярную к прямой AB, были равны нулю:*

$$\sum m_A(\boldsymbol{F}_k)=0,\quad \sum m_B(\boldsymbol{F}_k)=0,\quad \sum F_{kx}=0. \tag{34}$$

Необходимость этих условий очевидна, так как если любое из них не выполняется, то будет или $\boldsymbol{R} \neq 0$ или $M_A \neq 0$ ($M_B \neq 0$) и равновесия не будет. Докажем их достаточность. Если для данной системы сил выполняются только первые два из условий (34), то для нее $M_A = 0$ и $M_B = 0$. Такая система сил, согласно показанному в § 23, может не находиться в равновесии, а иметь равнодействующую $\boldsymbol{R}$, одновременно проходящую через точки A и B[1]) (рис. 59). Но по третьему условию должно быть $R_x = \sum F_{kx} = 0$. Так как ось Ox проведена не перпендикулярно к AB, то последнее условие может быть выполнено, только когда равнодействующая $R = 0$, т. е. когда имеет место равновесие.

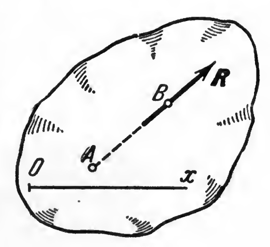


Рис. 59.

3*. Третья форма условий равновесия (*уравнения трех моментов*): ***для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех этих сил относительно любых трех центров A, B и C, не лежащих на одной прямой, были равны нулю***:

$$\sum m_A(\boldsymbol{F}_k) = 0, \quad \sum m_B(\boldsymbol{F}_k) = 0, \quad \sum m_C(\boldsymbol{F}_k) = 0. \qquad (35)$$

Необходимость этих условий, как и в предыдущем случае, очевидна. Достаточность условий (35) следует из того, что если при одновременном выполнении этих условий данная система сил не находилась бы в равновесии, то она должна была бы приводиться к равнодействующей, одновременно проходящей через точки A, B и C, что невозможно, так как эти точки не лежат на одной прямой. Следовательно, при выполнении условий (35) имеет место равновесие.

Во всех рассмотренных случаях для плоской системы сил получаются три условия равновесия. Условия (33) мы считаем основными, так как при пользовании ими никаких ограничений на выбор координатных осей и центра моментов не налагается.

Если на тело наряду с плоской системой сил $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$ действует система лежащих в той же плоскости пар с моментами $m_1, m_2, \ldots, m_s$, то при составлении условий равновесия в уравнения проекций пары не войдут, так как сумма проекций сил пары на любую ось, очевидно, равна нулю. В уравнениях же моментов к моментам сил алгебраически прибавятся моменты пар, так как сумма моментов сил пары относительно любого центра равна моменту пары (§ 18, формула 24). Таким образом, например, условия равновесия (33) при действии на тело системы сил и пар примут вид:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad \sum m_O(\boldsymbol{F}_k) + \sum m_i = 0. \qquad (36)$$

Аналогично преобразуются в этом случае условия (34) и (35).

---

[1]) Это следует из случая 3, пункт *а*), рассмотренного в § 23.

Равновесие плоской системы параллельных сил. В случае, когда все действующие на тело силы параллельны друг другу, мы можем направить ось Ox перпендикулярно к силам, а ось Oy параллельно им (рис. 60). Тогда проекция каждой из сил на ось Ox будет равна нулю и первое из равенств (33) обратится в тождество вида $0=0$. В результате для параллельных сил останется два условия равновесия:

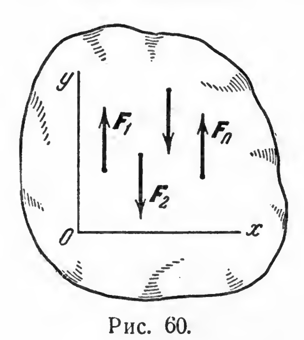


Рис. 60.

$$\sum F_{ky}=0, \quad \sum m_O(F_k)=0, \tag{37}$$

где ось Oy параллельна силам.

Другая форма условий равновесия для параллельных сил, получающаяся из равенств (34), имеет вид:

$$\sum m_A(F_k)=0, \quad \sum m_B(F_k)=0. \tag{38}$$

При этом точки A и B не должны лежать на прямой, параллельной силам.

§ 25. **Решение задач.** При решении задач этого раздела следует иметь в виду все те общие указания, которые были сделаны в § 13.

Еще раз подчеркиваем, что, приступая к решению, надо прежде всего установить, равновесие какого именно тела следует в данной задаче рассмотреть. Затем, выделив это тело и рассматривая его как свободное, следует изобразить все действующие на тело заданные силы и реакции отброшенных связей.

Далее следует составить условия равновесия, применяя ту из форм этих условий, которая приводит к более простой системе уравнений (наиболее простой будет система уравнений, в каждое из которых входит по одному неизвестному).

Для получения более простых уравнений следует (если это только не усложняет ход расчета): а) *составляя уравнения проекций, проводить координатную ось перпендикулярно какой-нибудь неизвестной силе*; б) *составляя уравнения моментов, брать центр моментов в точке, где пересекается больше неизвестных сил.*

При вычислении моментов иногда бывает удобно разлагать данную силу на две составляющие и, пользуясь теоремой Вариньона, находить момент силы как сумму моментов этих составляющих.

Решение многих задач статики сводится к определению реакций опор, с помощью которых закрепляются балки, мостовые фермы и т. п. В технике обычно встречаются следующие три типа опорных закреплений (кроме рассмотренных в § 4):

1. Подвижная шарнирная опора (рис. 61, опора A). Реакция N_A такой опоры направлена по нормали к поверхности, на которую опираются катки подвижной опоры.

2. Неподвижная шарнирная опора (рис. 61, опора B). Реакция R_B такой опоры проходит через ось шарнира и может иметь любое направление в плоскости чертежа. При решении задач будем реакцию $\boldsymbol{R}_B$ изображать ее составляющими $\boldsymbol{X}_B$ и $\boldsymbol{Y}_B$ по направлениям осей координат. Если мы, решив задачу, найдем X_B и Y_B, то тем самым будет определена и реакция $\boldsymbol{R}_B$; по модулю $R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2}$.

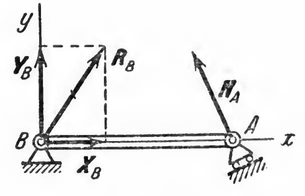


Рис. 61.

Способ закрепления, показанный на рис. 61, употребляется для того, чтобы в балке AB не возникало дополнительных напряжений при изменении ее длины от изменения температуры или от изгиба.

Заметим, что если опору A балки (рис. 61) сделать тоже неподвижной, то балка при действии на нее любой плоской системы сил будет статически неопределимой, так как тогда в три уравнения равновесия (33) войдут четыре неизвестные реакции X_A, Y_A, X_B, Y_B (см. § 12).

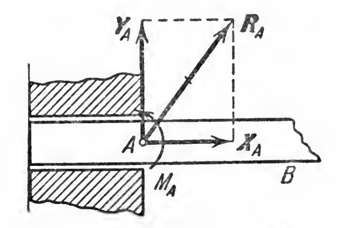


Рис. 62.

3. Неподвижная защемляющая опора или жесткая заделка (рис. 62). В этом случае на заделанный конец балки со стороны опорных плоскостей действует система распределенных сил реакций. Считая эти силы приведенными к центру A, мы можем их заменить одной наперед неизвестной силой $\boldsymbol{R}_A$, приложенной в этом центре, и парой с наперед неизвестным моментом M_A. Силу $\boldsymbol{R}_A$ можно в свою очередь изобразить ее составляющими $\boldsymbol{X}_A$ и $\boldsymbol{Y}_A$. Таким образом, для нахождения реакции неподвижной заземляющей опоры надо определить три неизвестных величины X_A, Y_A и M_A. Если под такую балку где-нибудь в точке B подвести еще одну опору, то балка станет статически неопределимой.

Вопрос о направлениях реакций других видов связей был рассмотрен в § 4.

Задача 21. Определить силы, с которыми давят на рельсы колеса A и B крана, схематически изображенного на рис. 63. Вес крана $P = 4$ *Т*, центр тяжести его лежит на линии DE. Вес поднимаемого груза $Q = 1$ *Т*, вылет крана $b = 3{,}5$ *м*, расстояние $AB = 2a = 2{,}5$ *м*.

Решение. Рассмотрим равновесие всего крана. На кран, если его считать свободным, будут действовать заданные силы $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$ и реакции

отброшенных связей N_A и N_B. Для полученной системы параллельных составляем условия равновесия (37), принимая за центр моментов точку A и проектируя силы на вертикальную ось. Получаем:

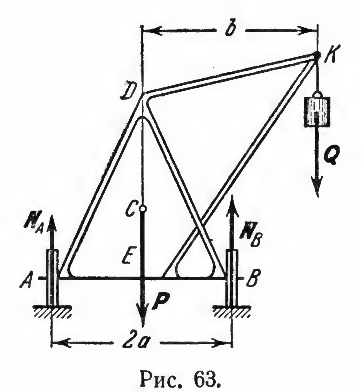


Рис. 63.

$$-Pa + N_B \cdot 2a - Q(a+b) = 0,$$
$$N_A + N_B - P - Q = 0.$$

Решая эти уравнения, найдем:

$$N_A = \frac{P}{2} - \frac{Q}{2}\left(\frac{b}{a} - 1\right) = 1{,}1 \ T;$$
$$N_B = \frac{P}{2} + \frac{Q}{2}\left(\frac{b}{a} + 1\right) = 3{,}9 \ T.$$

Для проверки составим уравнение моментов относительно центра B

$$-N_A 2a + Pa - Q(b-a) = 0.$$

Подставляя сюда найденное значение N_A, убеждаемся, что уравнение удовлетворяется. Искомые давления колес на рельсы равны численно N_A и N_B, но направлены вниз.

Из найденного решения видно, что при

$$Q = \frac{a}{b-a} P = 2{,}22 \ T$$

реакция N_A обращается в нуль и левое колесо перестает давить на рельс. При дальнейшем увеличении нагрузки Q кран начинает опрокидываться. Наибольшая нагрузка Q, при которой сохраняется равновесие крана, определяется, очевидно, из условия $\sum m_B(F_k) = 0$.

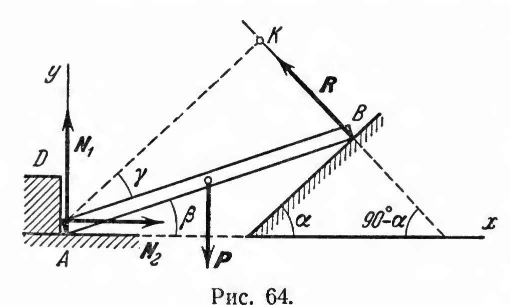


Рис. 64.

Задача 22. Однородный брус AB весом P опирается концом A на гладкую горизонтальную плоскость и выступ D, а концом B — на наклонную плоскость, образующую угол α с горизонтом (рис. 64). Сам брус наклонен к горизонту под углом β. Определить силы давления бруса на обе плоскости и выступ D.

Решение. Рассмотрим равновесие бруса AB, отбрасывая связи и считая его свободным. Тогда на брус будут действовать: заданная сила $\boldsymbol{P}$, приложенная в середине бруса, и реакции связей $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{N}_1$, $\boldsymbol{N}_2$, направленные перпендикулярно соответствующим плоскостям. Проводим оси координат (см. рис. 64) и составляем условия равновесия (33), беря моменты относительно центра A, где пересекаются две неизвестные силы. Предварительно вычисляем проекции каждой из сил на оси координат и ее момент относи-

тельно центра A, занося эти величины в таблицу[1]); при этом вводим обозначения: $AB=2a$ и $\angle KAB=\gamma$ (AK — плечо силы $\boldsymbol{R}$ относительно центра A)

F_k	N_1	N_2	P	R
F_{kx}	0	N_2	0	$-R\sin\alpha$
F_{ky}	N_1	0	$-P$	$R\cos\alpha$
$m_A(F_k)$	0	0	$-Pa\cos\beta$	$R\,2a\cos\gamma$

Теперь составляем условия равновесия:

$$N_2-R\sin\alpha=0,\quad N_1-P+R\cos\alpha=0,$$
$$-Pa\cos\beta+2Ra\cos\gamma=0.$$

Из последнего уравнения находим:

$$R=\frac{P\cos\beta}{2\cos\gamma}.$$

Так как прямая AK параллельна наклонной плоскости, то $\angle KAx=\alpha$; отсюда $\gamma=\alpha-\beta$. Окончательно:

$$R=\frac{P\cos\beta}{2\cos(\alpha-\beta)}.$$

Решая теперь первые два уравнения, получим:

$$N_1=P\left[1-\frac{\cos\alpha\cos\beta}{2\cos(\alpha-\beta)}\right],\quad N_2=P\frac{\sin\alpha\cos\beta}{2\cos(\alpha-\beta)}.$$

Давления на плоскости равны по модулю соответствующим реакциям и направлены в противоположные стороны.

Для проверки правильности вычисления величин N_1 и N_2 можно составить уравнения моментов относительно точек, где пересекаются линии действия сил $\boldsymbol{R}$ и N_2 и сил $\boldsymbol{R}$ и N_1.

Из приведенного решения следует *вывод*: когда для определения проекций или моментов сил требуется знать какую-нибудь величину (длину или угол), не заданную по условиям задачи, то эту величину следует обозначить какой-нибудь буквой и ввести в уравнения равновесия. Если в ходе решения задачи введенная величина не исключится, ее надо выразить через данные величины.

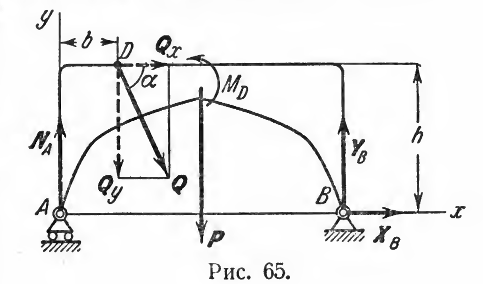


Рис. 65.

Задача 23. Симметричная арка (рис. 65) нагружена системой сил, приводящихся к силе $Q=4$ *Т*, приложенной к точке D, и паре с моментом $M_D=12$ *Тм*. Вес арки $P=8$ *Т*, размеры равны: $AB=a=10$ *м*, $b=2$ *м*, $h=3$ *м*, $\alpha=60°$. Определить реакции неподвижной шарнирной опоры B и подвижной опоры A.

---

[1]) По поводу заполнения таблицы см. подстрочное примечание на стр. 40.

Решение. Рассмотрим равновесие всей арки, отбрасывая связи и считая ее свободной. Тогда на арку будут действовать заданные силы $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$ и пара с моментом M_D, а также реакции опор $\boldsymbol{N}_A$, $\boldsymbol{X}_B$ и $\boldsymbol{Y}_B$ (реакцию неподвижной шарнирной опоры изображаем двумя ее составляющими, как на рис. 61). В этой задаче удобнее составлять условия равновесия в форме (34), беря моменты относительно центров A и B и проекции на ось Ax. Тогда в каждое уравнение войдет по одной неизвестной силе. Вычисляем моменты и проекции каждой из сил и вносим их в таблицу. При этом, для вычисления моментов силы $\boldsymbol{Q}$ разлагаем ее на составляющие $\boldsymbol{Q}_x$, $\boldsymbol{Q}_y$ и пользуемся теоремой Вариньона.

$\boldsymbol{F}_k$	N_A	$\boldsymbol{P}$	X_B	Y_B	$\boldsymbol{Q}$	M_D
F_{kx}	0	0	X_B	0	$Q\cos\alpha$	0
$m_A(\boldsymbol{F}_k)$	0	$-P\frac{a}{2}$	0	$Y_B a$	$-\lvert Q_x\rvert h-\lvert Q_y\rvert b$	M_D
$m_B(\boldsymbol{F}_k)$	$-N_A a$	$P\frac{a}{2}$	0	0	$-\lvert Q_x\rvert h+\lvert Q_y\rvert (a-b)$	M_D

Составляем условия равновесия, учитывая, что $\lvert Q_x\rvert = Q\cos\alpha$, $\lvert Q_y\rvert = Q\sin\alpha$. Получаем:

$$X_B+Q\cos\alpha=0, \qquad (а)$$

$$Y_B a-P\frac{a}{2}-hQ\cos\alpha-bQ\sin\alpha+M_D=0, \qquad (б)$$

$$-N_A a+P\frac{a}{2}-hQ\cos\alpha+(a-b)Q\sin\alpha+M_D=0. \qquad (в)$$

Решая полученные уравнения, найдем:

$$X_B=-Q\cos\alpha=-2\ T,$$

$$Y_B=\frac{P}{2}+Q\frac{b\sin\alpha+h\cos\alpha}{a}-\frac{M_D}{a}\approx 4{,}09\ T,$$

$$N_A=\frac{P}{2}+Q\frac{(a-b)\sin\alpha-h\cos\alpha}{a}+\frac{M_D}{a}\approx 7{,}37\ T.$$

Величина X_B оказалась отрицательной. Следовательно, составляющая $\boldsymbol{X}_B$ имеет направление, противоположное показанному на чертеже, что можно было предвидеть заранее. Полная реакция опоры B найдется как геометрическая сумма сил $\boldsymbol{X}_B$ и $\boldsymbol{Y}_B$. По модулю

$$R_B=\sqrt{X_B^2+Y_B^2}\approx 4{,}55\ T.$$

Если действующая на арку пара будет иметь направление вращения, противоположное показанному на рис. 65, то $M_D=-12$ *Тм*. В этом случае получим $Y_B=6{,}49$ *Т*, $N_A=4{,}97$ *Т*; величина X_B при этом не изменится.

Для проверки составляем уравнение проекций на ось Ay:

$$N_A+Y_B-P-Q\sin\alpha=0. \qquad (г)$$

Подставляя сюда найденные величины N_A и Y_B, убеждаемся, что они этому уравнению удовлетворяют (подстановку следует делать и в общем виде, чтобы проверить формулы, и в числах, чтобы проверить численные расчеты).

Следует иметь в виду, что при такой проверке можно не обнаружить ошибок, связанных с неправильным определением проекций или моментов сил, перпендикулярных оси Ay. Поэтому надо или дополнительно проверить эту часть расчетов, или составить для проверки еще одно уравнение, например, уравнение моментов относительно центра D.

Отметим еще следующее. Как известно, при составлении условий (34) ось проекций надо направлять не перпендикулярно линии AB, т. е. в нашем случае не вдоль Ay. Если, тем не менее, мы составили бы третье уравнение в проекциях на ось Ay, то получили бы систему уравнений (б), (в), (г), содержащую только два неизвестных N_A и Y_B (в этой системе одно уравнение было бы следствием двух других). В результате мы не могли бы определить реакцию X_B.

Задача 24. Однородный брус AB жестко заделан в стену, образуя с ней угол $\alpha = 60°$ (рис. 66, *а*). Выступающая из стены часть бруса имеет длину $b = 0{,}8$ *м* и вес $P = 100$ *кГ*. Внутри угла DAB лежит цилиндр весом $Q = 180$ *кГ*, касающийся бруса в точке E, причем $AE = a = 0{,}3$ *м*. Определить реакцию заделки.

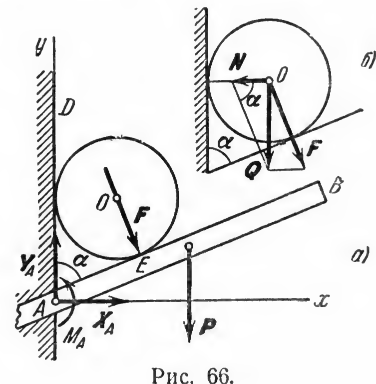


Рис. 66.

Решение. Рассмотрим равновесие бруса, отбрасывая связи и считая его свободным. При этом на брус действуют: сила $\boldsymbol{P}$, приложенная в середине бруса, сила давления $\boldsymbol{F}$ цилиндра, приложенная в точке E перпендикулярно к брусу (но ни в коем случае не сила $\boldsymbol{Q}$, которая приложена к цилиндру, а не к брусу!) и реакция заделки, которую представим составляющими X_A, Y_A и парой с моментом M_A (см. рис. 62).

Чтобы составить условия равновесия (33), вычисляем проекции всех сил на оси координат и их моменты относительно центра A (см. таблицу).

F_k	X_A	Y_A	F	P	M_A
F_{kx}	X_A	0	$F\cos\alpha$	0	0
F_{ky}	0	Y_A	$-F\sin\alpha$	$-P$	0
$m_A(F_k)$	0	0	$-Fa$	$-P\dfrac{b}{2}\sin\alpha$	M_A

Для определения давления $\boldsymbol{F}$ разложим силу $\boldsymbol{Q}$, приложенную в центре цилиндра, на составляющие $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{N}$, перпендикулярные к брусу и к стене (рис. 66, *б*). Из полученного параллелограмма находим:

$$F = \frac{Q}{\sin\alpha}.$$

Теперь, составляя условия равновесия и подставляя одновременно вместо F найденное значение, получим:

$$X_A + Q \operatorname{ctg} \alpha = 0, \quad Y_A - Q - P \equiv 0,$$

$$M_A - Q \frac{a}{\sin \alpha} - P \frac{b}{2} \sin \alpha = 0.$$

Решая эти уравнения, найдем:

$$X_A = -Q \operatorname{ctg} \alpha = -103{,}8 \text{ кГ}, \quad Y_A = P + Q = 280 \text{ кГ},$$

$$M_A = Q \frac{a}{\sin \alpha} + P \frac{b}{2} \sin \alpha = 96{,}9 \text{ кГм}.$$

Реакция заделки слагается из силы $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$ и пары с моментом M_A.

В заключение еще раз подчеркиваем вытекающий из хода решения задач основной вывод: в условия равновесия входят только силы, *непосредственно приложенные* к телу, равновесие которого рассматривается.

Задача 25. К столбу с перекладиной (рис. 67) прикреплены два блока C и D, через которые перекинута веревка, удерживающая груз весом $Q = 240$ кГ. Нижний конец веревки закреплен в точке B. Столб удерживается в равновесии растяжкой EE_1. Пренебрегая весом столба с перекладиной и трением в блоках, определить натяжение растяжки и реакцию заделки A, рассматривая ее как шарнирную (т. е. как нежесткую, позволяющую столбу поворачиваться вокруг точки A). Расстояние блока C от столба равно 1 *м*; остальные размеры указаны на чертеже.

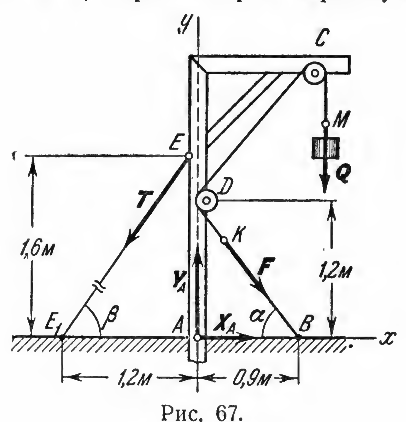


Рис. 67.

Решение. Отбрасывая связи, рассмотрим равновесие всей конструкции, т. е. столба с перекладиной, блоками и частью веревки $KDCM$, охватывающей блоки (см. задачу 10; конструкция является жесткой и может рассматриваться как одно абсолютно твердое тело). На конструкцию действуют следующие внешние силы: $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{F}$— натяжение ветвей веревки в точках M и K и реакции связей $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{X}_A$, $\boldsymbol{Y}_A$. Внутренние силы, как взаимно уравновешенные, на чертеже не изображаем. Так как при отсутствии трения в блоках натяжение веревки всюду одинаково, то по модулю $F = Q$.

Вычисляем проекции всех сил на оси координат и их моменты относительно центра A, введя углы α и β (см. таблицу):

$\boldsymbol{F}_k$	$\boldsymbol{Q}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{X}_A$	$\boldsymbol{Y}_A$
F_{kx}	0	$F \cos \alpha$	$-T \cos \beta$	X_A	0
F_{ky}	$-Q$	$-F \sin \alpha$	$-T \sin \beta$	0	Y_A
$m_A(\boldsymbol{F}_k)$	$-Q \cdot 1{,}0$	$-F \cdot 0{,}9 \sin \alpha$	$T \cdot 1{,}2 \sin \beta$	0	0

Из прямоугольных треугольников AEE_1 и ADB находим, что $EE_1 = 2{,}0$ *м*, $DB = 1{,}5$ *м*. Отсюда $\sin\alpha = \sin\beta = 0{,}8$; $\cos\alpha = \cos\beta = 0{,}6$. Следовательно, в данном случае $\alpha = \beta$. Теперь составляем условия равновесия, заменяя одновременно тригонометрические функции найденными значениями и считая $F = Q$. Получим:

$$0{,}6\,Q - 0{,}6\,T + X_A = 0,$$
$$-Q - 0{,}8\,Q - 0{,}8\,T + Y_A = 0,$$
$$-1{,}0\,Q - 0{,}72\,Q + 0{,}96\,T = 0.$$

Решая эти уравнения, найдем окончательно:

$$T = \frac{43}{24}Q = 430\ кГ,\quad X_A = \frac{19}{40}Q = 114\ кГ,\quad Y_A = \frac{97}{30}Q = 776\ кГ.$$

Обращаем внимание на следующие выводы: 1) при составлении условий равновесия всякую конструкцию, которая после освобождения от связей остается жесткой, можно рассматривать как абсолютно твердое тело; 2) внутренние силы, действующие на части конструкции (в рассмотренной задаче натяжения ветви DC веревки, действующие на блоки C и D), не входят в условия равновесия, как силы взаимно уравновешенные.

§ 26. Равновесие систем тел. Статический расчет инженерных сооружений во многих случаях сводится к рассмотрению условий равновесия конструкции из системы тел, соединенных какими-нибудь связями. Связи, соединяющие части данной конструкции, будем называть *внутренними*, в отличие от *внешних* связей, скрепляющих конструкцию с телами, в нее не входящими (например, с опорами).

Если после отбрасывания внешних связей (опор) конструкция остается жесткой, то для нее задачи статики решаются как для абсолютно твердого тела. Подобные примеры были рассмотрены в задачах 23 и 25 (см. рис. 65 и 67).

Однако могут встречаться такие инженерные конструкции, которые после отбрасывания внешних связей не остаются жесткими. Примером такой конструкции является трехшарнирная арка (рис. 68). Если отбросить опоры A и B, то арка не будет жесткой: ее части могут поворачиваться вокруг шарнира C.

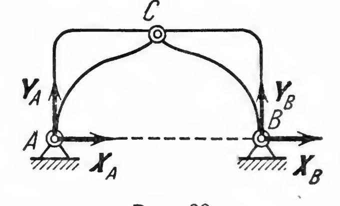


Рис. 68.

На основании принципа отвердевания система сил, действующих на такую конструкцию, должна при равновесии удовлетворять условиям равновесия твердого тела. Но эти условия, как указывалось, будучи необходимыми, не будут являться достаточными, поэтому из них нельзя будет определить все неизвестные величины. Для решения задачи необходимо будет дополнительно рассмотреть равновесие какой-нибудь одной или нескольких частей конструкции.

Например, составляя условия равновесия для сил, действующих на трехшарнирную арку (см. рис. 68), мы получим три уравнения

с четырьмя неизвестными X_A, Y_A, X_B, Y_B. Рассмотрев дополнительно условия равновесия левой (или правой) ее половины, мы получим еще три уравнения, содержащие два новых неизвестных X_C, Y_C, на рис. 68 не показанных. Решая полученную систему шести уравнений, найдем все шесть неизвестных (см. задачу 26).

Другой способ решения подобных задач состоит в том, что конструкцию сразу расчленяют на отдельные тела и составляют условия равновесия каждого из тел, рассматривая его как свободное (см. задачу 27). При этом реакции внутренних связей будут попарно равны по модулю и противоположны по направлению. Для конструкции из n тел, на каждое из которых действует произвольная плоская система сил, получится таким путем $3n$ уравнений, позволяющих найти $3n$ неизвестных (при других системах сил число уравнений соответственно изменится). Если для данной конструкции число всех реакций связей будет больше числа уравнений, в которые эти реакции входят, то конструкция будет статически неопределимой.

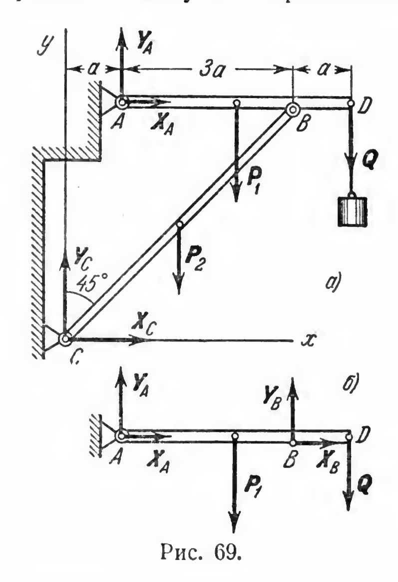


Рис. 69.

Задача 26. Кронштейн состоит из горизонтального бруса AD (рис. 69, *а*) весом $P_1 = 15$ *кГ*, прикрепленного к стене шарниром, и подкоса CB весом $P_2 = 12$ *кГ*, который с брусом AD и со стеной также соединен шарнирами (все размеры показаны на чертеже). К концу D бруса подвешен груз весом $Q = 30$ *кГ*. Определить реакции шарниров A и C, считая брус и подкос однородными.

Решение. Отбрасывая внешние связи, рассматриваем равновесие всего кронштейна в целом. На него действуют заданные силы $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{Q}$ и реакции связей $\boldsymbol{X}_A$, $\boldsymbol{Y}_A$; $\boldsymbol{X}_C$, $\boldsymbol{Y}_C$. Кронштейн, освобожденный от внешних связей, не образует жесткой конструкции (брусья могут поворачиваться вокруг шарнира B), но по принципу отвердевания действующие на него силы при равновесии должны удовлетворять условиям равновесия статики. Составляя эти условия, найдем:

$$\sum F_{kx} \equiv X_A + X_C = 0,$$
$$\sum F_{ky} \equiv Y_A + Y_C - P_1 - P_2 - Q = 0,$$
$$\sum m_A(\boldsymbol{F}_k) \equiv X_C \cdot 4a - Y_C a - P_2 a - P_1 \cdot 2a - Q \cdot 4a = 0.$$

Полученные три уравнения содержат, как видим, четыре неизвестных X_A, Y_A, X_C, Y_C. Для решения задачи рассмотрим дополнительно условия равновесия бруса AD (рис. 69, *б*). На него действуют силы $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{Q}$ и реакции $\boldsymbol{X}_A$, $\boldsymbol{Y}_A$, $\boldsymbol{X}_B$, $\boldsymbol{Y}_B$. Недостающее нам четвертое уравнение составим, беря моменты

этих сил относительно центра B (тогда в уравнение не войдут новые неизвестные X_B, Y_B). Получим:

$$\sum m_B(F_k) \equiv -Y_A \cdot 3a + P_1 a - Qa = 0.$$

Решая теперь систему четырех составленных уравнений (начиная с последнего), найдем:

$$Y_A = \frac{1}{3}(P_1 - Q) = -5\,кГ, \qquad Y_C = \frac{2}{3}P_1 + P_2 + \frac{4}{3}Q = 62\,кГ,$$

$$X_C = \frac{2}{3}P_1 + \frac{1}{2}P_2 + \frac{4}{3}Q = 56\,кГ, \quad X_A = -X_C = -56\,кГ.$$

Из полученных результатов видно, что силы Y_A и X_A имеют направления, противоположные показанным на чертеже. Реакции шарнира B, если их надо определить, найдутся из уравнений проекций на оси x и y сил, действующих на брус AD, и будут равны: $X_B = -X_A$; $Y_B = P_1 + Q - Y_A = 50\,кГ$.

Обращаем внимание на то, что при решении систем уравнений значение каждой из величин должно подставляться в последующее уравнение с тем знаком, с которым эта величина получилась при решении предыдущего уравнения. В данном случае, например, в последнее равенство вместо Y_A подставляется $-5\,кГ$, а не $5\,кГ$. По этой причине не следует, как это иногда делают, найдя, что $Y_A = -5\,кГ$, изменять направление силы на чертеже и считать $Y_A = 5\,кГ$, так как это может привести к ошибкам при решении последующих уравнений равновесия.

Как мы видим, при решении задач статики не всегда надо составлять *все* условия равновесия для рассматриваемого тела. *Если в задаче не требуется определять реакции некоторых связей, то надо пытаться сразу составлять такие уравнения, в которые эти неизвестные реакции не будут входить.* Так мы и поступили в данной задаче при рассмотрении равновесия бруса AD, составляя только одно уравнение моментов относительно центра B.

Задача 27. Горизонтальная балка AB весом $Q = 20\,кГ$ прикреплена к стене шарниром A и опирается на опору C (рис. 70, *а*). К ее концу B шарнирно прикреплен брус BE весом $P = 40\,кГ$, опирающийся на выступ D. При этом $CB = \frac{1}{3}AB$ и $DE = \frac{1}{3}BE$; угол $\alpha = 45°$. Определить реакции опор, считая балку и брус однородными.

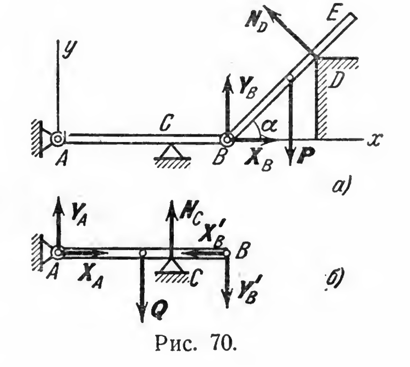


Рис. 70.

Решение. Расчленяя систему на две части, рассматриваем равновесие бруса BE и балки AB в отдельности. На брус BE, если его рассматривать как свободный (рис. 70, *а*), действуют сила P и реакции связей N_D, X_B, Y_B. Вводя обозначение $BE = a$ и составляя для этих сил условия равновесия (33), получим:

$$\sum F_{kx} \equiv X_B - N_D \sin\alpha = 0,$$

$$\sum F_{ky} \equiv Y_B - P + N_D \cos\alpha = 0,$$

$$\sum m_B(F_k) \equiv N_D \frac{2}{3}a - P\frac{a}{2}\cos\alpha = 0.$$

Решая эти уравнения, найдем:

$$N_D = \frac{3}{4} P \cos\alpha = 21{,}2\ кГ,\quad X_B = \frac{3}{8} P \sin 2\alpha = 15\ кГ,$$

$$Y_B = P\left(1 - \frac{3}{4}\cos^2\alpha\right) = 25\ кГ.$$

На балку AB, если ее рассматривать как свободную, действуют сила $\boldsymbol{Q}$, реакции внешних связей $\boldsymbol{N}_C$, $\boldsymbol{X}_A$, $\boldsymbol{Y}_A$ и давления $\boldsymbol{X}'_B$ и $\boldsymbol{Y}'_B$ бруса BE, передаваемые через шарнир B (рис. 70, *б*). При этом, по аксиоме 4, силы $\boldsymbol{X}'_B$ и $\boldsymbol{Y}'_B$ должны быть направлены противоположно $\boldsymbol{X}_B$ и $\boldsymbol{Y}_B$; по модулю же $X'_B = X_B$, $Y'_B = Y_B$.

Вводя обозначение $AB = b$ и составляя для сил, действующих на балку, условия равновесия (34), получим:

$$\sum F_{kx} \equiv X_A - X'_B = 0,$$

$$\sum m_A(\boldsymbol{F}_k) \equiv -Y'_B b + N_C \cdot \frac{2}{3} b - Q\frac{b}{2} = 0,$$

$$\sum m_C(\boldsymbol{F}_k) \equiv -Y_A \cdot \frac{2}{3} b + Q\frac{b}{6} - Y'_B\frac{b}{3} = 0.$$

Полагая в этих уравнениях $X'_B = X_B$ и $Y'_B = Y_B$ и решая их, найдем:

$$X_A = X_B = 15\ кГ,\quad Y_A = \frac{1}{4} Q - \frac{1}{2} Y_B = -7{,}5\ кГ,$$

$$N_C = \frac{3}{4} Q + \frac{3}{2} Y_B = 52{,}5\ кГ.$$

Из полученных результатов видно, что все реакции, кроме $\boldsymbol{Y}_A$, имеют направления, показанные на рис. 70, реакция же Y_A фактически направлена вниз.

При решении задач этим путем важно иметь в виду, что *если давление какого-нибудь одного тела на другое изображено силой $\boldsymbol{R}$ или составляющими $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$, то на основании аксиомы 4 давление второго тела на первое должно изображаться силой $\boldsymbol{R}'$, направленной противоположно $\boldsymbol{R}$ (причем по модулю $R' = R$), или составляющими $\boldsymbol{X}'$, $\boldsymbol{Y}'$, направленными противоположно $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ (причем по модулю $X' = X$, $Y' = Y$).*

Заметим, что при применении этого способа решения нередко делают одну из следующих двух ошибок: 1) силы $\boldsymbol{X}'$ и $\boldsymbol{Y}'$ не направляют противоположно $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$, в результате решение получается неверным; 2) силы $\boldsymbol{X}'$ и $\boldsymbol{Y}'$ направляют верно (т. е. противоположно $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$), но при решении уравнений считают $X' = -X$, $Y' = -Y$; в результате решение также получают неверным, так как по существу здесь делается та же ошибка, что и в первом случае.

Во избежание подобных ошибок рекомендуется, как правило, для конструкций, состоящих из двух тел, пользоваться тем способом решения, который был применен в задаче 26. К тому же этот способ приводит, обычно, к более простым системам уравнений, так как в условия равновесия всей конструкции в целом (см. решение задачи 26) не входят внутренние силы.

Задача 28. На трехшарнирную арку (рис. 71) действует горизонтальная сила $\boldsymbol{F}$. Показать, что при определении реакций опор A и B нельзя переносить точку приложения силы $\boldsymbol{F}$ вдоль ее линии действия в точку E.

Решение. Освобождая арку от внешних связей (опоры A и B), мы получаем изменяемую конструкцию, которую нельзя считать абсолютно

твердым телом. Следовательно, переносить точку приложения силы, действующей на такую конструкцию, вдоль линии DE нельзя даже при определении условий равновесия конструкции (см. § 3, следствие из 1-й и 2-й аксиом).

Убедимся в этом путем непосредственного решения задачи, пренебрегая весом арки. Рассмотрим сначала правую половину арки как свободную. На

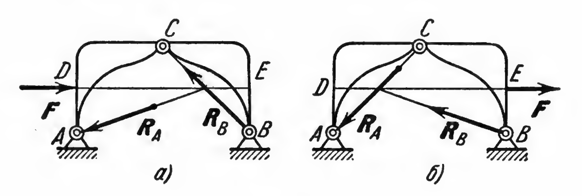


Рис. 71.

нее будут действовать только две силы: реакции $\boldsymbol{R}_B$ и $\boldsymbol{R}_C$ шарниров B и C (сила $\boldsymbol{R}_C$ на чертеже не показана). При равновесии эти силы должны быть направлены вдоль одной прямой, т. е. по линии BC. Следовательно, реакция $\boldsymbol{R}_B$ направлена вдоль BC.

Рассматривая теперь равновесие всей арки в целом, найдем, что на нее действуют три силы: заданная сила $\boldsymbol{F}$ и реакции опор $\boldsymbol{R}_B$ (направление которой мы нашли) и $\boldsymbol{R}_A$. По теореме о трех силах, линии действия этих сил должны при равновесии пересекаться в одной точке; отсюда находим направление реакции $\boldsymbol{R}_A$. Модули реакций $\boldsymbol{R}_A$ и $\boldsymbol{R}_B$ найдутся из соответствующего силового треугольника.

Если же приложить силу $\boldsymbol{F}$ в точке E и, рассуждая аналогичным образом, проделать необходимые построения (рис. 71, *б*), то мы убедимся, что в этом случае реакции опор $\boldsymbol{R}_A$ и $\boldsymbol{R}_B$ окажутся другими и по модулю и по направлению.

§ 27*. Определение внутренних усилий. Внутренними усилиями в каком-нибудь сечении тела или конструкции (балки, арки и др.) называют силы, с которыми части тела, разделенные этим сечением, действуют друг на друга. Метод определения внутренних усилий аналогичен методу, применяемому при изучении равновесия систем тел. Сначала рассматривают равновесие всего тела (конструкции) в целом и определяют реакции внешних связей. Затем сечением, в котором требуется найти внутренние усилия, разделяют тело на две части и рассматривают равновесие одной из них. При этом если система действующих на тело внешних сил плоская, то действие отброшенной части заменится в общем случае плоской системой *распределенных по сечению сил;* эти силы, как и в случае жесткой заделки (см. рис. 62), представляют одной приложенной в центре сечения силой с двумя наперед неизвестными составляющими X, Y и парой с наперед неизвестным моментом M. Пример расчета дан в задаче 29.

Задача 29. Считая длину балки $AB = 1$ *м* (задача 27, рис. 70), найти усилия в поперечном сечении балки, отстоящем от конца A на расстоянии $AE = 0{,}6$ *м*.

Решение. Внешними связями для балки являются опора C и шарниры A и B. Реакции этих связей найдены в ходе решения задачи 27. Рассечем балку сечением ab и рассмотрим равновесие ее левой части (рис. 72).

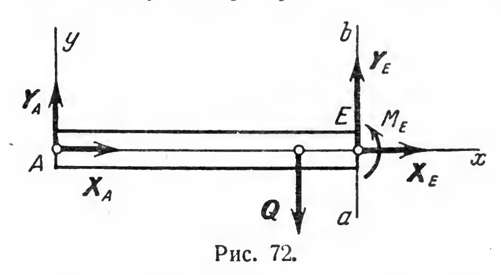


Рис. 72.

Действие отброшенной части, согласно сказанному выше, заменяем двумя силами X_E, Y_E, приложенными в центре E сечения, и парой с моментом M_E. Составляя для действующих на рассматриваемую часть балки сил X_A, Y_A, Q, X_E, Y_E и пары с моментом M_E условия равновесия (36), получим

$$\sum F_{kx} \equiv X_A + X_E = 0, \qquad \sum F_{ky} \equiv Y_A + Y_E - Q = 0,$$

$$\sum m_A(F_k) \equiv M_E + 0{,}6Y_E - 0{,}5Q = 0.$$

По данным задачи 27 $Q = 20$ *кГ*, $X_A = 15$ *кГ*, $Y_A = -7{,}5$ *кГ*. Пользуясь этими значениями, найдем из составленных уравнений:

$$X_E = -15 \text{ кГ}, \quad Y_E = 27{,}5 \text{ кГ}, \quad M_E = -6{,}5 \text{ кГм}.$$

Таким образом, на левую часть балки в сечении ab действуют: 1) *продольная сила* X_E, вызывающая в данном случае сжатие балки; 2) *поперечная сила* Y_E, стремящаяся сдвинуть примыкающую к сечению часть балки вдоль линии ab; 3) пара с моментом M_E, называемым *изгибающим моментом*, которая в данном случае вызывает растяжение верхних волокон балки и сжатие нижних.

§ 28*. Распределенные силы. В инженерных расчетах часто приходится встречаться с нагрузками, распределенными вдоль данной поверхности по тому или иному закону. Рассмотрим некоторые простейшие примеры распределенных сил, лежащих в одной плоскости.

Плоская система распределенных сил характеризуется ее *интенсивностью* q, т. е. величиной силы, приходящейся на единицу длины нагруженного отрезка. Измеряется интенсивность в ньютонах или в килограммах, деленных на метры (*н/м* или *кГ/м*).

1) Силы, равномерно распределенные вдоль отрезка прямой (рис. 73, *а*). Для такой системы сил интенсивность q является величиной постоянной. При статических расчетах эту

систему сил можно заменить равнодействующей $\boldsymbol{Q}$. По модулю

$$Q = aq. \tag{39}$$

Приложена сила $\boldsymbol{Q}$ в середине отрезка AB.

2) Силы, распределенные вдоль отрезка прямой по линейному закону (рис. 73, *б*). Примером такой нагрузки могут служить силы давления воды на плотину, имеющие наибольшую

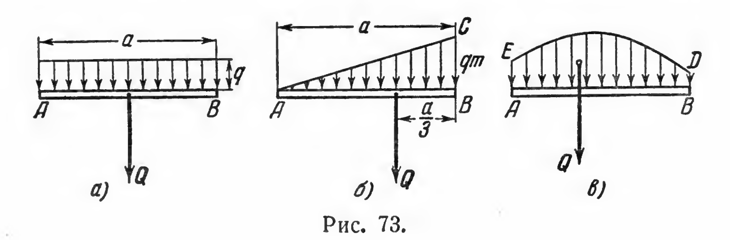


Рис. 73.

величину у дна и падающие до нуля у поверхности воды. Для этих сил интенсивность q является величиной переменной, растущей от нуля до максимального значения q_m. Равнодействующая $\boldsymbol{Q}$ таких сил будет определяться аналогично равнодействующей сил тяжести, действующих на однородную треугольную пластину ABC. Так как вес однородной пластины пропорционален ее площади, то по модулю

$$Q = \frac{1}{2}\,aq_m. \tag{40}$$

Приложена сила $\boldsymbol{Q}$ на расстоянии $\frac{a}{3}$ от стороны BC треугольника ABC (см. § 57, п. 2).

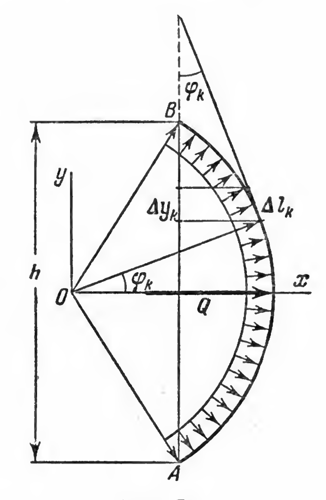


Рис. 74.

3) Силы, распределенные вдоль отрезка прямой по произвольному закону (рис. 73, *в*). Равнодействующая $\boldsymbol{Q}$ таких сил, по аналогии с силой тяжести, будет по модулю равна площади фигуры $ABDE$, измеренной в соответствующем масштабе, и будет проходить через центр тяжести этой площади (вопрос об определении центров тяжести площадей будет рассмотрен в § 55).

4) Силы, равномерно распределенные по дуге окружности (рис. 74). Примером таких сил могут служить силы гидростатического давления на боковые стенки цилиндрического сосуда. Из симметрии ясно, что сумма проекций этих сил на ось Oy,

перпендикулярную оси симметрии Ox, равна нулю. Следовательно, их равнодействующая $\boldsymbol{Q}$ направлена вдоль оси Ox. По модулю $Q=Q_x=\sum(q\Delta l_k)\cos\varphi_k$, где $q\Delta l_k$ — сила, действующая на элемент дуги длиной Δl_k, φ_k — угол, образуемый этой силой с осью Ox. Но из чертежа видно, что $\Delta l_k\cos\varphi_k=\Delta y_k$. Тогда, вынося общий множитель q за скобку (за знак суммы), получим: $Q=\sum q\Delta y_k=q\sum\Delta y_k=qAB$. Таким образом,

$$Q=qh, \qquad (41)$$

где h — длина хорды, стягиваемой дугою $\smile{AB}$.

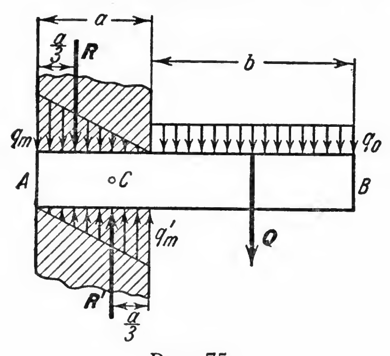


Рис. 75.

Задача 30. На консольную балку AB, размеры которой указаны на чертеже (рис. 75), действует равномерно распределенная нагрузка интенсивности q_0 *кГ/м*. Пренебрегая весом балки и считая, что силы давления на заделанный конец распределены по линейному закону, определить величины наибольших интенсивностей q_m и q'_m этих сил, если $b=2a$ (сравн. со схемой задачи 14, § 17).

Решение. Заменяем распределенные силы их равнодействующими $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{R}'$, где согласно формулам (39) и (40)

$$Q=q_0b,\quad R=\frac{1}{2}q_ma,\quad R'=\frac{1}{2}q'_ma,$$

и составляем условия равновесия (37) для действующих на балку параллельных сил:

$$\sum F_{ky}\equiv Q+R-R'=0,\quad \sum m_C(F_k)\equiv R\frac{a}{3}-Q\left(\frac{b}{2}+\frac{a}{3}\right)=0.$$

Подставляя сюда вместо Q, R и R' их значения и решая полученные уравнения, найдем окончательно

$$q_m=\left(3\frac{b^2}{a^2}+2\frac{b}{a}\right)q_0;\quad q'_m=\left(3\frac{b^2}{a^2}+4\frac{b}{a}\right)q_0.$$

При $b=2a$ получим $q_m=16q_0$, $q'_m=20q_0$.

Задача 31. Цилиндрический баллон, высота которого равна H, а внутренний диаметр d, наполнен газом под давлением p *кГ/м²*. Толщина цилиндрических стенок баллона равна a. Определить испытываемые этими стенками растягивающие напряжения в направлениях 1) продольном и 2) поперечном (напряжение равно отношению растягивающей силы к площади поперечного сечения).

Решение. 1) Рассечем цилиндр плоскостью, перпендикулярной его оси, на две части и рассмотрим равновесие одной из них (рис. 76, *а*). На нее в направлении оси цилиндра действуют: сила давления на дно $F=\frac{\pi d^2}{4}p$ и распределенные по площади сечения силы (действие отброшенной половины), равнодействующую которых обозначим $\boldsymbol{Q}$. При равновесии

$Q = F = \frac{\pi d^2}{4} p$. Считая приближенно площадь поперечного сечения равной $\pi d a$, получим для растягивающего напряжения σ_1 значение

$$\sigma_1 = \frac{Q}{\pi d a} = \frac{1}{4} \frac{d}{a} p \text{ кГ/м}^2.$$

2) Рассечем теперь цилиндрическую поверхность плоскостью, проходящей через ось цилиндра, на две другие половины и рассмотрим равновесие одной из них, считая, что все силы приложены к ней в плоскости среднего сечения (рис. 76, *б*). На эту половину цилиндра действуют: а) равномерно распределенные по дуге полуокружности силы давления с интенсивностью $q = pH$; согласно формуле (41) равнодействующая этих сил $R = qd = pHd$; б) распределенные по сечениям A и B силы (действие отброшенной половины), равнодействующие которых обозначим $\boldsymbol{S}_1$ и $\boldsymbol{S}_2$, причем ввиду симметрии $S_1 = S_2 = S$.

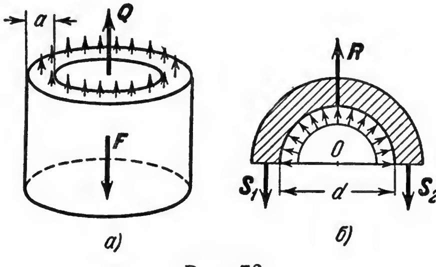
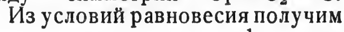


Рис. 76.


Из условий равновесия получим $S_1 + S_2 = R$, откуда $S = \frac{1}{2} pdH$. Так как площадь сечения, по которому распределена сила S, равна aH (площадью сечения дна цилиндра пренебрегаем), то отсюда для растягивающего напряжения σ_2 находим:

$$\sigma_2 = \frac{S}{aH} = \frac{1}{2} \frac{d}{a} p \text{ кГ/м}^2.$$

Как видим, растягивающее напряжение в поперечном направлении вдвое больше, чем в продольном.

ГЛАВА V

ЭЛЕМЕНТЫ ГРАФИЧЕСКОЙ СТАТИКИ

§ 29. Силовой и веревочный многоугольники. Приведение плоской системы сил к двум силам. При инженерных расчетах часто пользуются графическими методами, которые хотя и являются менее точными, чем аналитические, позволяют получить результаты более быстрым и наглядным путем. Графический метод решения задач статики для плоской системы сил основан на построениях силового и веревочного многоугольников.

Пусть на твердое тело действует система трех сил $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$ (рис. 77, *а*). Фигура $abcd$, построенная из этих сил (рис. 77, *б*), называется, как нам известно, *силовым многоугольником*[1]). Напомним,

---

[1]) Силы в силовом многоугольнике будем обозначать цифрами (номерами): вместо $\boldsymbol{F}_1$ пишем *1*, вместо $\boldsymbol{F}_2$ пишем *2* и т. д.

что когда конец последней силы совпадает с началом первой, силовой многоугольник называется *замкнутым*, а в противном случае — *разомкнутым*.

Возьмем в плоскости силового многоугольника произвольную точку O (полюс), не лежащую на сторонах многоугольника или на их продолжениях, и соединим ее с вершинами многоугольника лучами Oa, Ob, Oc, Od, которые пронумеруем цифрами *01, 12, 23, 30* (читается: «нуль — один», «один — два» и т. д.; эти цифры указывают номера сил, сходящихся в вершине, куда проведен соответствующий луч).

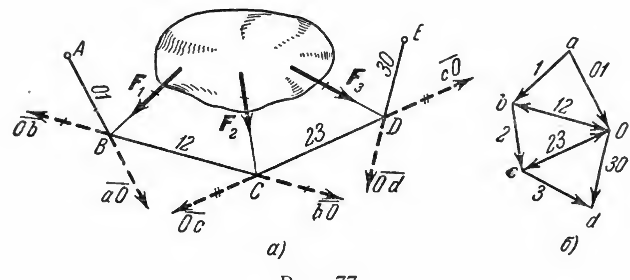


Рис. 77.

Теперь возьмем на основном чертеже (рис. 77, *а*) произвольную точку A и проведем из нее прямую, параллельную лучу *01*, до пересечения ее с линией действия силы F_1 в точке B. Из точки B проведем прямую, параллельную лучу *12*, до пересечения ее с линией действия силы F_2 в точке C и т. д. Построенная таким путем фигура $ABCDE$ называется ***веревочным многоугольником***. Название это объясняется тем, что если веревку закрепить в точках A и E и приложить к ней в точках B, C и D силы F_1, F_2, F_3, то она при равновесии примет форму ломаной $ABCDE$. Веревочный многоугольник называется *замкнутым*, когда его крайние стороны (в нашем случае AB и DE) сливаются, т. е. будут направлены вдоль одной прямой. В противном случае многоугольник называется *разомкнутым*.

Пользуясь проделанными построениями, можно любую плоскую систему сил заменить двумя силами, направленными по крайним сторонам (AB и DE) веревочного многоугольника.

Чтобы доказать это, рассмотрим сначала какую-нибудь одну из действующих на тело сил, например, силу F_1 (рис. 77, *а*). Когда мы изображаем эту силу отдельно в виде вектора $\overline{ab}$ (рис. 77, *б*), а затем соединяем точки a и b с произвольной точкой O, то мы тем самым разлагаем силу F_1 на две силы $\overline{aO}$ и $\overline{Ob}$, так как из силового треугольника aOb видно, что $F_1 = \overline{ab} = \overline{aO} + \overline{Ob}$ (рис. 77, *б*). Но по аксиоме параллелограмма сил, если $F_1 = \overline{aO} + \overline{Ob}$, то действующую

на тело силу $\boldsymbol{F}_1$ можно заменить силами, равными $\overline{aO}$ и $\overline{Ob}$ и приложенными в любой точке на линии действия силы $\boldsymbol{F}_1$, в частности, в точке B (рис. 77, *а*). При этом, поскольку в веревочном многоугольнике сторона AB проводилась параллельно aO, а BC — параллельно bO, то сила $\overline{aO}$ пойдет вдоль стороны AB многоугольника, а сила $\overline{Ob}$ — вдоль BC. Аналогичный результат получим для всех других сил.

Таким образом, на рис. 77, *б* проведением лучей Oa, Ob и т. д. каждая из сил $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$ разлагается на две:

$$\boldsymbol{F}_1 = \overline{ab} = \overline{aO} + \overline{Ob}, \quad \boldsymbol{F}_2 = \overline{bc} = \overline{bO} + \overline{Oc}, \quad \boldsymbol{F}_3 = \overline{cd} = \overline{cO} + \overline{Od}.$$

Силы, равные $\overline{aO}$ и $\overline{Ob}$, заменяют силу $\boldsymbol{F}_1$, если их приложить в точке B, полученной при построении веревочного многоугольника (рис. 79, *а*). Точно так же заменим силы $\boldsymbol{F}_2$ и $\boldsymbol{F}_3$ силами $\overline{bO}$ и $\overline{Oc}$ и $\overline{cO}$ и $\overline{Od}$, приложив их соответственно в точках C и D. Теперь заметим, что направленные по линиям BC и CD силы $\overline{Ob}$, $\overline{bO}$ и $\overline{Oc}$, $\overline{cO}$ взаимно уравновешиваются, так как из рис. 79, *б* видно, что $\overline{Ob} = -\overline{bO}$ и $\overline{Oc} = -\overline{cO}$; следовательно, эти силы можно отбросить. В результате система сил $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$ действительно будет заменена двумя силами $\overline{aO}$ и $\overline{Od}$, направленными по крайним сторонам AB и DE веревочного многоугольника.

Аналогичный результат получится при любом числе сил.

§ 30. Графическое определение равнодействующей. Если силовой многоугольник, построенный для данной плоской системы сил, не замкнут (главный вектор $\boldsymbol{R} \neq 0$), то эта система сил согласно § 23 приводится к одной равнодействующей.

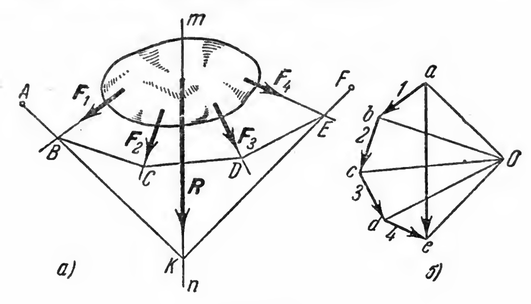


Рис. 78.

Графически равнодействующую можно найти, последовательно применяя правило параллелограмма, но такой путь при большом числе сил будет слишком громоздким. Проще задача решается построением силового и веревочного многоугольников.

Пусть на твердое тело действует система сил F_1, F_2, F_3, F_4 (рис. 78, *a*). Построим из этих сил в выбранном масштабе силовой многоугольник *abcde* (рис. 78, *б*). Его замыкающая сторона *ae* определяет модуль и направление равнодействующей **R**. Для нахождения точки приложения равнодействующей соединяем вершины *a, b, c, d, e* с произвольным полюсом *O* и строим веревочный многоугольник *ABCDEF*, проводя линии $AB \parallel aO$, $BC \parallel bO$ и т. д. (рис. 78, *a*). По доказанному заданные силы можно заменить двумя силами, направленными по линиям *AB* и *EF*. Следовательно, равнодействующая этих сил (а значит, и сил F_1, F_2, F_3, F_4) проходит через точку пересечения прямых *AB* и *EF*. Таким образом, построив веревочный многоугольник и продолжив его крайние стороны до их пересечения, мы найдем точку *K*, через которую проходит равнодействующая слагаемых сил. Проведя теперь через *K* прямую *mn*, параллельную *ae*, и приложив в любой ее точке силу **R**, найдем искомую равнодействующую.

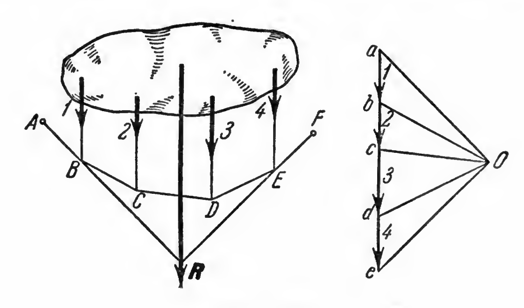


Рис. 79.

Аналогичное построение для случая параллельных сил показано на рис. 79. Силовой многоугольник в этом случае превращается в отрезок прямой и равнодействующая $R = \overline{ae}$.

§ 31. Графическое определение результирующей пары. Если силовой многоугольник, построенный для данной плоской системы сил, замкнут, а веревочный многоугольник разомкнут, то эта система сил приводится к одной результирующей паре.

В самом деле, когда силовой многоугольник *abcde*, построенный для заданных сил F_1, F_2, F_3, F_4, замкнут (рис. 80), то лучи *aO* и *Oe* сливаются [1]). Тогда крайние стороны *AB* и *EF* веревочного многоугольника, если он не замкнут, будут параллельны.

---

[1]) В этом случае мы лучи *Oa*, *Ob*, ... обозначаем числами *12, 23, 34, 41*, так как в замкнутом силовом многоугольнике в любой из вершин сходится по две силы.

По доказанному в § 29, заданные силы можно заменить двумя силами, равными в данном случае $\overline{aO}$ и $\overline{Oa}$ (так как $\overline{Oe}=\overline{Oa}$) и направленными вдоль прямых AB и EF. Таким образом, система сил $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$, $\boldsymbol{F}_4$ действительно оказывается замененной парой ($\overline{aO}$, $\overline{Oa}$) с плечом d. Момент этой пары равен $Oa \cdot d$, где Oa измеряется в

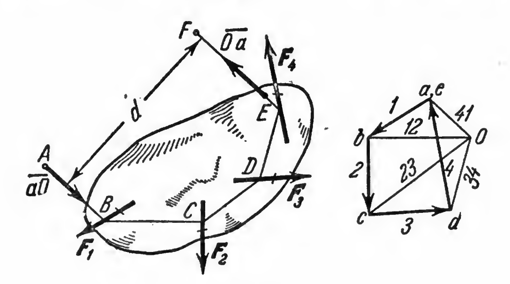


Рис. 80.

масштабе сил, который был выбран при построении силового многоугольника, а d измеряется в масштабе длин, который был выбран при изображении основного чертежа.

§ 32. Графические условия равновесия плоской системы сил. Из результатов, полученных в предыдущих параграфах, видно, что *для равновесия произвольной плоской системы сил, действующих на твердое тело, необходимо и достаточно, чтобы силовой и веревочный многоугольники, построенные для этих сил, были замкнутыми* (графические условия равновесия).

В самом деле, если любая из названных фигур не будет замкнутой, то данная система сил будет приводиться или к равнодействующей, или к паре, и равновесия не будет. Если же обе эти фигуры будут замкнутыми, то действующие на тело силы будут, очевидно, приводиться к двум силам, равным по модулю и направленным вдоль одной прямой в противоположные стороны (рис. 80 при $d=0$), и тело при этом будет в равновесии.

§ 33. Определение опорных реакций. Найдем графическим методом реакции опор A и K фермы, показанной на рис. 81, *а*. Сначала, выбрав соответствующий масштаб длин (например, 0,4 *м* в 1 *см*), изображаем на чертеже ферму и приложенные к ней заданные силы $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$. Реакции опор обозначаем $\boldsymbol{R}_4$ и $\boldsymbol{R}_5$; при этом направление $\boldsymbol{R}_4$ нам известно, направление $\boldsymbol{R}_5$ нам неизвестно. Теперь, выбрав масштаб для изображения сил (например, 0,5 *Т* в 1 *см*), строим из действующих на ферму сил силовой многоугольник (рис. 81, *б*), начиная с сил *1, 2, 3* ($F_1=\overline{ab}$, $F_2=\overline{bc}$, $F_3=\overline{cd}$). Построение обрывается

изображением направления силы $\boldsymbol{R}_4$, так как модуль R_4 нам не известен (не известна точка *e*). Известно только, что конец силы $\boldsymbol{R}_5$ будет в точке *a*, поскольку силовой многоугольник при равновесии должен быть замкнутым.

Для дальнейшего решения, выбрав полюс *O*, проводим лучи *12*, *23*, *34*, *51*. Направление луча *45* нам не известно, так как не известно положение вершины *e* силового многоугольника. Чтобы найти этот луч, строим на рис. 81, *а* веревочный многоугольник, *начиная его*

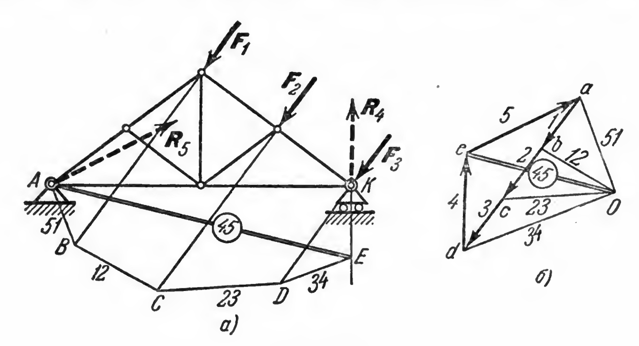


Рис. 81.

построение от точки A, где приложена неизвестная по направлению сила $\boldsymbol{R}_5$ (в противном случае мы не сумеем этот многоугольник замкнуть, так как никакой другой точки на линии действия

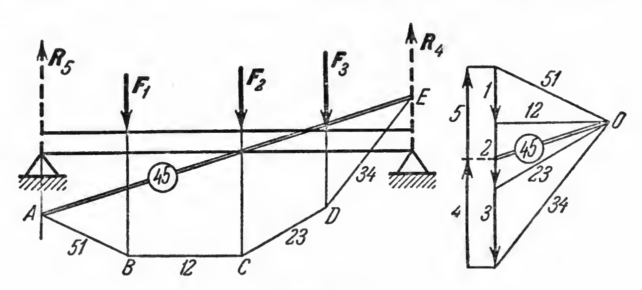


Рис. 82.

силы $\boldsymbol{R}_5$ заранее не знаем). От точки *A*, так как в ней приложена сила $\boldsymbol{R}_5$, пойдет луч *51* до пересечения с линией действия силы $\boldsymbol{F}_1$ в точке *B*. Далее проводим луч *12* до пересечения с линией действия силы $\boldsymbol{F}_2$ в точке *C*, луч *23* до пересечения с линией действия силы $\boldsymbol{F}_3$ в точке *D* и луч *34* до пересечения с линией действия силы $\boldsymbol{R}_4$ в точке *E*. Замыкая теперь, согласно условиям равновесия, веревочный многоугольник линией *EA*, найдем направление луча *45*.

После этого проводим от полюса O (рис. 81, *б*) луч *45* параллельно линии EA. Точка его пересечения с направлением силы *4* и определяет искомую вершину e силового многоугольника. В результате вектор $\overline{de}$ будет изображать в выбранном масштабе искомую силу R_4, а вектор $\overline{ea}$ — силу R_5. Задача решена.

Пример графического определения опорных реакций в случае параллельных сил показан на рис. 82. В этом случае построение веревочного многоугольника можно начинать из любой точки, так как направления обеих реакций наперед известны. Искомый луч *45* изображен на чертежах двойными линиями.

ГЛАВА VI

РАСЧЕТ ФЕРМ

§ 34. Понятие о ферме. Аналитический расчет плоских ферм.

Фермой называется жесткая конструкция из прямолинейных стержней, соединенных на концах шарнирами. Если все стержни фермы лежат в одной плоскости, ферма называется *плоской*. Места соединения стержней фермы называют *узлами*. Все внешние нагрузки к ферме прикладываются только в узлах. При расчете фермы трением в узлах и весом стержней (по сравнению с внешними нагрузками) пренебрегают или распределяют веса стержней по узлам. Тогда на каждый из стержней фермы будут действовать две силы, приложенные к его концам, которые при равновесии могут быть направлены только вдоль стержня. Следовательно, можно считать, что *стержни фермы работают только на растяжение или на сжатие*. Ограничимся рассмотрением жестких плоских ферм, без лишних стержней, образованных из треугольников. В таких фермах число стержней k и число узлов n связаны соотношением

$$k = 2n - 3. \qquad (42)$$

В самом деле, в жестком треугольнике, образованном из трех стержней, будет три узла (см., например, на рис. 84 треугольник ABD, образованный стержнями *1, 2, 3*). Присоединение каждого следующего узла потребует два стержня (например, на рис. 84 узел C присоединен стержнями *4, 5*, узел E — стержнями *6, 7* и т. д.); следовательно, для всех остальных $(n-3)$ узлов потребуется $2(n-3)$ стержней. В результате число стержней в ферме $k = 3 + 2(n-3) = 2n - 3$. При меньшем числе стержней ферма не будет жесткой, а при большем числе она будет статически неопределимой.

Расчет фермы сводится к определению опорных реакций и усилий в ее стержнях.

Опорные реакции можно найти обычными методами статики (§ 25), рассматривая ферму в целом как твердое тело. Перейдем к определению усилий в стержнях.

Метод вырезания узлов. Этим методом удобно пользоваться, когда надо найти усилия во всех стержнях фермы. Он сводится к последовательному рассмотрению условий равновесия сил, сходящихся в каждом из узлов фермы. Ход расчетов поясним на конкретном примере.

Рассмотрим изображенную на рис. 83, *а* ферму, образованную из одинаковых равнобедренных прямоугольных треугольников; действующие на ферму силы параллельны оси x и равны: $F_1 = F_2 = F_3 = F = 2T$.

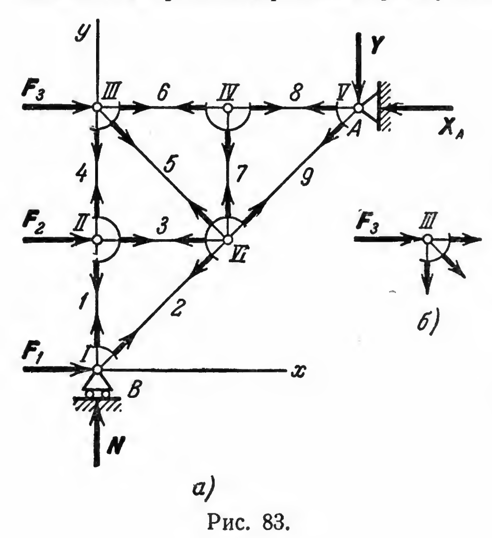


Рис. 83.

В этой ферме число узлов $n = 6$, а число стержней $k = 9$. Следовательно, соотношение (42) выполняется и ферма является жесткой, без лишних стержней.

Составляя уравнения равновесия (33) для фермы в целом, найдем, что реакции опор направлены, как показано на рисунке, и численно равны:

$$X_A = 3F = 6\ T,$$

$$Y_A = N = \frac{3}{2}F = 3\ T.$$

Переходим к определению усилий в стержнях. Пронумеруем узлы фермы римскими цифрами, а стержни — арабскими. Искомые усилия будем обозначать S_1 (в стержне *1*), S_2 (в стержне *2*) и т. д. Отрежем мысленно все узлы вместе со сходящимися в них стержнями от остальной фермы. Действие отброшенных частей стержней заменим силами, которые будут направлены вдоль соответствующих стержней и численно равны искомым усилиям S_1, S_2, ... Изображаем сразу все эти силы на рисунке, направляя их *от узлов*, т. е. считая все стержни *растянутыми* (рис. 83, *а*; изображенную картину надо представить себе для каждого узла так, как это показано на рис. 83, *б* для узла *III*). Если в результате расчета величина усилия в каком-нибудь стержне получится отрицательной, это будет означать, что данный стержень не растянут, а сжат[1]). Буквенных обозначений для сил, действующих

[1]) По этой причине принято, независимо от применяемого метода расчета, приписывать растягивающим усилиям знак «+», а сжимающим — знак «—».

вдоль стержней, на рис. 82 не вводим, поскольку ясно, что силы, действующие вдоль стержня *1*, равны численно S_1, вдоль стержня *2* — равны S_2 и т. д.

Теперь для сил, сходящихся в каждом узле, составляем последовательно уравнения равновесия (12)

$$\sum F_{kx}=0, \qquad \sum F_{ky}=0.$$

Начинаем с узла *I*, где сходятся *два стержня*, так как из двух уравнений равновесия можно определить только два неизвестных усилия.

Составляя уравнения равновесия для узла *I*, получим

$$F_1+S_2\cos 45°=0, \qquad N+S_1+S_2\sin 45°=0.$$

Отсюда находим

$$S_2=-F\sqrt{2}=-2{,}82\ T, \qquad S_1=-N-S_2\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{F}{2}=-1\ T.$$

Теперь, зная S_1, переходим к узлу *II*. Для него уравнения равновесия дают

$$S_3+F_2=0, \qquad S_4-S_1=0,$$

откуда

$$S_3=-F=-2\ T, \qquad S_4=S_1=-1\ T.$$

Определив S_4, составляем аналогичным путем уравнения равновесия сначала для узла *III*, а затем для узла *IV*. Из этих уравнений находим:

$$S_5=-S_4\sqrt{2}=1{,}41\ T, \qquad S_6=S_8=-3\ T, \qquad S_7=0.$$

Наконец, для вычисления S_9 составляем уравнение равновесия сил, сходящихся в узле *V*, проектируя их на ось *By*. Получим Y_A+ $+S_9\cos 45°=0$, откуда $S_9=-3\sqrt{2}=-4{,}23\ T$.

Второе уравнение равновесия для узла *V* и два уравнения для узла *VI* можно составить как поверочные. Для нахождения усилий в стержнях эти уравнения не понадобились, так как вместо них были использованы три уравнения равновесия всей фермы в целом при определении N, X_A и Y_A (см. § 26).

Окончательные результаты расчета можно свести в таблицу:

№ стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Усилие в *T*	−1	−2,82	−2	−1	+1,41	−3	0	−3	−4,23

Как показывают знаки усилий, стержень *5* растянут, остальные стержни сжаты; стержень *7* не нагружен (*нулевой стержень*).

Наличие в ферме нулевых стержней, подобных стержню 7, обнаруживается сразу, так как *если в узле, не нагруженном внешними силами, сходятся три стержня, из которых два направлены вдоль одной прямой, то усилие в третьем стержне равно нулю.* Этот результат получается из уравнения равновесия в проекции на ось, перпендикулярную к упомянутым двум стержням. Например, в ферме, изображенной на рис. 84, при отсутствии силы P_4 нулевым будет стержень *15*, а следовательно, и *13*. При наличии же силы P_4 ни один из этих стержней нулевым не является.

Если в ходе расчета встретится узел, для которого число неизвестных больше двух, то можно воспользоваться методом сечений.

Метод сечений (метод Риттера). Этим методом удобно пользоваться для определения усилий в отдельных стержнях фермы, в частности, для проверочных расчетов. Идея метода состоит в том, что ферму разделяют на две части сечением, проходящим через *три* стержня, в которых (или в одном из которых) требуется определить усилие, и рассматривают равновесие одной из этих частей. Действие отброшенной части заменяют соответствующими силами, направляя их вдоль разрезанных стержней от узлов, т. е. считая стержни растянутыми (как и в методе вырезания узлов). Затем составляют уравнения равновесия в форме (35) или (34), беря центры моментов (или ось проекций) так, чтобы *в каждое уравнение вошло только одно неизвестное усилие.*

Пример. Пусть требуется определить усилие в стержне *6* фермы, изображенной на рис. 84. Действующие вертикальные силы $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 2$ *Т*,

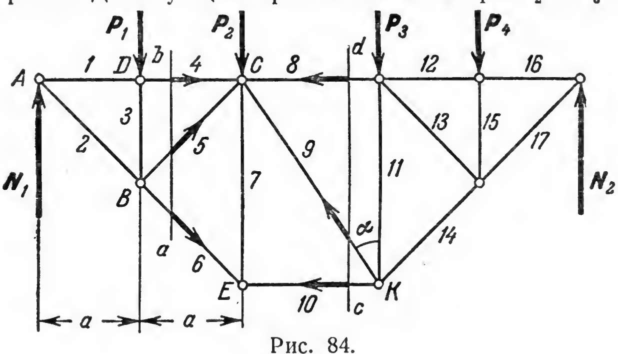


Рис. 84.

реакции опор $N_1 = N_2 = 4$ *Т*. Проводим сечение *ab* через стержни *4, 5, 6* и рассматриваем равновесие левой части фермы, заменяя действие на нее правой части силами, направленными вдоль стержней *4, 5, 6*. Чтобы найти S_6, составляем уравнение моментов относительно точки *C*, где пересекаются стержни *4* и *5*. Получим, считая $AD = DC = a$ и $BC \perp BE$,

$$-N_1 \cdot 2a + P_1 a + S_6 \cdot CB = 0.$$

Отсюда находим S_6. Плечо *CB* вычисляем по данным, определяющим геометрические размеры фермы (если метод применяется для приближенной про-

верки правильности графического расчета (§ 35) и ферма вычерчена в масштабе, то значение CB можно взять с рисунка). В данном примере $\angle ABC = 90°$ и $CB = a\sqrt{2}$. Следовательно, $S_6 = 3\sqrt{2} = 4{,}23\ T$; стержень растянут.

Усилия в стержнях *4* и *5* можно найти, составив уравнения моментов относительно центров B (точка пересечения стержней *5, 6*) и A (точка пересечения стержней *4, 6*).

Чтобы определить усилие в стержне *9* той же фермы, проводим сечение dc через стержни *8, 9, 10* и, рассматривая равновесие правой части, составляем уравнение проекций на ось, перпендикулярную к стержням *8* и *10*. Получим

$$S_9 \cos\alpha - P_3 - P_4 + N_2 = 0,$$

откуда находим S_9. Усилия в стержнях *8* и *10* можно в этом случае найти, составляя уравнение моментов относительно центров K и C.

§ 35*. Графический расчет плоских ферм.

Расчет фермы методом вырезания узлов может производиться графически. Для этого сначала путем, изложенным в § 33, определяют опорные реакции. Затем, последовательно отсекая от фермы каждый из ее узлов, находят усилия в стержнях, сходящихся в этих узлах, строя соответствующие замкнутые силовые многоугольники. Все построения проводятся в масштабе, который должен быть заранее выбран (см. § 33). Расчет начинают с узла, в котором сходятся два стержня (иначе не удастся определить неизвестные усилия).

В качестве примера рассмотрим ферму, изображенную на рис. 85, *а*. В этой ферме число узлов $n = 6$, а число стержней $k = 9$. Следовательно, соотношение (42) выполняется и ферма является жесткой, без лишних стержней. Опорные реакции R_4 и R_5 для рассматриваемой фермы были найдены в § 33. Изображаем их наряду с силами F_1, F_2 и F_3 как известные.

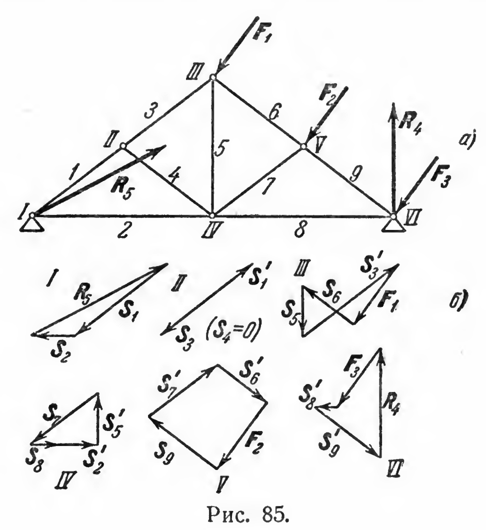


Рис. 85.

Определение усилий в стержнях начинаем с рассмотрения стержней, сходящихся в узле *I* (узлы нумеруем римскими цифрами, а стержни — арабскими). Мысленно отрезав от этих стержней остальную часть фермы, отбрасываем ее[1]; действие

[1]) Для узла *III* вид отрезанных от фермы стержней, равновесие которых рассматривается, показан на рис. 86. Так же нужно представлять себе в отрезанном виде и все другие узлы.

отброшенной части также мысленно заменяем силами S_1 и S_2, которые должны быть направлены вдоль стержней *1* и *2*. Из сходящихся в узле *I* сил R_5, S_1 и S_2 строим замкнутый треугольник (рис. 85, *б*). Для этого изображаем сначала в выбранном масштабе известную силу R_5, а затем проводим через ее начало и конец прямые, параллельные стержням *1* и *2*. Таким путем будут найдены силы S_1 и S_2, действующие на стержни *1* и *2*. Затем рассматриваем равновесие стержней, сходящихся в узле *II*. Действие на эти стержни отброшенной части фермы мысленно заменяем силами S_1', S_2 и S_4, направленными вдоль соответствующих стержней; при этом сила S_1' нам известна, так как по равенству действия и противодействия $S_1' = -S_1$. Построив из сил, сходящихся в узле *II*, замкнутый треугольник (начиная с силы S_1'), найдем величины S_3 и S_4 (в данном случае $S_4 = 0$). Аналогично находятся усилия в остальных стержнях. Соответствующие силовые многоугольники для всех узлов показаны на рис. 85, *б*. Последний многоугольник (для узла *VI*) строится для проверки, так как все входящие в него силы уже найдены.

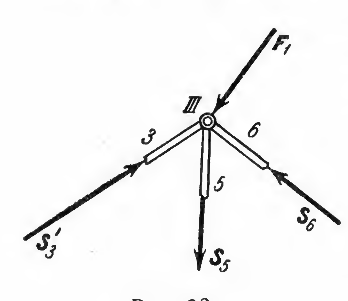


Рис. 86.

Из построенных многоугольников, зная масштаб, находим величины всех усилий. Знак усилия в каждом стержне определяется следующим образом. Мысленно вырезав узел по сходящимся в нем стержням (например, узел *III*), прикладываем к обрезам стержней найденные силы (рис. 86); сила, направленная от узла (S_3 на рис. 86), растягивает стержень, а сила, направленная к узлу (S_3' и S_6 на рис. 86), сжимает его. Согласно принятому условию (см. § 34) растягивающим усилиям приписываем знак «+», а сжимающим — знак «—». В рассмотренном примере (рис. 85) стержни *1, 2, 3, 6, 7, 9* сжаты, а стержни *5, 8* растянуты.

§ 36*. Диаграмма Максвелла — Кремоны. Графический расчет фермы можно проделать быстрее и результаты его представить более компактно, если в процессе построения силовые многоугольники для всех узлов фермы объединить в одну диаграмму усилий, называемую *диаграммой Максвелла — Кремоны*.

Чтобы построить такую диаграмму, надо обязательно придерживаться определенного порядка, например, следующего:

1) Найти опорные реакции фермы.

2) Изобразить все действующие на ферму заданные силы и реакции опор так, чтобы они проходили *вне контура фермы* (рис. 87, *а*); области, заключенные между этими силами и контуром фермы, а также между стержнями фермы, обозначить буквами *A*, *B*, *C*, ..., *K*.

3) Построить в выбранном масштабе из действующих на ферму внешних сил (т. е. из заданных сил и реакций опор) замкнутый силовой многоугольник, *откладывая в нем силы в том порядке, в котором мы их встречаем, обходя контур фермы по ходу часовой стрелки* (рис. 87, *б*,

утолщенные линии). При этом начало и конец силы удобно обозначать малыми буквами, соответствующими наименованиям областей, которые при обходе контура лежат слева и справа от силы (сила F_1 обозначается $\overline{ab}$, сила F_2 будет $\overline{bc}$ и т. д.). Таким образом, многоугольником внешних сил для рассматриваемой фермы будет многоугольник *abcdea*. (Стрелки у концов сил на диаграмме не ставят.)

4) К многоугольнику внешних сил последовательно пристроить силовые многоугольники для всех узлов фермы, начиная с узла, где сходятся два стержня; при этом *построение каждого многоугольника следует начинать*

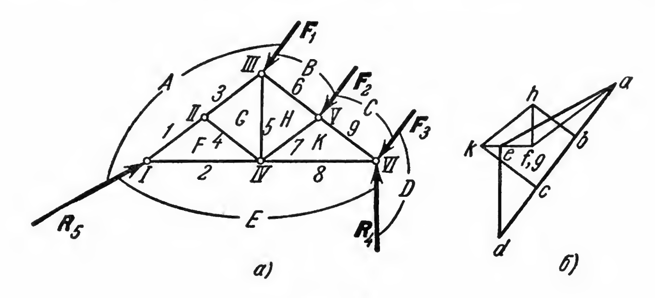


Рис. 87.

с известных сил и наносить все силы в том порядке, в каком они встречаются при обходе данного узла по ходу часовой стрелки (усилия в стержнях обозначаются так же, как и внешние силы: усилие в стержне *1* — *af*, в стержне *2* — *fe* и т. д.).

Например, для узла *VI* (рис. 87, *а*) заданные силы F_3 и R_4 уже изображены на диаграмме отрезками *cd* и *de* (рис. 87, *б*). От точки *е* проводим линию, параллельную стержню *8*, а от точки *с* — параллельную стержню *9*. Пересечение этих линий и дает вершину *k* замкнутого силового многоугольника *cdekc* для узла *VI*. Аналогично строятся силовые многоугольники других узлов.

Построенная таким путем для всей фермы диаграмма усилий изображена на рис. 87, *б*. Чтобы по диаграмме найти усилие, например, в стержне *1*, вырезаем мысленно узел *I* и, обходя его по ходу часовой стрелки, прочитываем наименование силы: *af*. Найдя на диаграмме вектор $\overline{af}$, определяем его модуль; приложив этот вектор к обрезу стержня *1* (см. рис. 86), устанавливаем, что стержень сжат. Тот же результат получится, если вырезать узел *II*, но при этом, обходя узел по ходу часовой стрелки, найдем, что соответствующая сила изобразится вектором $\overline{fa}$. Таким образом, принятый способ обозначения сил автоматически учитывает закон равенства действия и противодействия.

Обращаем внимание на следующие частные случаи.

1) Если в узле, не нагруженном внешними силами, сходятся три стержня, из которых два направлены вдоль одной прямой, то, как было показано в § 34, усилие в третьем стержне (в стержне *4* на рис. 87, *а*) будет равно нулю (*нулевой стержень*). Поэтому на диаграмме (рис. 87, *б*) точки *g* и *f* совпадают ($gf=0$).

2) Если в ферме есть скрещивающиеся стержни (рис. 88, *а*, стержни *1* и *5*), то для нее диаграмму усилий можно строить обычным путем, рассматривая точку пересечения стержней как узел. При этом совпадающие по

абсолютной величине и знаку усилия в частях стержней *1* и *5* будут на диаграмме изображены дважды. Соответствующая диаграмма показана на рис. 88, *б*, причем на ней отрезки *de* и *fg* изображают усилие в стержне *1*, а *ef* и *gd* — в стержне *5*.

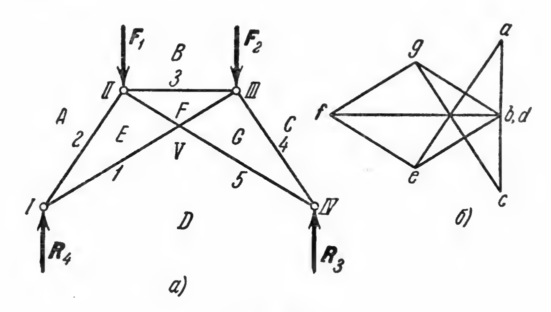


Рис. 88.

3) Если при построении диаграммы встретится узел, в котором число неизвестных окажется больше двух, следует попробовать строить диаграмму одновременно с двух концов фермы (если ферма несимметрична) или определить усилия в некоторых стержнях аналитически *методом сечений* (§ 34). Этим же методом можно выборочно производить проверку правильности или точности графического расчета.

ГЛАВА VII

ТРЕНИЕ

§ 37. Законы трения скольжения. Опыт показывает, что при стремлении двигать одно тело по поверхности другого в плоскости соприкосновения тел возникает сила сопротивления их относительному скольжению, называемая силой трения скольжения.

Возникновение трения обусловлено прежде всего шероховатостью поверхностей, создающей сопротивление перемещению, и наличием сцепления у прижатых друг к другу тел. Изучение всех особенностей явления трения представляет собою довольно сложную физико-механическую проблему, рассмотрение которой выходит за рамки курса теоретической механики.

В инженерных расчетах обычно исходят из ряда установленных опытным путем общих закономерностей, которые с достаточной для практики точностью отражают основные особенности явления трения. Эти закономерности, называемые законами трения скольжения при покое, можно сформулировать следующим образом:

1. При стремлении сдвинуть одно тело по поверхности другого в плоскости соприкосновения тел возникает сила трения (или сила

сцепления), величина которой может принимать любые значения от нуля до значения $F_{пр}$, называемого *предельной силой трения*.

Сила трения направлена в сторону, противоположную той, куда действующие силы стремятся сдвинуть тело.

2. Величина предельной силы трения равна произведению статического коэффициента трения на нормальное давление или нормальную реакцию:

$$F_{пр} = f_0 N. \tag{43}$$

Статический коэффициент трения f_0 — число отвлеченное; он определяется опытным путем и зависит от материала соприкасающихся тел и состояния поверхностей (характер обработки, температура, влажность, смазка и т. п.).

3. Величина предельной силы трения в довольно широких пределах не зависит от размеров соприкасающихся при трении поверхностей.

Объединяя вместе первый и второй законы, получаем, что при равновесии сила трения покоя (сила сцепления) $F \leqslant F_{пр}$ или

$$F \leqslant f_0 N. \tag{44}$$

Экспериментально коэффициент трения можно определить с помощью простейшего прибора, схема которого показана на рис. 89. Горизонтальная плита AB и прямоугольный брус D делаются из материалов, для которых определяется коэффициент трения. На брус D будут действовать сила тяжести $\boldsymbol{P}$, уравновешенная нормальной реакцией плиты $\boldsymbol{N}$, и сдвигающая сила $\boldsymbol{Q}$, которая при покое уравновешивается силой трения $\boldsymbol{F}$ (сила Q численно равна весу чашки E с гирями). Постепенно нагружая чашку, находим ту нагрузку Q^*, при которой брусок трогается с места. Очевидно, предельная сила трения $F_{пр} = Q^*$. Тогда, так как в данном случае $N = P$, находим по формуле (43):

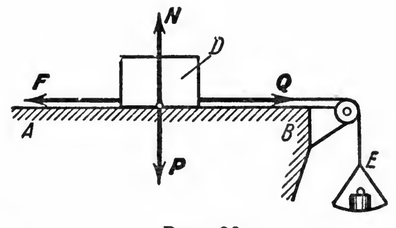


Рис. 89.

$$f_0 = \frac{F_{пр}}{N} = \frac{Q^*}{P}.$$

Проделав ряд аналогичных опытов, можно убедиться, что при изменении в известных пределах веса бруска P величина Q^* возрастает пропорционально P, а значение f_0 остается неизменным. Точно так же f_0 не меняется, если в известных пределах менять площади граней бруска. Этим подтверждается справедливость 2-го и 3-го законов трения. Справедливость 1-го закона следует из того, что при любых нагрузках Q, меньших Q^*, груз остается в покое. Следова-

тельно, уравновешивающая силу Q сила трения F действительно может принимать любые значения от нуля (при $Q=0$) до $F_{пр}$ (при $Q \geqslant Q^*$).

Следует иметь в виду, что пока груз находится в покое, сила трения F равна сдвигающей силе Q, а не величине $F_{пр}=f_0N$. Значение f_0N сила трения принимает только тогда, когда положение равновесия становится предельным.

Представление о величине коэффициента трения для некоторых тел дают следующие данные:

Дерево по дереву . . . . $f_0=0{,}4 \div 0{,}7$
Металл по металлу . . . $f_0=0{,}15 \div 0{,}25$
Сталь по льду . . . . . . $f_0=0{,}027$

Более подробные сведения можно найти в различных технических справочниках.

Все изложенное выше относилось к трению скольжения при покое. При движении сила трения направлена в сторону, противоположную движению, и равна произведению динамического коэффициента трения на нормальное давление:

$$F=fN.$$

Динамический коэффициент трения скольжения f также является величиной отвлеченной и определяется опытным путем. Значение коэффициента f зависит не только от материала и состояния поверхностей, но в некоторой степени и от скорости движения тел. В большинстве случаев с увеличением скорости величина f сначала несколько убывает, а затем сохраняет почти постоянное значение.

§ 38. Реакции шероховатых связей. Угол трения. До сих пор при решении задач статики мы пренебрегали трением и считали поверхности связей гладкими, а их реакции направленными по нормалям к этим поверхностям. Реакция реальной (шероховатой) связи будет слагаться из двух составляющих: из нормальной реакции N и перпендикулярной к ней силы трения F. Следовательно, полная реакция R будет отклонена от нормали к поверхности на некоторый угол. При изменении силы трения от нуля до $F_{пр}$ сила R будет меняться от N до $R_{пр}$, а ее угол с нормалью будет расти от нуля до некоторого предельного значения φ_0 (рис. 90). Наибольший угол φ_0, который полная реакция шероховатой связи образует с нормалью к поверхности, называется *углом трения*.

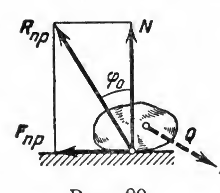


Рис. 90.

Из чертежа видно, что

$$\operatorname{tg}\varphi_0=\frac{F_{пр}}{N}.$$

Так как $F_{пр}=f_0N$, то отсюда находим следующую связь между углом трения и коэффициентом трения:

$$\operatorname{tg}\varphi_0=f_0. \tag{45}$$

При равновесии полная реакция $\boldsymbol{R}$, в зависимости от сдвигающих сил, может проходить где угодно внутри угла трения. Когда равновесие становится предельным, реакция будет отклонена от нормали на угол φ_0.

Если к телу, лежащему на шероховатой поверхности, приложить силу $\boldsymbol{P}$, образующую угол α с нормалью (рис. 91), то тело сдвинется только тогда, когда сдвигающее усилие $P\sin\alpha$ будет больше $F_{пр}=f_0P\cos\alpha$ (мы считаем $N=P\cos\alpha$, пренебрегая весом тела). Но неравенство $P\sin\alpha>f_0P\cos\alpha$, в котором $f_0=\operatorname{tg}\varphi_0$, выполняется только при $\operatorname{tg}\alpha>\operatorname{tg}\varphi_0$, т. е. при $\alpha>\varphi_0$. Следовательно, никакой силой, образующей с нормалью угол α, меньший угла трения φ_0, тело вдоль данной поверхности сдвинуть нельзя. Этим объясняются известные явления заклинивания или самоторможения тел.

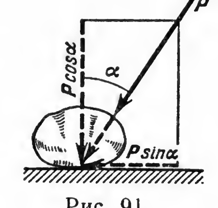


Рис. 91.

§ 39. Равновесие при наличии трения. Изучение равновесия тел с учетом трения сводится обычно к рассмотрению предельного положения равновесия, когда сила трения достигает своего наибольшего значения $F_{пр}$. При аналитическом решении задач реакцию шероховатой связи в этом случае изображают двумя составляющими $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{F}_{пр}$, где $F_{пр}=f_0N$. Затем составляют обычные условия равновесия статики, подставляют в них вместо $F_{пр}$ величину f_0N и, решая полученные уравнения, определяют искомые величины.

Если в задаче требуется определить все возможные положения равновесия, то для ее решения также можно рассмотреть только предельное положение равновесия. Остальные положения равновесия найдутся, если в полученном решении уменьшать коэффициент трения f_0 до нуля[1]).

Заметим, что в положениях равновесия, которые не являются предельными, сила трения F не равна $F_{пр}$ и ее величина (если она представляет интерес) должна находиться из условий равновесия как новое неизвестное (см. вторую часть задачи 32).

При геометрическом решении реакцию шероховатой связи удобнее изображать одной силой $\boldsymbol{R}$, которая в предельном положении равновесия будет отклонена от нормали к поверхности на угол φ_0.

---

[1]) В самом деле, когда равновесие является предельным, сила трения $F=F_{пр}=f_0N$. В остальных положениях равновесия $F<f_0N$. Значит, эти положения можно найти, уменьшая в равенстве $F=f_0N$ величину f_0. При $f_0=0$ получим положение равновесия, отвечающее случаю, когда связь является гладкой (идеальной).

Задача 32. Определить, какую силу Q, направленную под углом $\alpha=30°$ к горизонту, надо приложить к грузу весом $P=10$ *кГ*, лежащему на горизонтальной плоскости (рис. 92), чтобы сдвинуть его с места, если статический коэффициент трения груза о плоскость $f_0=0{,}6$.

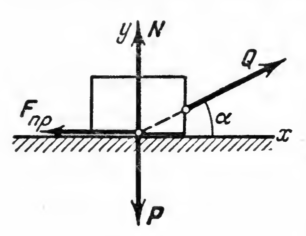


Рис. 92.

Решение. По условиям задачи требуется рассмотреть предельное положение равновесия груза. В этом положении на него действуют силы $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{F}_{пр}$. Составляя условия равновесия в проекциях на оси x и y, получим:

$$Q\cos\alpha - F_{пр}=0, \quad N+Q\sin\alpha - P=0.$$

Из последнего уравнения $N=P-Q\sin\alpha$. Тогда

$$F_{пр}=f_0N=f_0(P-Q\sin\alpha).$$

Подставляя это значение $F_{пр}$ в первое уравнение и решая его, найдем окончательно

$$Q=\frac{f_0P}{\cos\alpha+f_0\sin\alpha}\approx 5{,}2\ кГ.$$

Если к грузу приложить меньшую силу, например силу $Q'=4$ *кГ*, то тогда сдвигающее усилие будет равно $Q'\cos 30°=2\sqrt{3}=3{,}46$ *кГ*; максимальная же сила трения, которая может в этом случае развиться, будет $F_{пр}=f_0(P-Q'\sin 30°)=4{,}8$ *кГ*. Следовательно, груз останется в покое. При этом удерживающая его в равновесии сила трения найдется из уравнения равновесия в проекции на ось Ox и будет равна сдвигающей силе ($F'=Q'\cos 30°=3{,}46$ *кГ*), а не силе $F_{пр}$.

Обращаем внимание на то, что при всех расчетах следует определять $\boldsymbol{F}_{пр}$ по формуле $F_{пр}=f_0N$, находя N из условий равновесия. Ошибка, которую часто допускают в задачах, аналогичных решенной, состоит в том, что при подсчетах считают $F_{пр}=f_0P$, в то время как давление на плоскость здесь не равно весу груза P.

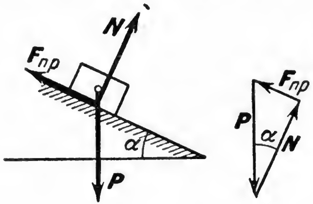


Рис. 93.

Задача 33. Определить, при каких значениях угла наклона α груз, лежащий на наклонной плоскости, будет оставаться в равновесии, если его коэффициент трения о плоскость равен f_0.

Решение. В задаче требуется определить все положения равновесия груза. Для этого найдем сначала предельное положение равновесия, при котором угол α равен $\alpha_{пр}$. В этом положении (рис. 93) на груз действуют сила тяжести $\boldsymbol{P}$, нормальная реакция N и предельная сила трения $\boldsymbol{F}_{пр}$. Строя из перечисленных сил замкнутый треугольник, находим из него, что $F_{пр}=N\operatorname{tg}\alpha_{пр}$. Но с другой стороны, $F_{пр}=f_0N$. Следовательно,

$$\operatorname{tg}\alpha_{пр}=f_0. \qquad (а)$$

Если в полученном равенстве уменьшать f_0, то величина $\alpha_{пр}$ будет тоже уменьшаться. Отсюда заключаем, что равновесие возможно и при $\alpha<\alpha_{пр}$. Окончательно все значения угла α, при которых груз будет в равновесии, определятся неравенством

$$\operatorname{tg}\alpha\leqslant f_0. \qquad (б)$$

Если трение отсутствует ($f_0=0$), равновесие может иметь место только при угле $\alpha=0$. Следовательно, в то время как при наличии трения равновесие возможно, когда угол α имеет любое значение, заключенное между нулем и величиной $\alpha_{\text{пр}}$, при отсутствии трения равновесие может иметь место только при единственном значении угла α, равном нулю. Этим и отличается равновесие при трении от равновесия систем с идеальными (лишенными трения) связями.

Полученный в задаче результат, выражаемый равенством (а), можно использовать для экспериментального определения коэффициента трения, находя угол $\alpha_{\text{пр}}$ из опыта.

Заметим еще, что так как $f_0=\operatorname{tg}\varphi_0$, где φ_0 — угол трения, то, следовательно, $\alpha_{\text{пр}}=\varphi_0$, т. е. наибольший угол α, при котором груз, лежащий на наклонной плоскости, остается в равновесии, равен углу трения.

Задача 34. Изогнутый под прямым углом брус опирается своей вертикальной частью о выступы A и B, расстояние между которыми (по вертикали) равно h (рис. 94, *а*). Пренебрегая весом бруса, найти, при какой ширине d брус, с лежащим на его горизонтальной части грузом, будет находиться в равновесии при любом положении груза. Коэффициент трения бруса о направляющие равен f_0.

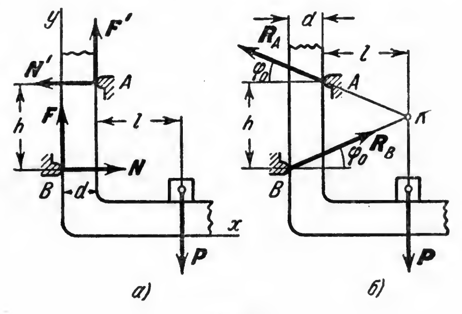


Рис. 94.

Решение. Обозначим вес груза через P, а его расстояние от вертикальной части бруса — через l. Рассмотрим предельное положение равновесия бруса, при котором его ширина $d=d_{\text{пр}}$. В этом положении на брус действуют силы $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{N}'$, $\boldsymbol{F}'$, где $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{F}'$ — предельные силы трения. Составляя условия равновесия (33) и беря моменты относительно центра A, получаем:

$$N-N'=0,\quad F+F'-P=0,\quad Nh-Fd_{\text{пр}}-Pl=0,$$

где $F=f_0N$, $F'=f_0N'$. Из двух первых уравнений находим:

$$N=N',\qquad P=2f_0N.$$

Подставляя эти значения в третье уравнение и сокращая на N, будем иметь

$$h-f_0d_{\text{пр}}-2f_0l=0,$$

откуда

$$d_{\text{пр}}=\frac{h}{f_0}-2l.$$

Если в этом равенстве уменьшать f_0 до нуля, то его правая часть будет расти до бесконечности. Следовательно, равновесие возможно при любом значении $d>d_{\text{пр}}$. В свою очередь $d_{\text{пр}}$ имеет наибольшее значение, когда $l=0$. Значит, брус будет в равновесии при любом положении груза (при $l\geqslant 0$), если будет выполняться неравенство

$$d\geqslant\frac{h}{f_0}.$$

Чем меньше трение, тем d должно быть больше. При отсутствии трения ($f_0=0$) равновесие, очевидно, невозможно, так как в этом случае получается $d=\infty$.

Приведем еще геометрическое решение задачи. При таком решении вместо нормальных реакций и сил трения изображаем в точках A и B полные реакции $\boldsymbol{R}_A$ и $\boldsymbol{R}_B$, которые в предельном положении будут отклонены от нормалей на угол трения φ_0 (рис. 94, *б*). Тогда на брус будут действовать три силы $\boldsymbol{R}_A$, $\boldsymbol{R}_B$, $\boldsymbol{P}$. При равновесии линии действия этих сил должны пересекаться в одной точке, т. е. в точке K, где пересекаются силы $\boldsymbol{R}_A$ и $\boldsymbol{R}_B$. Отсюда получаем очевидное (см. чертеж) равенство $h=(l+d_{\text{пр}})\operatorname{tg}\varphi_0+l\operatorname{tg}\varphi_0$ или $h=(2l+d_{\text{пр}})f_0$, так как $\operatorname{tg}\varphi_0=f_0$. В результате находим для $d_{\text{пр}}$ то же значение, что и при аналитическом решении.

Задача дает пример самотормозящегося устройства, нередко применяемого на практике.

Задача 35. Пренебрегая весом лестницы AB (рис. 95), найти, при каких значениях угла α человек может подняться по лестнице до ее конца B, если угол трения лестницы о пол и о стену равен φ_0.

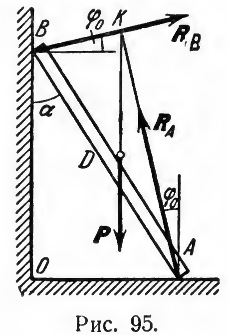


Рис. 95.

Решение. Рассмотрим предельное положение равновесия лестницы и применим для решения геометрический метод. В предельном положении на лестницу действуют реакции $\boldsymbol{R}_A$ и $\boldsymbol{R}_B$ пола и стены, отклоненные от нормалей к этим плоскостям на угол трения φ_0. Линии действия реакций пересекаются в точке K. Следовательно, при равновесии третья действующая на лестницу сила $\boldsymbol{P}$ (равная весу человека) также должна пройти через точку K. Поэтому в положении, показанном на чертеже, выше точки D человек подняться не может. Чтобы человек мог подняться до точки B, линии действия сил $\boldsymbol{R}_A$ и $\boldsymbol{R}_B$ должны пересечься где-нибудь на прямой BO, что возможно лишь тогда, когда сила $\boldsymbol{R}_A$ будет направлена вдоль AB, т. е. когда угол $\alpha\leqslant\varphi_0$.

Следовательно, человек может подняться по лестнице до ее конца тогда, когда она образует со стеной угол, не превышающий угла трения лестницы о пол. Трение о стену при этом роли не играет, т. е. стена может быть гладкой.

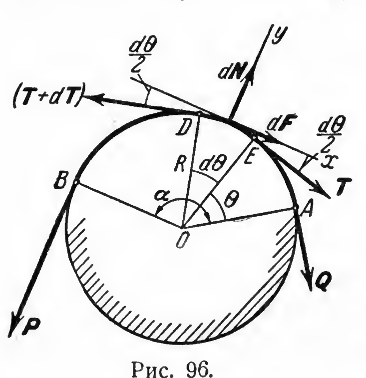


Рис. 96.

§ 40*. Трение нити о цилиндрическую поверхность.

К нити, накинутой на круглый цилиндрический вал (рис. 96), приложена сила P. Найдем, какую наименьшую силу Q надо приложить к другому концу нити, чтобы сохранить равновесие при данном угле AOB, равном α.

Для решения задачи рассмотрим равновесие элемента нити DE длины $dl=R\,d\theta$, где R — радиус вала. Разность натяжений нити в точках D и E, равная dT, уравновешивается силой трения $dF=f_0dN$ (dN — нормальная реакция), так как при наименьшей силе Q равновесие является предельным. Следовательно,

$$dT=f_0\,dN.$$

Величину dN найдем из уравнения равновесия в проекции на ось Oy. Учитывая, что синус малого угла равен самому углу и пренебрегая малыми высшего порядка, будем иметь

$$dN=T\sin\frac{d\theta}{2}+(T+dT)\sin\frac{d\theta}{2}=2T\frac{d\theta}{2}=T\,d\theta.$$

Подставляя это значение dN в предыдущее равенство, получим

$$dT = f_0 T\, d\theta.$$

Разделим обе части равенства на T и возьмем интегралы справа в пределах от 0 до α, а слева от Q до P (так как натяжение нити в точке, где $\theta = 0$, равно Q, а в точке, где $\theta = \alpha$, равно P). Получим:

$$\int_Q^P \frac{dT}{T} = f_0 \int_0^\alpha d\theta \quad \text{или} \quad \ln\frac{P}{Q} = f_0\alpha.$$

Отсюда следует, что $P/Q = e^{f_0\alpha}$ или

$$Q = Pe^{-f_0\alpha}. \qquad (46)$$

Как видим, потребная сила Q зависит только от коэффициента трения f_0 и угла α; от радиуса вала величина Q не зависит. При отсутствии трения ($f_0 = 0$) получаем, как и следовало ожидать, $Q = P$. Практически очень важен тот факт, что, увеличивая угол α (навивая нить), можно значительно уменьшить величину Q, необходимую для уравновешивания силы P, что видно из таблицы 1. Например (см. таблицу 1), натяжение в одну тонну можно уравновесить силой всего в 2 *кГ*, дважды обернув пеньковый канат вокруг деревянного столба.

Таблица 1

Значения Q/P при $f_0 = 0{,}5$

(пеньковый канат по дереву)

Число оборотов	α	$Q/P = e^{-f_0\alpha}$
$^1/_2$ оборота	π	0,208
1 оборот	2π	0,043
$1^1/_2$ оборота	3π	0,009
2 оборота	4π	0,002

Формула (46) определяет также отношение натяжений P (ведущей) и Q (ведомой) частей ремня, равномерно вращающего шкив, если проскальзывание ремня по шкиву отсутствует. Считая, например, при этом $\alpha = \pi$ и принимая для кожаного ремня и чугунного шкива $f_0 = 0{,}3$, получим, что отношение натяжений $Q/P = e^{-0{,}3\pi} \approx 0{,}4$.

Задача 36. К рычагу DE ленточного тормоза (рис. 97) приложена сила F. Определить тормозящий момент $M_т$, действующий на шкив радиуса R, если $CD = 2CE$ и коэффициент трения ленты о шкив $f_0 = 0{,}5$.

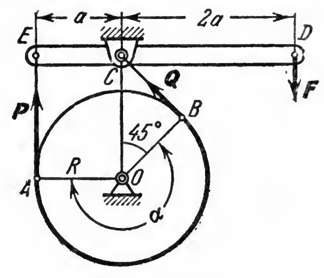


Рис. 97.

Решение. На шкив вместе с прилегающей к нему лентой AB действуют приложенная в точке A сила P, причем, очевидно, $P = 2F$, и приложенная в точке B сила Q, определяемая формулой (46). В нашем случае $f_0 = 0{,}5$ и $\alpha = \frac{5}{4}\pi = 3{,}93$ радиана. Следовательно,

$$Q = 2Fe^{-\frac{5}{8}\pi} \approx 0{,}28\,F.$$

Искомый момент

$$M_т = (P - Q)\,R = 1{,}72FR \text{ кГм}.$$

Момент будет тем больше, чем меньше Q, т. е. чем больше коэффициент трения f_0 и угол α.

§ 41*. Трение качения и верчения. Трением качения называется сопротивление, возникающее при качении одного тела по поверхности другого.

Рассмотрим круглый цилиндрический каток радиуса R и веса P, лежащий на горизонтальной шероховатой плоскости. Приложим к оси катка силу $\boldsymbol{Q}$ (рис. 98, *а*), меньшую $\boldsymbol{F}_{\text{пр}}$. Тогда в точке A возникает сила трения $\boldsymbol{F}$, численно равная Q, которая будет препятствовать скольжению цилиндра по плоскости. Если считать нормальную реакцию $\boldsymbol{N}$ тоже приложенной в точке A, то она уравновесит силу $\boldsymbol{P}$, а силы $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{F}$ образуют пару, вызывающую качение цилиндра. При такой схеме качение должно начаться, как видим, под действием любой, сколь угодно малой силы $\boldsymbol{Q}$.

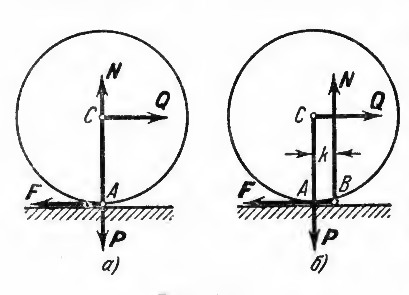


Рис. 98.

Истинная же картина, как показывает опыт, выглядит иначе. Объясняется это тем, что фактически, вследствие деформаций тел, касание их происходит вдоль некоторой площадки AB (рис. 98, *б*). При действии силы $\boldsymbol{Q}$ интенсивность давлений у края A убывает, а у края B возрастает. В результате реакция $\boldsymbol{N}$ оказывается смещенной в сторону действия силы $\boldsymbol{Q}$. С увеличением Q это смещение растет до некоторой предельной величины k. Таким образом, в предельном положении на каток будут действовать пара $(\boldsymbol{Q}_{\text{пр}}, \boldsymbol{F})$ с моментом $Q_{\text{пр}}R$ и уравновешивающая ее пара $(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{P})$ с моментом Nk. Из равенства моментов находим $Q_{\text{пр}}R = Nk$ или

$$Q_{\text{пр}} = \frac{k}{R} N. \tag{47}$$

Пока $Q < Q_{\text{пр}}$, каток находится в покое; при $Q > Q_{\text{пр}}$ начинается качение.

Входящая в формулу (47) линейная величина k называется *коэффициентом трения качения*. Измеряют величину k обычно в сантиметрах. Значение коэффициента k зависит от материала тел и определяется опытным путем. Приведем значения этого коэффициента для некоторых материалов:

Дерево по дереву	$k = 0{,}05 \div 0{,}08$ *см*
Сталь мягкая по стали (колесо по рельсу)	$k = 0{,}005$ *см*
Сталь закаленная по стали (шариковый подшипник) . . .	$k = 0{,}001$ *см*

Отношение k/R для большинства материалов значительно меньше статического коэффициента трения f_0. Этим объясняется то, что

в технике, когда это возможно, стремятся заменить скольжение качением (колеса, катки, шариковые подшипники и т. п.).

Задача 37. Определить, при каких значениях угла α (рис. 99) цилиндр радиуса R, лежащий на наклонной плоскости, остается в покое, если коэффициент трения качения равен k.

Решение. Рассмотрим предельное положение равновесия, когда $\alpha = \alpha_1$. Разлагая силу $\boldsymbol{P}$ на составляющие $\boldsymbol{P}_1$ и $\boldsymbol{P}_2$ (см. рис. 99), находим, что в этом случае сдвигающая сила $Q_{\text{пр}} = P_1 = P\sin\alpha_1$, а нормальная реакция $N = P_2 = P\cos\alpha_1$. Тогда по формуле (47)

$$P\sin\alpha_1 = \frac{k}{R}P\cos\alpha_1 \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{k}{R}.$$

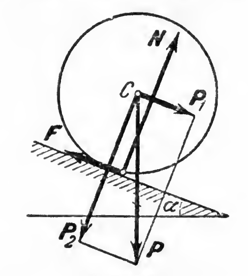


Рис. 99.

При уменьшении k до нуля величина α_1 также убывает до нуля. Отсюда заключаем, что равновесие сохранится при любом угле $\alpha < \alpha_1$. Полученным результатом можно воспользоваться для экспериментального определения коэффициента k, находя угол α_1 из опыта.

Понятие о трении верчения. Если к шару, лежащему на горизонтальной плоскости, приложить пару сил с моментом M, расположенную тоже в горизонтальной плоскости, то пара будет стремиться повернуть шар вокруг вертикальной оси. Опыт показывает, что шар начнет вращаться только тогда, когда значение M будет больше некоторой предельной величины $M_{\text{пр}}$, определяемой равенством

$$M_{\text{пр}} = \lambda N, \tag{48}$$

где N — сила нормального давления шара на плоскость, равная в данном случае весу шара. Объясняется этот результат наличием так называемого трения верчения, т. е. сопротивления верчению, возникающего вследствие трения шара о плоскость. Аналогичное сопротивление возникает в упорных подшипниках (подпятниках). Входящий в равенство (48) коэффициент λ, имеющий размерность длины, называется *коэффициентом трения верчения*. По величине этот коэффициент очень мал (в 5—10 раз меньше коэффициента трения качения k).

ГЛАВА VIII

СИСТЕМЫ ПАР И СИЛ, КАК УГОДНО РАСПОЛОЖЕННЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ[1])

§ 42. Момент силы относительно центра как вектор. Чтобы перейти к решению задач статики для системы сил, как угодно расположенных в пространстве, оказывается необходимым несколько уточнить и расширить ряд введенных ранее понятий. Начнем с понятия о моменте силы.

[1]) Читатель, желающий ознакомиться только с тем, как решаются задачи на равновесие тела под действием пространственной системы сил, может в этой главе опустить параграфы 45—48, посвященные приведению пар и сил в пространстве.

1. Изображение момента вектором. Момент силы $\boldsymbol{F}$ относительно центра O (см. рис. 100) как характеристика ее вращательного эффекта определяется следующими тремя элементами: 1) модулем момента, равным произведению модуля силы на плечо, т. е. Fh; 2) плоскостью поворота OAB, проходящей через линию действия силы $\boldsymbol{F}$ и центр O; 3) направлением поворота в этой плоскости. Когда все силы и центр O лежат в одной плоскости, необходимость задавать каждый раз плоскость поворота OAB отпадает, и момент можно определять как скалярную алгебраическую величину, равную $\pm Fh$, где знак указывает направление поворота (см. § 14).

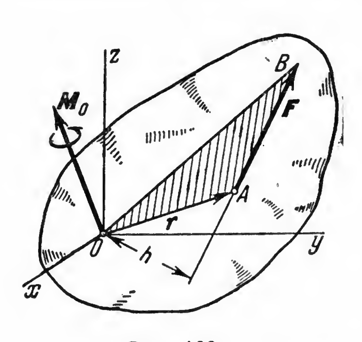


Рис. 100.

Но в случае сил, произвольно расположенных в пространстве, плоскости поворота у разных сил будут разными и должны задаваться дополнительно. Положение плоскости в пространстве можно задать, задав отрезок (вектор), перпендикулярный к этой плоскости. Если одновременно модуль этого вектора выбрать равным модулю момента силы и условиться направлять этот вектор так, чтобы его направление определяло направление поворота силы, то такой вектор полностью определит все три элемента, характеризующие момент данной силы относительно центра O.

Поэтому в общем случае *момент $m_O(\boldsymbol{F})$ силы $\boldsymbol{F}$ относительно центра O* (рис. 100) *будем изображать приложенным в центре O вектором $\boldsymbol{M}_O$, равным по модулю* (в выбранном масштабе) *произведению модуля силы $\boldsymbol{F}$ на плечо h и перпендикулярным к плоскости OAB, проходящей через центр O и силу $\boldsymbol{F}$. Направлять вектор $\boldsymbol{M}_O$ будем в ту сторону, откуда поворот, совершаемый силой, виден происходящим против хода часовой стрелки.* Таким образом, вектор $\boldsymbol{M}_O$ будет одновременно характеризовать модуль момента, плоскость поворота OAB, разную для разных сил, и направление поворота в этой плоскости. Точка приложения вектора $\boldsymbol{M}_O$ определяет положение центра момента.

2*. Выражение момента силы с помощью векторного произведения. Рассмотрим векторное произведение $\overline{OA} \times \boldsymbol{F}$ векторов $\overline{OA}$ и $\boldsymbol{F}$ (рис. 100). По определению [1],

$$|\overline{OA} \times \boldsymbol{F}| = 2 \text{ пл. } \triangle OAB = M_O,$$

[1]) Векторным произведением $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется вектор $\boldsymbol{c}$, равный по модулю площади параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, и направленный перпендикулярно плоскости этих векторов в ту сторону, откуда кратчайшее совмещение $\boldsymbol{a}$ с $\boldsymbol{b}$ видно происходящим против хода часовой стрелки.

так как модуль вектора $\boldsymbol{M}_O$ тоже равен 2 пл. $\triangle OAB$. Направлен вектор $(\overline{OA}\times\boldsymbol{F})$ перпендикулярно к плоскости OAB, в ту сторону, откуда кратчайшее совмещение $\overline{OA}$ с $\boldsymbol{F}$ (если их отложить от одной точки) видно против хода часовой стрелки, т. е. так же, как вектор $\boldsymbol{M}_O$. Следовательно, векторы $(\overline{OA}\times\boldsymbol{F})$ и $\boldsymbol{M}_O$ совпадают и по модулю и по направлению и, как легко проверить, по размерности, т. е. оба эти вектора изображают одну и ту же величину. Отсюда

$$\boldsymbol{M}_O=\overline{OA}\times\boldsymbol{F} \text{ или } \boldsymbol{M}_O=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}, \tag{49}$$

где вектор $\boldsymbol{r}=\overline{OA}$ называется радиусом-вектором точки A относительно центра O.

Таким образом, *момент силы $\boldsymbol{F}$ относительно центра O равен векторному произведению радиуса вектора $\boldsymbol{r}=\overline{OA}$, соединяющего центр O с точкой приложения силы A, на саму силу.* Этим выражением момента силы бывает удобно пользоваться при доказательстве некоторых теорем.

Формула (49) позволяет еще вычислить момент $\boldsymbol{M}_O$ аналитически. Допустим, что через центр O (см. рис. 100) проведены координатные оси $Oxyz$ и в этих осях вычислены проекции F_x, F_y, F_z силы $\boldsymbol{F}$ и координаты x, y, z точки ее приложения A. Тогда, учитывая, что $r_x=x$, $r_y=y$, $r_z=z$, будем по известной формуле векторной алгебры иметь

$$\boldsymbol{M}_0=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}, \tag{49'}$$

где $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — единичные векторы (орты) координатных осей. Если стоящий справа определитель раскрыть по элементам первой строки, то коэффициенты при $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ будут равны проекциям M_x, M_y, M_z вектора $\boldsymbol{M}_O$ на оси координат, поскольку $\boldsymbol{M}_O=M_x\boldsymbol{i}+M_y\boldsymbol{j}+M_z\boldsymbol{k}$. Следовательно,

$$M_x=yF_z-zF_y,\quad M_y=zF_x-xF_z,\quad M_z=xF_y-yF_x. \tag{50}$$

Формулы (50) позволяют, вычислив аналитически проекции M_x, M_y, M_z, найти по ним сам вектор $\boldsymbol{M}_O$ и, в частности, его модуль.

Пример. Пусть сила $\boldsymbol{F}$ приложена в точке с координатами $x=0{,}3$ *м*, $y=-0{,}6$ *м*, $z=0{,}2$ *м* и проекции $\boldsymbol{F}$ на оси координат равны: $F_x=-20$ *кГ*, $F_y=10$ *кГ*, $F_z=0$. Найдем величину момента этой силы относительно начала координат O. По формулам (50) имеем:

$$M_x=-0{,}2\cdot 10=-2,\quad M_y=-0{,}2\cdot 20=-4,\quad M_z=0{,}3\cdot 10-0{,}6\cdot 20=-9.$$

Следовательно,

$$M_O=\sqrt{M_x^2+M_y^2+M_z^2}=\sqrt{101}\approx 10 \text{ кГм}.$$

§ 43. Момент силы относительно оси. Чтобы перейти к решению задач статики для случая произвольной пространственной системы сил, необходимо ввести еще понятие о моменте силы относительно оси.

Момент силы относительно оси характеризует вращательный эффект, создаваемый силой, стремящейся повернуть тело вокруг данной оси. Рассмотрим твердое тело, которое может вращаться вокруг некоторой оси z (рис. 101). Пусть на это тело действует сила $\boldsymbol{F}$, приложенная в точке A. Проведем через точку A плоскость xy, перпендикулярную оси z, и разложим силу $\boldsymbol{F}$ на составляющие: $\boldsymbol{F}_z$, параллельную оси z, и $\boldsymbol{F}_{xy}$, лежащую в плоскости xy ($\boldsymbol{F}_{xy}$ является одновременно проекцией силы $\boldsymbol{F}$ на плоскость xy). Сила $\boldsymbol{F}_z$, направленная параллельно оси z, очевидно, не может повернуть тело вокруг этой оси (она только стремится сдвинуть тело *вдоль* оси z). Следовательно, весь вращательный эффект, создаваемый силой $\boldsymbol{F}$, будет совпадать с вращательным эффектом ее составляющей $\boldsymbol{F}_{xy}$. Отсюда заключаем, что

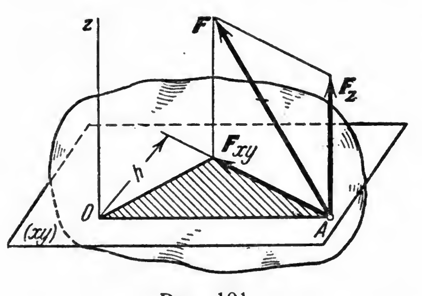


Рис. 101.

$$m_z(\boldsymbol{F}) = m_z(\boldsymbol{F}_{xy}),$$

где символ $m_z(\boldsymbol{F})$ обозначает момент силы $\boldsymbol{F}$ относительно оси z.

Для силы же $\boldsymbol{F}_{xy}$, лежащей в плоскости, перпендикулярной к оси z, вращательный эффект измеряется произведением модуля этой силы на ее расстояние h от оси. Но этой же величиной измеряется момент силы $\boldsymbol{F}_{xy}$ относительно точки O, в которой ось z пересекается с плоскостью xy. Следовательно, $m_z(\boldsymbol{F}_{xy}) = m_O(\boldsymbol{F}_{xy})$ или, согласно предыдущему равенству [1]),

$$m_z(\boldsymbol{F}) = m_O(\boldsymbol{F}_{xy}) = \pm F_{xy}h. \qquad (51)$$

В результате приходим к следующему определению: *моментом силы относительно оси называется скалярная величина, равная моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, взятому относительно точки пересечения оси с плоскостью.*

Момент будем считать положительным, если с положительного конца оси z поворот, который сила $\boldsymbol{F}_{xy}$ стремится совершить, виден происходящим против хода часовой стрелки, и отрицательным, если по ходу часовой стрелки.

---

[1]) Символ $m_O(\boldsymbol{F})$, употреблявшийся для плоской системы сил, которым мы будем пользоваться и в дальнейшем, обозначает численную (алгебраическую) величину момента.

Из чертежа (рис. 101) видно, что при вычислении момента по формуле (51) плоскость xy можно проводить через любую точку оси z. Таким образом, чтобы найти момент силы относительно оси z (рис. 102), надо: 1) провести плоскость xy, перпендикулярную к оси z (в любом месте); 2) спроектировать силу $\boldsymbol{F}$ на эту плоскость и вычислить величину F_{xy}; 3) опустить из точки O пересечения оси с плоскостью перпендикуляр на направление $\boldsymbol{F}_{xy}$ и найти его длину h; 4) вычислить произведение $F_{xy}h$; 5) определить знак момента.

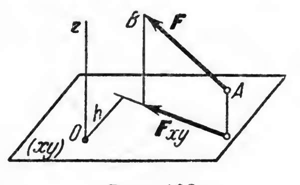


Рис. 102.

При вычислении моментов надо иметь в виду следующие частные случаи:

1) Если сила параллельна оси, то ее момент относительно оси равен нулю (так как $F_{xy}=0$).

2) Если линия действия силы пересекает ось, то ее момент относительно оси также равен нулю (так как $h=0$).

Объединяя оба случая вместе, заключаем, что *момент силы относительно оси равен нулю, если сила и ось лежат в одной плоскости.*

3) Если сила перпендикулярна к оси, то ее момент относительно оси равен произведению модуля силы на расстояние между силой и осью.

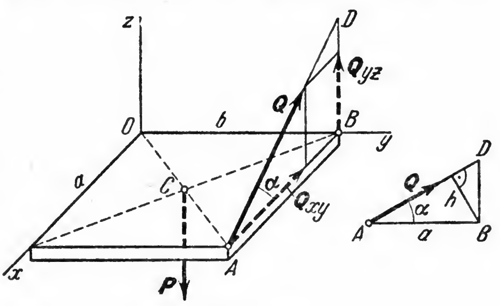


Рис. 103.

Задача 38. Найти моменты относительно осей x, y и z сил $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$, которые действуют на горизонтальную плиту, изображенную на рис. 103.

Решение. 1) Сила $\boldsymbol{P}$ параллельна оси z; она перпендикулярна к осям x и y и проходит от них на расстояниях $b/2$ и $a/2$. Следовательно, с учетом знаков:

$$m_x(\boldsymbol{P}) = -P\frac{b}{2}; \quad m_y(\boldsymbol{P}) = P\frac{a}{2}; \quad m_z(\boldsymbol{P}) = 0.$$

2) Для вычисления $m_x(\boldsymbol{Q})$ проектируем силу $\boldsymbol{Q}$ на плоскость yz; получаем

$$Q_{yz} = Q\sin\alpha.$$

Плечо силы $\boldsymbol{Q}_{yz}$ относительно точки O равно b, а поворот ее с конца оси x виден происходящим против хода часовой стрелки; следовательно,

$$m_x(\boldsymbol{Q}) = bQ\sin\alpha.$$

Теперь вычисляем $m_y(\boldsymbol{Q})$. Сила $\boldsymbol{Q}$ лежит в плоскости ABD, перпендикулярной к оси y и пересекающейся с нею в точке B. Следовательно, $\boldsymbol{Q}_{xz}=\boldsymbol{Q}$. Опуская из точки B перпендикуляр на линию действия силы $\boldsymbol{Q}$ (см. вспомогательный чертёж справа), находим, что его длина $h = a\sin\alpha$.

Окончательно, учитывая направление поворота, получаем

$$m_y(\boldsymbol{Q}) = -Qa\sin\alpha.$$

Наконец, для вычисления $m_z(\boldsymbol{Q})$, проектируем силу $\boldsymbol{Q}$ на плоскость xy и находим, что $Q_{xy} = Q\cos\alpha$, а плечо этой проекции относительно центра O равно b. Поэтому, с учетом знака:

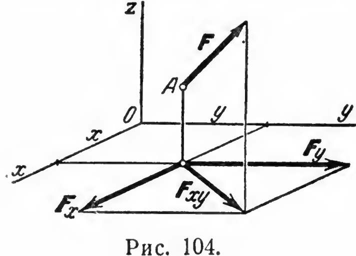


Рис. 104.

$$m_z(\boldsymbol{Q}) = bQ\cos\alpha.$$

Аналитические выражения для моментов силы относительно осей координат. Проведем через какую-нибудь точку O систему прямоугольных координатных осей (рис. 104) и рассмотрим силу $\boldsymbol{F}$, приложенную в точке A с координатами x, y, z. Вычислим сначала аналитически момент силы $\boldsymbol{F}$ относительно оси z. Для этого спроектируем силу $\boldsymbol{F}$ на плоскость xy и разложим полученную проекцию $\boldsymbol{F}_{xy}$ на составляющие $\boldsymbol{F}_x$ и $\boldsymbol{F}_y$; численно эти составляющие будут, очевидно, равны проекциям силы $\boldsymbol{F}$ на оси x и y. Тогда, по определению,

$$m_z(\boldsymbol{F}) = m_O(\boldsymbol{F}_{xy}) = m_O(\boldsymbol{F}_x) + m_O(\boldsymbol{F}_y).$$

Последнее равенство вытекает из теоремы Вариньона. Но, как видно из чертежа, $m_O(\boldsymbol{F}_x) = -yF_x$, $m_O(\boldsymbol{F}_y) = xF_y$. Следовательно, окончательно

$$m_z(\boldsymbol{F}) = xF_y - yF_x.$$

Аналогично вычисляются моменты относительно двух других осей. В результате получим:

$$\left.\begin{aligned} m_x(\boldsymbol{F}) &= yF_z - zF_y, \\ m_y(\boldsymbol{F}) &= zF_x - xF_z, \\ m_z(\boldsymbol{F}) &= xF_y - yF_x. \end{aligned}\right\} \qquad (52)$$

Формулы (52) и дают *аналитические выражения* для моментов силы относительно осей координат. С их помощью моменты можно вычислять, зная проекции силы и координаты точки ее приложения.

Задача 39. Вычислить аналитически моменты силы $\boldsymbol{Q}$, изображенной на рис. 103, относительно осей x, y и z.

Решение. Сила $\boldsymbol{Q}$ приложена в точке A с координатами $x = a$, $y = b$, $z = 0$. Ее проекции на оси равны:

$$Q_x = -Q\cos\alpha, \quad Q_y = 0, \quad Q_z = Q\sin\alpha.$$

Подставляя эти значения в формулы (52), получим:

$$m_x(\boldsymbol{Q}) = bQ\sin\alpha, \quad m_y(\boldsymbol{Q}) = -aQ\sin\alpha, \quad m_z(\boldsymbol{Q}) = bQ\cos\alpha.$$

§ 44. Зависимость между моментами силы относительно центра и относительно оси. Пусть на тело действует приложенная в точке A сила $\boldsymbol{F}$ (рис. 105). Проведем какую-нибудь ось z и возьмем на ней произвольную точку O. Момент силы $\boldsymbol{F}$ относительно центра O будет изображаться вектором $\boldsymbol{M}_O$, перпендикулярным плоскости OAB, причем по модулю

$$M_O = Fh = 2 \text{ пл. } \triangle\ OAB.$$

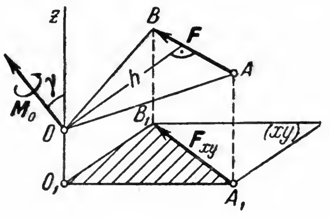


Рис. 105.

Проведем теперь через любую точку O_1 на оси z плоскость xy, перпендикулярную к оси; проектируя силу $\boldsymbol{F}$ на эту плоскость, найдем по формуле (51)

$$m_z(\boldsymbol{F}) = m_{O_1}(\boldsymbol{F}_{xy}) = 2 \text{ пл. } \triangle\ O_1A_1B_1.$$

Но треугольник $O_1A_1B_1$ представляет собою проекцию треугольника OAB на плоскость xy. Угол между плоскостями этих треугольников равен углу между перпендикулярами к плоскостям, т. е. равен γ. Тогда, по известной геометрической формуле, пл. $\triangle\ O_1A_1B_1 =$ $=$ пл. $\triangle\ OAB\ \cos\gamma$.

Умножая обе части этого равенства на 2 и замечая, что удвоенные площади треугольников $O_1A_1B_1$ и OAB равны соответственно $m_z(\boldsymbol{F})$ и M_O, найдем окончательно:

$$m_z(\boldsymbol{F}) = M_O \cos\gamma. \qquad (53)$$

Так как произведение $M_O \cos\gamma$ дает проекцию вектора $\boldsymbol{M}_O =$ $= \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})$ на ось z, то равенство (53) можно еще представить в виде

$$m_z(\boldsymbol{F}) = M_z \text{ или } m_z(\boldsymbol{F}) = [\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})]_z. \qquad (54)$$

Если менять положение точки O на оси z, то, как видно из рис. 105, величина и направление вектора $\boldsymbol{M}_O$ будут изменяться (треугольник OAB каждый раз будет другим); но проекция $\boldsymbol{M}_O$ на ось z, измеряемая площадью треугольника $O_1A_1B_1$, остается все время одной и той же.

В результате мы доказали, что между моментом силы относительно оси и ее моментом относительно какого-нибудь центра, лежащего на этой оси, существует следующая зависимость: ***момент силы F относительно оси равен проекции на эту ось вектора, изображающего момент данной силы относительно любого центра, лежащего на оси.***

Из доказанной теоремы следует, что полученные в § 42 равенства (50) дают одновременно аналитические выражения моментов силы относительно координатных осей, т. е. формулы (52), так как по этой теореме $m_x(\boldsymbol{F}) = M_x$ и т. д.

§ 45. Момент пары сил как вектор. Действие пары сил на тело характеризуется: 1) величиной модуля момента пары, 2) плоскостью действия, 3) направлением поворота в этой плоскости. При рассмотрении пар, не лежащих в одной плоскости, для характеристики каждой из пар необходимо будет задать все эти три элемента. Это можно сделать, если условиться, по аналогии с моментом силы, изображать момент пары соответствующим образом построенным вектором, а именно: *будем изображать момент пары вектором* $\boldsymbol{m}$ *или* $\boldsymbol{M}$, *модуль которого равен* (в выбранном масштабе) *модулю момента пары, т. е. произведению одной из ее сил на плечо, и который направлен перпендикулярно плоскости действия пары в ту сторону, откуда поворот пары виден происходящим против хода часовой стрелки* (рис. 106).

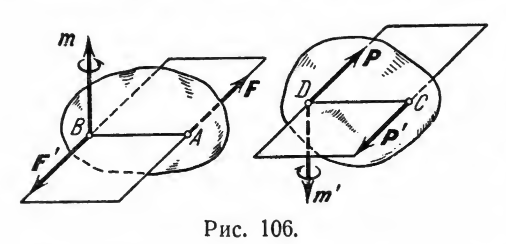


Рис. 106.

Так как пару можно располагать где угодно в плоскости ее действия или в плоскости, ей параллельной (§ 19), то вектор $\boldsymbol{m}$ можно прикладывать в любой точке тела (такой вектор называется *свободным*).

Легко видеть, что вектор $\boldsymbol{m}$ действительно определяет данную пару, так как, зная $\boldsymbol{m}$ и проведя любую плоскость, перпендикулярную $\boldsymbol{m}$, мы найдем плоскость действия пары; измерив длину $\boldsymbol{m}$, определим модуль момента пары; а по направлению $\boldsymbol{m}$ установим направление поворота пары.

Как известно (§ 18), модуль момента пары равен моменту одной из ее сил относительно точки, где приложена другая сила, т. е. $m = m_B(F)$; по направлению же векторы этих моментов совпадают (ср. рис. 106 и 100). Следовательно,

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}_B(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{m}_A(\boldsymbol{F}').$$

§ 46*. Сложение пар в пространстве. Условия равновесия пар. Правило сложения пар, не лежащих в одной плоскости, дается теоремой: *любая система пар, действующих на абсолютно твердое тело, эквивалентна одной паре с моментом, равным геометрической сумме моментов слагаемых пар.*

Докажем сначала теорему для случая, когда на тело действуют две пары сил с моментами $\boldsymbol{m}_1$ и $\boldsymbol{m}_2$, лежащие в плоскостях *(I)* и *(II)* (рис. 107). Возьмем на линии пересечения этих плоскостей отрезок $AB = d$. Пользуясь свойствами пар, доказанными в § 19, изобразим пару с моментом $\boldsymbol{m}_1$ силами $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_1'$, а пару с моментом $\boldsymbol{m}_2$ силами $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_2'$, приложенными в точках A и B. При этом, очевидно, будет $F_1 d = m_1$, $F_2 d = m_2$.

Складывая силы, приложенные в точках A и B, убеждаемся, что пары $(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}'_1)$ и $(\boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}'_2)$ действительно заменяются одной парой $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}')$. Найдем момент $\boldsymbol{M}$ этой пары. Так как $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$, а момент пары равен моменту одной из ее сил относительно точки приложения другой, то по формуле (49) будет:

$$\boldsymbol{M}=\overline{AB}\times\boldsymbol{R}=\overline{AB}\times(\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2)=(\overline{AB}\times\boldsymbol{F}_1)+(\overline{AB}\times\boldsymbol{F}_2).$$

Но $\overline{AB}\times\boldsymbol{F}_1=\boldsymbol{m}_1$, а $\overline{AB}\times\boldsymbol{F}_2=\boldsymbol{m}_2$. Следовательно,

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{m}_1+\boldsymbol{m}_2, \tag{55}$$

т. е. вектор $\boldsymbol{M}$ изображается диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{m}_1$ и $\boldsymbol{m}_2$. Для двух пар теорема доказана.

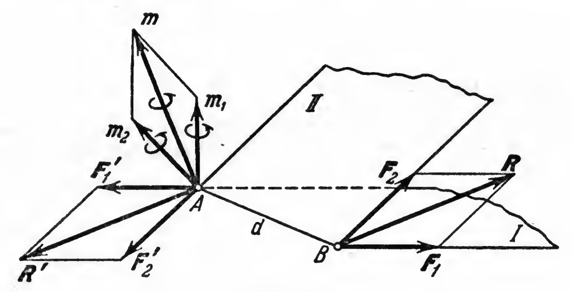


Рис. 107.

Если на тело действует n пар с моментами $\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2, \ldots, \boldsymbol{m}_n$, то, последовательно применяя формулу (55), получим, что данная система пар будет действительно заменяться одной парой с моментом

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{m}_1+\boldsymbol{m}_2+\ldots+\boldsymbol{m}_n=\sum\boldsymbol{m}_k. \tag{56}$$

Вектор $\boldsymbol{M}$ можно найти как замыкающую сторону многоугольника, построенного из слагаемых векторов.

Если слагаемые векторы не лежат в одной плоскости, то подсчет удобнее вести аналитически. Проведя оси координат, мы, на основании теоремы о проекциях суммы векторов на ось, найдем из равенства (56), что

$$M_x=\sum m_{kx},\quad M_y=\sum m_{ky},\quad M_z=\sum m_{kz}. \tag{57}$$

По этим проекциям можно построить вектор $\boldsymbol{M}$. Модуль его вычисляется по формуле

$$M=\sqrt{M_x^2+M_y^2+M_z^2}.$$

Из полученных результатов легко находятся *условия равновесия системы пар, действующих на твердое тело*. Так как любая система

пар заменяется одной парой с моментом, определяемым равенством (56), то при равновесии должно быть $\boldsymbol{M}=0$ или

$$\sum \boldsymbol{m}_k = 0,$$

т. е. многоугольник, построенный из векторов моментов, действующих на тело пар, должен быть замкнутым.

Аналитические условия равновесия найдем, приняв во внимание, что $M=0$ только тогда, когда $M_x=0$, $M_y=0$, $M_z=0$. А это, согласно формулам (57), будет, если

$$\sum m_{kx}=0, \quad \sum m_{ky}=0, \quad \sum m_{kz}=0. \tag{58}$$

В заключение отметим, что когда все пары лежат в одной плоскости (или в параллельных плоскостях), то векторы моментов этих пар будут направлены по одной прямой и их сложение сведется к алгебраической операции. Этот результат и был получен в § 20.

Задача 40. На твердое тело действуют две пары, расположенные во взаимно перпендикулярных плоскостях (рис. 108). Модули моментов каждой из пар численно равны 3 *кГм*. Найти результирующую пару.

Решение. Изображаем моменты пар в виде векторов $\boldsymbol{m}_1$ и $\boldsymbol{m}_2$, приложенных в некоторой точке A; момент результирующей пары изобразится вектором $\boldsymbol{m}$. Следовательно, результирующая пара будет расположена в плоскости $ABCD$, перпендикулярной к $\boldsymbol{m}$; модуль момента результирующей пары численно равен $3\sqrt{2}$ *кГм*.

Если направление вращения одной из заданных пар изменить на противоположное, то результирующая пара будет лежать в плоскости, перпендикулярной к $ABCD$.

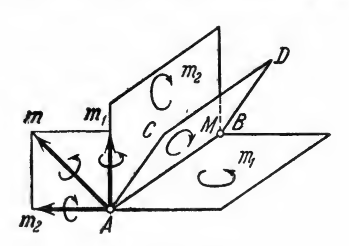


Рис. 108.

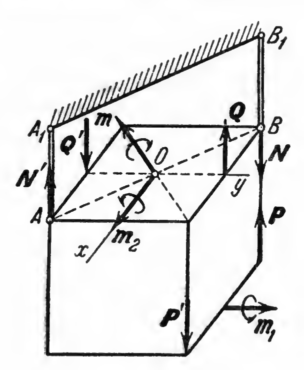


Рис. 109.

Задача 41. Куб, изображенный на рис. 109, подвешен к двум вертикальным стержням AA_1 и BB_1 так, что его диагональ AB горизонтальна. К кубу приложены пары сил ($\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P}'$) и ($\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{Q}'$). Пренебрегая весом куба, определить, при каком соотношении между силами P и Q он будет в равновесии и чему при этом равны реакции стержней.

Решение. Система пар ($\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P}'$) и ($\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{Q}'$), эквивалентная одной паре, может быть уравновешена только парой сил. Следовательно, искомые реакции $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{N}'$ должны образовать пару. Ее момент $\boldsymbol{m}$, направленный перпендикулярно диагонали AB, изобразим так, как показано на чертеже. При этом

по модулю $m = Na\sqrt{2}$, где a — длина ребра куба. Моменты заданных пар обозначим через $\boldsymbol{m}_1$ и $\boldsymbol{m}_2$, причем $m_1 = Pa$, $m_2 = Qa$. Направления векторов $\boldsymbol{m}_1$ и $\boldsymbol{m}_2$ показаны на чертеже.

Проведя оси координат, составляем условия равновесия (58):

$$\sum m_{kx} \equiv m_2 - m\cos 45^\circ = 0, \quad \sum m_{ky} \equiv m_1 - m\cos 45^\circ = 0.$$

Третье условие удовлетворяется тождественно.

Из найденных уравнений следует, что должно быть $m_1 = m_2$, т. е. $Q = P$. Далее находим, что

$$m = \frac{m_1}{\cos 45^\circ} = m_1\sqrt{2} = Pa\sqrt{2}.$$

Но так как $m = Na\sqrt{2}$, то, следовательно, $N = P$.

Таким образом, равновесие возможно, когда $Q = P$. Реакции стержней при этом численно также равны P и направлены так, как показано на чертеже.

§ 47. Приведение пространственной системы сил к данному центру. Полученные выше результаты позволяют решить задачу о приведении любой системы сил к данному центру. Эта задача, аналогичная задаче, рассмотренной в § 22, решается с помощью теоремы о параллельном переносе силы. Для переноса действующей на абсолютно твердое тело силы $\boldsymbol{F}$ из точки A (рис. 110, *а*) в точку O прикладываем в точке O силы $\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{F}'' = -\boldsymbol{F}$. Тогда сила $\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{F}$ окажется приложенной в точке O и к ней будет присоединена пара $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}'')$ с моментом $\boldsymbol{m}$, что можно показать еще так, как на рис. 110, *б*. При этом

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}). \tag{59}$$

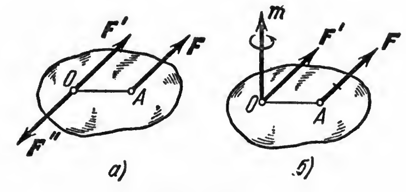


Рис. 110.

Рассмотрим теперь твердое тело, на которое действует какая угодно система сил $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$ (рис. 111, *а*). Выберем произвольную точку O за центр приведения и перенесем все силы системы в этот центр, присоединяя при этом соответствующие пары. Тогда на тело будет действовать система сил

$$\boldsymbol{F}'_1 = \boldsymbol{F}_1, \quad \boldsymbol{F}'_2 = \boldsymbol{F}_2, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{F}'_n = \boldsymbol{F}_n, \tag{60}$$

приложенных в центре O, и система пар, моменты которых, согласно формуле (59), будут равны

$$\boldsymbol{m}_1 = \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_1), \quad \boldsymbol{m}_2 = \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_2), \quad \ldots, \quad \boldsymbol{m}_n = \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_n). \tag{61}$$

Силы, приложенные в точке O, заменяются одной силой $\boldsymbol{R}$, приложенной в той же точке. При этом $\boldsymbol{R} = \sum \boldsymbol{F}'_k$ или, согласно равенствам (60),

$$\boldsymbol{R} = \sum \boldsymbol{F}_k. \tag{62}$$

Чтобы сложить все полученные пары, надо геометрически сложить векторы моментов этих пар. В результате система пар заменится одной парой, момент которой $\boldsymbol{M}_O = \sum \boldsymbol{m}_k$ или, согласно равенствам (61),

$$\boldsymbol{M}_O = \sum \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_k). \tag{63}$$

Как и в случае плоской системы, величина $\boldsymbol{R}$, равная геометрической сумме всех сил, называется *главным вектором системы*; величина $\boldsymbol{M}_O$, равная геометрической сумме моментов всех сил относительно центра O, называется *главным моментом системы* относительно этого центра.

Таким образом мы доказали следующую теорему: *любая система сил, действующих на абсолютно твердое тело, при приведении к произвольно взятому центру O заменяется одной силой $\boldsymbol{R}$, равной главному вектору системы и приложенной в центре приведения O, и одной парой с моментом $\boldsymbol{M}_O$, равным главному моменту системы относительно центра O* (рис. 111, *б*).

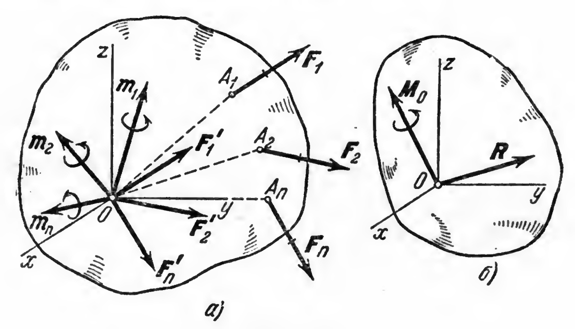


Рис. 111.

Векторы $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{M}_O$ обычно определяют аналитически, т. е. по их проекциям на оси координат.

Выражения для R_x, R_y, R_z нам известны (§ 10). Проекции вектора $\boldsymbol{M}_O$ на оси координат будем обозначать M_x, M_y, M_z. По теореме о проекциях суммы векторов на ось будет $M_x = \sum [\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_k)]_x$ или, согласно равенству (54), $M_x = \sum m_x(\boldsymbol{F}_k)$. Аналогично находятся величины M_y и M_z.

Окончательно для определения проекций главного вектора R и главного момента $\boldsymbol{M}_O$ получаем формулы:

$$R_x = \sum F_{kx}, \qquad R_y = \sum F_{ky}, \qquad R_z = \sum F_{kz}; \tag{64}$$

$$M_x = \sum m_x(\boldsymbol{F}_k), \quad M_y = \sum m_y(\boldsymbol{F}_k), \quad M_z = \sum m_z(\boldsymbol{F}_k). \tag{65}$$

Из доказанной теоремы следует, что две системы сил, для которых величины $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{M}_O$ совпадают, статически эквивалентны. Следовательно, для задания любой системы сил, действующих на твердое тело, достаточно задать ее главный вектор и главный момент относительно данного центра, т. е. достаточно задать шесть величин, определяемых равенствами (64) и (65).

§ 48*. Случаи приведения пространственной системы сил к простейшему виду. Доказанная в § 47 теорема позволяет установить, к какому простейшему виду может быть приведена данная пространственная система сил. Для этого надо определить главный вектор системы и ее главный момент относительно произвольного центра O и исследовать полученные результаты.

Возможны следующие случаи:

1) Если для данной системы сил $\boldsymbol{R}=0$ и $\boldsymbol{M}_O=0$, то система находится в равновесии. Этот случай будет рассмотрен в § 49.

2) Если для данной системы сил $\boldsymbol{R}=0$, а $\boldsymbol{M}_O\neq 0$, то она приводится к паре сил, момент которой вычисляется по формулам (65). В этом случае, как и для плоской системы сил (§ 23), величина $\boldsymbol{M}_O$ не зависит от выбора центра O.

Свободное тело под действием такой системы сил может (но не всегда) совершать чисто вращательное движение.

3) Если для данной системы сил $\boldsymbol{R}\neq 0$, а $\boldsymbol{M}_O=0$, то она приводится к равнодействующей $\boldsymbol{R}$, проходящей через центр O. Величина равнодействующей вычисляется по формулам (64).

Свободное тело под действием такой системы сил может совершать чисто поступательное движение (если равнодействующая $\boldsymbol{R}$ проходит через центр тяжести тела).

4) Если для данной системы сил $\boldsymbol{R}\neq 0$, $\boldsymbol{M}_O\neq 0$, но $\boldsymbol{M}_O\perp\boldsymbol{R}$, то эта система также приводится к одной равнодействующей, равной $\boldsymbol{R}$, но не проходящей через центр O.

Действительно, при $\boldsymbol{M}_O\perp\boldsymbol{R}$ пара, изображаемая вектором $\boldsymbol{M}_O$, и сила $\boldsymbol{R}$ лежат в одной плоскости (рис. 112). Тогда, выбрав силы пары $\boldsymbol{R}'$ и $\boldsymbol{R}''$ равными по модулю R и располагая их так, как показано на рис. 112, мы получим, что силы $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{R}''$ взаимно уравновесятся, и система заменится одной равнодействующей $\boldsymbol{R}'=\boldsymbol{R}$, проходящей через точку O' (см. § 23, п. 3, б). Расстояние OO' ($\overline{OO'}\perp\boldsymbol{R}$) определяется при этом по формуле (31), где $d=OO'$.

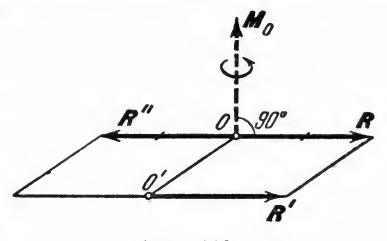


Рис. 112.

Легко убедиться, что рассмотренный случай будет, в частности, всегда иметь место для любой системы параллельных сил или сил,

лежащих в одной плоскости, если главный вектор этой системы $\boldsymbol{R} \neq 0$.

5) Если для данной системы сил $\boldsymbol{R} \neq 0$, $\boldsymbol{M}_O \neq 0$ и при этом вектор $\boldsymbol{M}_O$ параллелен $\boldsymbol{R}$ (рис. 113, *а*), то это означает, что система сил приводится к совокупности силы $\boldsymbol{R}$ и пары $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P}'$, лежащей в плоскости, перпендикулярной силе (рис. 113, *б*). Такая совокупность силы и пары называется *динамическим винтом* или *динамой*, а прямая, вдоль которой направлен вектор $\boldsymbol{R}$, *осью динамы*. Дальнейшее упрощение этой системы невозможно, так как от переноса пары система не изменяется, а при переносе силы $\boldsymbol{R}$ из центра O в любую другую точку C (рис. 113, *а*) к моменту $\boldsymbol{M}_O$ будет прибавляться момент $\boldsymbol{M}'_C = \boldsymbol{m}_C(\boldsymbol{R})$, перпендикулярный к вектору $\boldsymbol{R}$, а следовательно, и к $\boldsymbol{M}_O$. В результате момент $\boldsymbol{M}_C = \boldsymbol{M}_O + \boldsymbol{M}'_C$ результирующей пары будет возрастать. Таким образом, к одной равнодействующей или к одной паре рассматриваемую систему сил привести нельзя. Свободное твердое тело под действием такой системы сил может совершать только сложное (винтовое) движение.

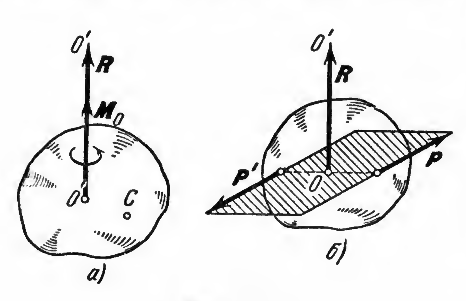


Рис. 113.

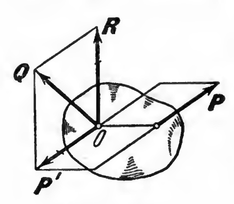


Рис. 114.

Если одну из сил пары, например $\boldsymbol{P}'$, сложить с силой $\boldsymbol{R}$, то рассматриваемую систему сил можно еще заменить двумя скрещивающимися, т. е. не лежащими в одной плоскости силами $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{P}$ (рис. 114). Так как полученная система сил эквивалентна динаме, то она также не имеет равнодействующей.

6) Если для данной системы сил $\boldsymbol{R} \neq 0$, $\boldsymbol{M}_O \neq 0$, и при этом векторы $\boldsymbol{M}_O$ и $\boldsymbol{R}$ не перпендикулярны друг к другу и не параллельны, то такая система сил также приводится к динаме, но ось этой динамы не будет проходить через центр O.

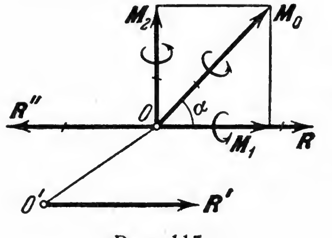


Рис. 115.

Чтобы доказать это, разложим вектор $\boldsymbol{M}_O$ на составляющие: $\boldsymbol{M}_1$, направленную вдоль $\boldsymbol{R}$, и $\boldsymbol{M}_2$, перпендикулярную к $\boldsymbol{R}$ (рис. 115). При этом $M_1 = M_O \cos\alpha$, $M_2 = M_O \sin\alpha$, где α — угол между векторами $\boldsymbol{M}_O$ и $\boldsymbol{R}$. Пару, изображаемую вектором $\boldsymbol{M}_2$ ($\boldsymbol{M}_2 \perp \boldsymbol{R}$), и силу $\boldsymbol{R}$ можно, как в случае, показанном на рис. 112, заменить одной силой $\boldsymbol{R}'$, приложенной в точке O'. В результате данная система сил действительно заменится силой $\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{R}$ и парой с моментом $\boldsymbol{M}_1$, параллельным $\boldsymbol{R}'$, т. е. динамой с осью, проходящей через центр O'.

Задача 42. Найти, к чему приводится система сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$, изображенных на рис. 6, считая $F_1 = F_2 = F$, $AB = 2a$.

Решение. Приведем силы $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ к центру O, лежащему на середине отрезка AB (рис. 116). Главный вектор системы $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$ и направлен по биссектрисе угла $y'Oz'$; численно он равен $R = F\sqrt{2}$. Главный момент системы $\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_1) + \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_2)$. Вектор $\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_1)$ направлен вдоль оси y', а вектор $\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_2)$ — вдоль оси z'; численно оба вектора равны Fa. Следовательно, по модулю $M_O = Fa\sqrt{2}$, а направлен вектор $\boldsymbol{M}_O$ тоже по биссектрисе угла $y'Oz'$. Таким образом, система сил $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ приводится к динаме и, как было указано в § 3, равнодействующей не имеет.

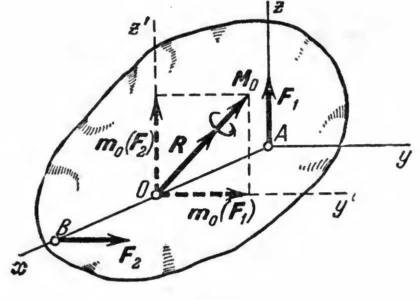


Рис. 116.

§ 49. Условия равновесия произвольной пространственной системы сил. Случай параллельных сил.

Произвольную пространственную систему сил, как и плоскую, можно привести к какому-нибудь центру O и заменить одной результирующей силой $\boldsymbol{R}$ и парой с моментом $\boldsymbol{M}_O$ [значения R и M_O определяются равенствами (62) и (63)]. Рассуждая так же, как в начале § 24, придем к заключению, что для равновесия этой системы сил необходимо и достаточно, чтобы одновременно было $\boldsymbol{R} = 0$ и $\boldsymbol{M}_O = 0$. Но векторы $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{M}_O$ могут обратиться в нуль только тогда, когда равны нулю все их проекции на оси координат, т. е. когда $R_x = R_y = R_z = 0$ и $M_x = M_y = M_z = 0$ или, согласно формулам (64) и (65), когда действующие силы удовлетворяют условиям

$$\left.\begin{aligned} &\sum F_{kx} = 0, \qquad \sum F_{ky} = 0, \qquad \sum F_{kz} = 0; \\ &\sum m_x(\boldsymbol{F}_k) = 0, \quad \sum m_y(\boldsymbol{F}_k) = 0, \quad \sum m_z(\boldsymbol{F}_k) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (66)$$

Таким образом, *для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из трех координатных осей и суммы их моментов относительно этих осей были равны нулю* [1]).

Уравнения (66) выражают одновременно необходимые условия равновесия свободного твердого тела, находящегося под действием любой пространственной системы силы. При этом первые три равенства выражают необходимые условия того, чтобы тело не имело перемещений вдоль координатных осей, а последние три являются условиями отсутствия вращений вокруг этих осей.

[1]) При составлении условий (66) можно, если это целесообразно, брать для вычисления проекций одну систему координатных осей, а для вычисления моментов — другую.

Если на тело, кроме сил, действует еще пара, заданная ее моментом M, то при этом вид первых трех из условий (66) не изменится (сумма проекций сил пары на любую ось равна нулю), а последние три условия примут вид:

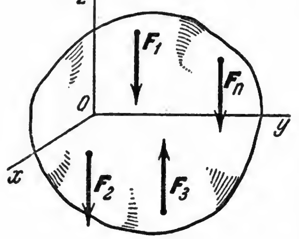


Рис. 117.

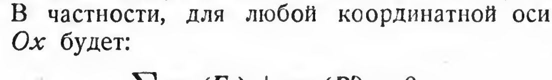
$$\sum m_x(F_k)+M_x=0,\quad \sum m_y(F_k)+M_y=0,\quad \sum m_z(F_k)+M_z=0. \qquad (67)$$

Случай параллельных сил. В случае, когда все действующие на тело силы параллельны друг другу, можно выбрать координатные оси так, что ось z будет параллельна силам (рис. 117). Тогда проекции каждой из сил на оси x и y и их моменты относительно оси z будут равны нулю и система (66) даст три условия равновесия:

$$\sum F_{kz}=0,\qquad \sum m_x(F_k)=0,\qquad \sum m_y(F_k)=0. \qquad (68)$$

Остальные равенства обратятся при этом в тождества вида $0=0$. Следовательно, *для равновесия пространственной системы параллельных сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на ось, параллельную силам, и суммы их моментов относительно двух других координатных осей были равны нулю.*

§ 50. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей относительно оси. Пусть на твердое тело действует система сил $F_1, F_2, \ldots, F_n$, приводящаяся к равнодействующей R, линия действия которой проходит через некоторую точку C (рис. 118). Приложим в этой точке силу $R'=-R$. Тогда система сил $F_1, F_2, \ldots, F_n, R'$ будет находиться в равновесии и для нее будут выполняться все условия (66). В частности, для любой координатной оси Ox будет:



$$\sum m_x(F_k)+m_x(R')=0.$$

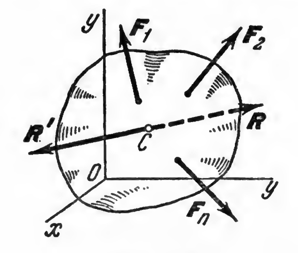


Рис. 118.

Но, так как сила $R'=-R$ и обе они направлены вдоль одной и той же прямой, то $m_x(R')=-m_x(R)$. Подставляя это значение $m_x(R')$ в предыдущее равенство, найдем из него, что

$$m_x(R)=\sum m_x(F_k). \qquad (69)$$

Следовательно, *если данная система сил имеет равнодействующую, то момент этой равнодействующей относительно любой оси равен алгебраической сумме моментов слагаемых сил относительно той же оси* (теорема Вариньона).

§ 51. Задачи на равновесие тела под действием пространственной системы сил. Принцип решения задач этого раздела остается тем же, что и для плоской системы сил. Установив, равновесие какого тела будет рассматриваться, заменяют наложенные на тело связи их реакциями и составляют условия равновесия этого тела, рассматривая его как свободное. Из полученных уравнений определяются искомые величины.

Для получения более простых систем уравнений рекомендуется оси проводить так, чтобы они пересекали больше неизвестных сил или были к ним перпендикулярны (если это только излишне не усложняет вычисления проекций и моментов других сил).

Новым элементом в составлении уравнений является вычисление моментов сил относительно осей координат.

В случаях, когда из общего чертежа трудно усмотреть, чему равен момент данной силы относительно какой-нибудь оси, рекомендуется изобразить на вспомогательном чертеже проекцию рассматриваемого тела (вместе с силой) на плоскость, перпендикулярную к этой оси.

В тех случаях, когда при вычислении момента возникают затруднения в определении проекции силы на соответствующую плоскость или плеча этой проекции, рекомендуется разложить силу на две взаимно-перпендикулярные составляющие (из которых одна параллельна какой-нибудь координатной оси), а затем воспользоваться теоремой Вариньона. Кроме того, можно вычислять моменты аналитически по формулам (52).

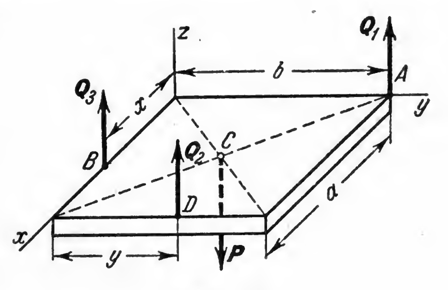


Рис. 119.

Задача 43. При подъеме однородной прямоугольной плиты с размерами сторон a и b (рис. 119) один из рабочих удерживает ее за угол A. В каких точках B и D должны поддерживать плиту двое других рабочих, чтобы силы, прикладываемые каждым из удерживающих плиту, были одинаковы.

Решение. Рассматриваем равновесие плиты, которая является свободным телом, находящимся в равновесии под действием четырех параллельных сил $\boldsymbol{Q}_1$, $\boldsymbol{Q}_2$, $\boldsymbol{Q}_3$, $\boldsymbol{P}$, где $\boldsymbol{P}$ — сила тяжести. Составляем для этих сил условия равновесия (68), считая плиту горизонтальной и проводя оси так, как показано на рис. 119. Получим:

$$Q_1 b + Q_2 y - P\frac{b}{2} = 0,$$

$$-Q_2 a - Q_3 x + P\frac{a}{2} = 0,$$

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = P.$$

По условиям задачи должно быть $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q$. Тогда из последнего уравнения $P = 3Q$. Подставляя это значение в первые два равенства, получаем, сокращая на Q,

$$b + y = \frac{3}{2} b, \qquad a + x = \frac{3}{2} a.$$

Отсюда находим:

$$x = \frac{a}{2}, \qquad y = \frac{b}{2}.$$

Задача 44. На горизонтальный вал, лежащий в подшипниках A и B (рис. 120), насажены перпендикулярно к оси вала шкив радиусом $r_1 = 20$ *см* и барабан радиусом $r_2 = 15$ *см*. Вал приводится во вращение ремнем, накинутым на шкив; при этом равномерно поднимается груз весом $P = 180$ *кГ*, привязанный к веревке, которая наматывается на барабан. Пренебрегая весом вала, барабана и шкива, определить реакции подшипников A и B и натяжение T_1 ведущей ветви ремня, если известно, что оно вдвое больше натяжения T_2 ведомой ветви. Дано: $a = 40$ *см*, $b = 60$ *см*, $\alpha = 30°$.

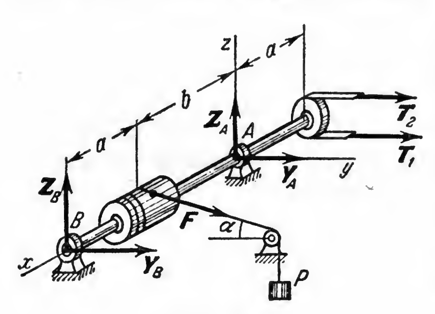


Рис. 120.

Решение. В рассматриваемой задаче при равномерном вращении вала действующие на него силы находятся в равновесии. Составим условия равновесия этих сил. Проводим оси координат (см. чертеж) и, считая вал свободным, изображаем действующие на него силы: натяжение веревки $\boldsymbol{F}$, по модулю равное P, натяжения ремня $\boldsymbol{T_1}$, $\boldsymbol{T_2}$ и реакции подшипников $\boldsymbol{Y_A}$, $\boldsymbol{Z_A}$, $\boldsymbol{Y_B}$, $\boldsymbol{Z_B}$ (каждая из реакций $\boldsymbol{R_A}$ и $\boldsymbol{R_B}$ может иметь любое направление в плоскости, перпендикулярной оси x, и изображается поэтому двумя составляющими).

Для составления условий равновесия (66) вычисляем проекции всех сил на оси координат и их моменты относительно этих осей (см. таблицу). Так

F_k	F	T_1	T_2	R_A	R_B
F_{ky}	$F\cos\alpha$	T_1	T_2	Y_A	Y_B
F_{kz}	$-F\sin\alpha$	0	0	Z_A	Z_B
$m_x(F_k)$	$-Fr_2$	T_1r_1	$-T_2r_1$	0	0
$m_y(F_k)$	$F\sin\alpha \cdot b$	0	0	0	$-Z_B(a+b)$
$m_z(F_k)$	$F\cos\alpha \cdot b$	$-T_1a$	$-T_2a$	0	$Y_B(a+b)$

как проекции всех сил на ось x равны нулю, то эта строка в таблице опущена[1]).

Составляя условия равновесия, получим (замечая, что $F=P$):

$$P\cos\alpha + T_1 + T_2 + Y_A + Y_B = 0, \qquad \text{(I)}$$

$$-P\sin\alpha + Z_A + Z_B = 0, \qquad \text{(II)}$$

$$-r_2P + r_1T_1 - r_1T_2 = 0, \qquad \text{(III)}$$

$$bP\sin\alpha - (a+b)\,Z_B = 0, \qquad \text{(IV)}$$

$$bP\cos\alpha - aT_1 - aT_2 + (a+b)\,Y_B = 0. \qquad \text{(V)}$$

Из уравнений (III) и (IV) находим сразу, учитывая, что $T_1=2T_2$:

$$T_2 = \frac{r_2P}{r_1} = 135\ \text{кГ},$$

$$Z_B = \frac{bP}{a+b}\sin\alpha = 54\ \text{кГ}.$$

Далее, из уравнения (V) получаем:

$$Y_B = \frac{3aT_2 - bP\cos\alpha}{a+b} \approx 69\ \text{кГ}.$$

Подставляя найденные значения в остальные уравнения, будем иметь:

$$Y_A = -P\cos\alpha - 3T_2 - Y_B \approx \approx -630\ \text{кГ},$$

$$Z_A = P\sin\alpha - Z_B = 36\ \text{кГ}.$$

Окончательно

$$T_1 = 270\ \text{кГ}, \quad Y_A \approx -630\ \text{кГ},$$

$$Z_A = 36\ \text{кГ}, \quad Y_B = 69\ \text{кГ},$$

$$Z_B = 54\ \text{кГ}.$$

Задача 45. Прямоугольная крышка весом $P=12$ кГ, образующая с вертикалью угол $\alpha=60°$, закреплена на горизонтальной оси AB в точке B цилиндрическим подшипником, а в точке A—подшипником с упором (рис. 121). Крышка удерживается в равновесии веревкой DE и оттягивается перекинутой через блок O нитью с грузом весом $Q=20$ кГ на конце (линия KO параллельна AB). Дано: $BD=BE$, $AK=a=0{,}4$ м, $AB=b=1$ м. Определить натяжение веревки DE и реакции подшипников A и B.

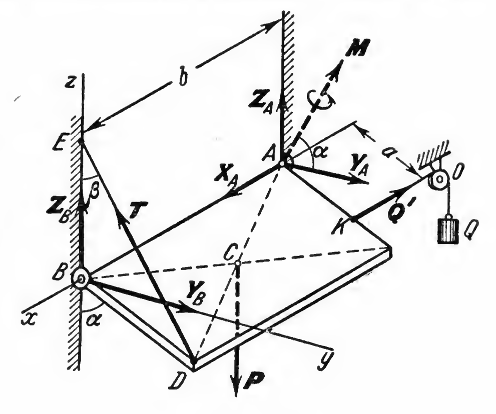


Рис. 121.

[1]) Предварительное составление таблиц при решении задач этого раздела особенно полезно. Таблица заполняется по столбцам, т. е. сначала вычисляются все проекции и моменты силы F, а затем силы T_1 и т. д. Таким образом, сначала все внимание сосредоточивается на первой силе, затем—на второй и т. д. Если же сразу составлять уравнения (66), то к рассмотрению каждой силы придется возвращаться шесть раз; при этом вероятнее появление ошибок, а особенно пропусков отдельных сил в том или ином уравнении.

Р е ш е н и е. Рассмотрим равновесие крышки, отбрасывая связи и считая ее свободной. Проводим оси координат, беря начало в точке B (при этом сила $\boldsymbol{T}$ пересечет оси y и z, что упрощает вид уравнений моментов), и изображаем действующие силы и реакции связей (см. чертеж; показанный пунктиром вектор $\boldsymbol{M}$ к данной задаче не относится). Для составления условий равновесия вычисляем величины проекций и моментов всех сил; при этом вводим угол β и обозначаем $BD=BE=d$ (см. таблицу). Подсчет моментов некоторых сил пояснен вспомогательными чертежами (рис. 122, a и b).

$\boldsymbol{F}_k$	$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{Q}'$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{R}_A$	$\boldsymbol{R}_B$
F_{kx}	0	$-Q'$	0	X_A	0
F_{ky}	0	0	$-T\sin\beta$	Y_A	Y_B
F_{kz}	$-P$	0	$T\cos\beta$	Z_A	Z_B
$m_x(\boldsymbol{F}_k)$	$-P\frac{d}{2}\sin\alpha$	0	$Td\sin\beta$	0	0
$m_y(\boldsymbol{F}_k)$	$-P\frac{b}{2}$	$Q'a\cos\alpha$	0	Z_Ab	0
$m_z(\boldsymbol{F}_k)$	0	$Q'a\sin\alpha$	0	$-Y_Ab$	0

На рис. 122, a показан вид в проекции на плоскость Byz с положительного конца оси x. Этот чертеж помогает вычислять моменты сил $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{T}$

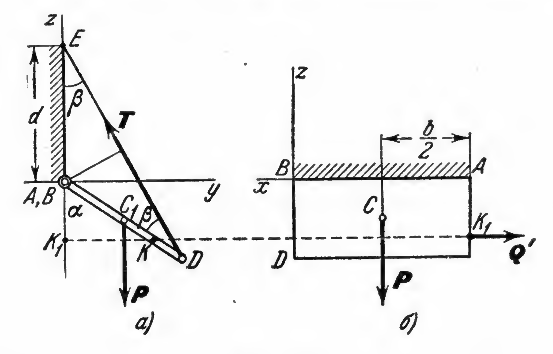


Рис. 122.

относительно оси x. Из него видно, что проекции этих сил на плоскость yz равны самим силам, а плечо силы $\boldsymbol{P}$ относительно точки B равно

$BC_1 \sin\alpha = \frac{d}{2}\sin\alpha$; плечо же силы T относительно этой точки равно $BE\sin\beta = d\sin\beta$.

На рис. 122, *б* показан вид в проекции на плоскость Bxz с положительного конца оси y. Этот чертеж (вместе с рис. 122, *а*) помогает вычислять моменты сил $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}'$ относительно оси y. Из него видно, что проекции этих сил на плоскость xz равны самим силам, а плечо силы $\boldsymbol{P}$ относительно точки B равно $\frac{1}{2}AB = \frac{b}{2}$; плечо же силы $\boldsymbol{Q}'$ относительно этой точки равно AK_1, т. е. $AK\cos\alpha$ или $a\cos\alpha$, что видно из рис. 122, *а*.

Теперь, составляя условия равновесия и считая $Q' = Q$, получим:

$$-Q + X_A = 0, \tag{I}$$

$$-T\sin\beta + Y_A + Y_B = 0, \tag{II}$$

$$-P + T\cos\beta + Z_A + Z_B = 0, \tag{III}$$

$$-P\frac{d}{2}\sin\alpha + Td\sin\beta = 0, \tag{IV}$$

$$-P\frac{b}{2} + Qa\cos\alpha + Z_A b = 0, \tag{V}$$

$$Qa\sin\alpha - Y_A b = 0. \tag{VI}$$

Учитывая, что $\beta = \frac{\alpha}{2} = 30°$, найдем из уравнений (I), (IV), (V) и (VI):

$$X_A = Q = 20\ кГ, \qquad T = P\frac{\sin\alpha}{2\sin\beta} \approx 10{,}4\ кГ;$$

$$Z_A = \frac{P}{2} - \frac{Qa}{b}\cos\alpha = 2\ кГ; \quad Y_A = \frac{Qa}{b}\sin\alpha \approx 6{,}9\ кГ.$$

Подставляя эти значения в уравнения (II) и (III), получим:

$$Y_B = T\sin\beta - Y_A = -1{,}7\ кГ,\ Z_B = P - T\cos\beta - Z_A = 1\ кГ.$$

Окончательно,

$$T \approx 10{,}4\ кГ,\ X_A = 20\ кГ,\ Y_A \approx 6{,}9\ кГ,\ Z_A = 2\ кГ,\ Y_B = -1{,}7\ кГ,\ Z_B = 1\ кГ.$$

Задача 46. Решить задачу 45 для случая, когда на крышку дополнительно действует расположенная в ее плоскости пара с моментом $M = 12$ *кГм*; поворот пары направлен (если смотреть на крышку сверху) против хода часовой стрелки.

Р е ш е н и е. В дополнение к действующим на крышку силам (см. рис. 121) изображаем момент $\boldsymbol{M}$ пары в виде вектора, перпендикулярного к крышке и приложенного в любой точке, например в точке A. Его проекции на оси координат будут: $M_x = 0$, $M_y = M\cos\alpha$, $M_z = M\sin\alpha$. Тогда, составляя условия равновесия (67), найдем, что уравнения (I) — (IV) останутся такими же, как в предыдущей задаче, а последние два уравнения будут:

$$-P\frac{b}{2} + Z_A b + Qa\cos\alpha + M\cos\alpha = 0, \tag{V'}$$

$$-Y_A b + Qa\sin\alpha + M\sin\alpha = 0. \tag{VI'}$$

Заметим, что этот же результат можно получить, не составляя уравнения в виде (67), а изобразив пару двумя силами, направленными, например, вдоль линий AB и KO (при этом модули сил будут, очевидно, равны M/a) и пользуясь затем обычными условиями равновесия.

Решая уравнения (I) — (IV), (V'), (VI'), найдем результаты, аналогичные полученным в задаче 45, с той лишь разницей, что во всех формулах вместо

величины Qa войдет $Qa+M$. Окончательно получим:

$T\approx 10{,}4$ *кГ*, $X_A=20$ *кГ*, $Y_A\approx 17{,}3$ *кГ*, $Z_A=-4$ *кГ*, $Y_B=-12{,}1$ *кГ*, $Z_B=7$ *кГ*.

Задача 47. Горизонтальный стержень AB прикреплен к стене шаровым шарниром A и удерживается в положении, перпендикулярном к стене, растяжками KE и CD, показанными на рис. 123, *а*. К концу B стержня подвешен груз весом $P=36$ *кГ*. Определить реакцию шарнира A и натяжения растяжек, если $AB=a=0{,}8$ *м*; $AC=AD_1=b=0{,}6$ *м*; $AK=\frac{a}{2}$, $\alpha=30°$, $\beta=60°$. Весом стержня пренебречь.

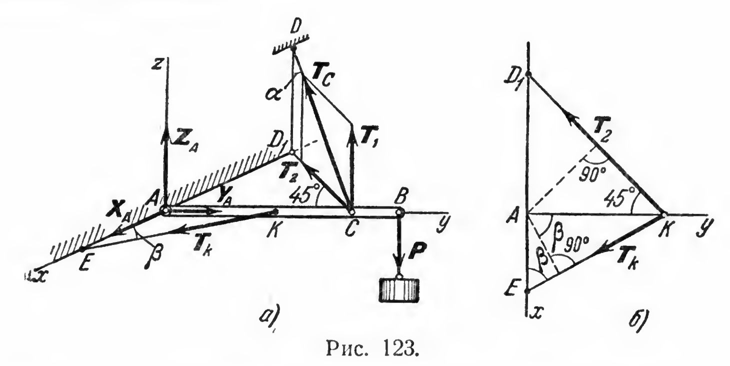


Рис. 123.

Решение. Рассмотрим равновесие стержня, отбрасывая связи и считая его свободным. На стержень действуют сила P и реакции T_K, T_C, X_A, Y_A, Z_A. Проводим оси координат и вычисляем проекции и моменты всех сил (см. таблицу).

F_k	P	T_K	T_C	R_A
F_{kx}	0	$T_K \cos\beta$	$-T_2\sin 45°$	X_A
F_{ky}	0	$-T_K\sin\beta$	$-T_2\cos 45°$	Y_A
F_{kz}	$-P$	0	T_1	Z_A
$m_x(F_k)$	$-Pa$	0	$T_1 b$	0
$m_z(F_k)$	0	$-T_K\frac{a}{2}\cos\beta$	$T_2 b\sin 45°$	0

Так как все силы пересекают ось y, то их моменты относительно этой оси равны нулю. Для вычисления моментов силы T_C относительно осей координат разлагаем ее на составляющие T_1 и T_2 ($T_1=T_C\cos\alpha$, $T_2=T_C\sin\alpha$),

а затем применяем теорему Вариньона[1]). Тогда $m_x(T_C) = m_x(T_1)$, так как $m_x(T_2) = 0$; $m_z(T_C) = m_z(T_2)$, так как $m_z(T_1) = 0$. Вычисление моментов сил относительно оси z пояснено вспомогательным чертежом (рис. 123, *б*), на котором дан вид в проекции на плоскость Axy.

Заменяя теперь T_1 и T_2 их значениями, получим следующие уравнения:

$$T_K \cos\beta - T_C \sin\alpha \sin 45^\circ + X_A = 0, \qquad \text{(I)}$$

$$-T_K \sin\beta - T_C \sin\alpha \cos 45^\circ + Y_A = 0, \qquad \text{(II)}$$

$$-P + T_C \cos\alpha + Z_A = 0, \qquad \text{(III)}$$

$$-Pa + T_C b \cos\alpha = 0, \qquad \text{(IV)}$$

$$-T_K \frac{a}{2} \cos\beta + T_C b \sin\alpha \sin 45^\circ = 0. \qquad \text{(V)}$$

Решая эту систему уравнений, найдем окончательно $T_C \approx 55{,}4$ *кГ*; $T_K \approx 58{,}8$ *кГ*; $X_A \approx -9{,}8$ *кГ*; $Y_A \approx 70{,}5$ *кГ*; $Z_A = -12$ *кГ*. Составляющие X_A и Z_A имеют, таким образом, направления, противоположные показанным на чертеже.

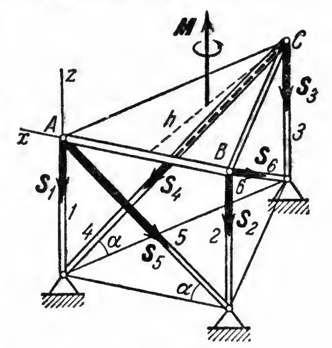


Рис. 124.

Задача 48. Горизонтальная плита ABC, имеющая форму равностороннего треугольника со стороной a, закреплена с помощью шести стержней так, как показано на рис. 124; при этом каждый из наклонных стержней образует с плоскостью горизонта угол $\alpha = 30^\circ$. В плоскости плиты действует пара с моментом M. Пренебрегая весом плиты, определить усилия в стержнях.

Решение. Рассматривая плиту, как свободную, изображаем вектор момента действующей на нее пары $\boldsymbol{M}$ и реакции стержней $\boldsymbol{S}_1$, $\boldsymbol{S}_2, \ldots, \boldsymbol{S}_6$; реакции направляем так, как если бы все стержни были растянуты (считаем, что плита отрывается от стержней). При равновесии сумма моментов всех действующих на тело сил и пар [см. равенства (67)] относительно любой оси должна быть равна нулю.

Направляя ось z вдоль стержня *1* и составляя уравнение моментов относительно этой оси, получим, так как $M_z = M$:

$$(S_6 \cos\alpha)\, h + M = 0,$$

где $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ — высота треугольника. Отсюда находим:

$$S_6 = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{M}{a\cos\alpha}.$$

Составляя теперь уравнения моментов относительно осей, которые направляем вдоль стержней *2* и *3*, получим такие же результаты для сил S_4 и S_5.

[1]) Обращаем внимание на то, что угол между силой T_C и плоскостью Ayz не равен 45°, как иногда ошибочно полагают в аналогичных случаях. Поэтому, например, для вычисления $m_x(T_C)$ обычным путем надо сначала определить этот угол, что усложняет расчет. С помощью же теоремы Вариньона сразу находим, что $m_x(T_C) = m_x(T_1) = T_1 \cdot AC$.

Теперь составим уравнение моментов относительно оси x, направленной вдоль стороны BA треугольника. Получим, учитывая, что $M_x = 0$:

$$S_3 h + (S_4 \sin \alpha) h = 0.$$

Отсюда, так как $S_4 = S_6$, находим:

$$S_3 = -S_4 \sin \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{M}{a} \operatorname{tg} \alpha.$$

Такие же значения получим для величин S_1 и S_2, составляя уравнения моментов относительно осей AC и CB.

Окончательно при $\alpha = 30°$ будем иметь:

$$S_1 = S_2 = S_3 = \frac{2}{3} \frac{M}{a}; \qquad S_4 = S_5 = S_6 = -\frac{4}{3} \frac{M}{a}.$$

Полученные результаты показывают, что действием заданной пары вертикальные стержни растягиваются, а наклонные сжимаются.

Из рассмотренного примера видно, что при решении задач не всегда обязательно пользоваться условиями равновесия (66). Для пространственной системы сил, как и для плоской, существует несколько форм условий равновесия, из которых форма (66) является основной.

В частности, можно доказать, что для равновесия пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы были равны нулю суммы моментов всех сил относительно шести осей, направленных или по ребрам какой-нибудь треугольной пирамиды, или по боковым ребрам и ребрам основания треугольной призмы.

Последние условия и были использованы при решении задачи 48.

Задача 49. Найти усилия в сечении AA_1 сложно нагруженного бруса, изображенного на рис. 125, *а*. Сила $\boldsymbol{Q}$ проходит через центр правой части бруса; сила $\boldsymbol{F}$ лежит в плоскости Oxz; сила $\boldsymbol{P}$ параллельна оси Oy. Длина правой части бруса равна b, высота — h.

Решение. Искомые усилия определяем аналогично тому, как это было сделано в задаче 29 (§ 27). Для этого рассечем брус сечением AA_1 и рассмотрим равновесие правой части бруса (рис. 125, *б*); рассматривать предварительно равновесие бруса в целом для определения реакций связей (как

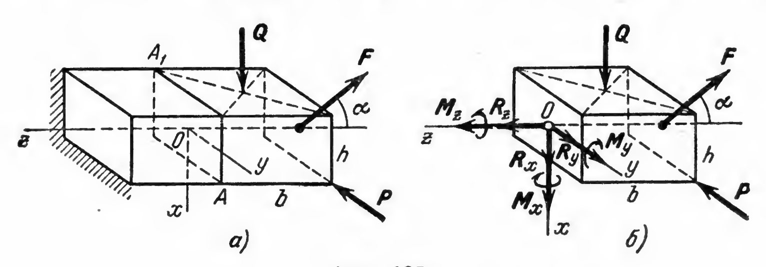


Рис. 125.

в задаче 29) здесь не понадобится, так как на правую часть бруса никаких связей не наложено. Проведем через центр сечения O координатные оси x, y, z. Действие отброшенной части бруса заменится в данном случае некоторой наперед неизвестной пространственной системой распределенных сил; эти силы, согласно результатам § 47, будут в свою очередь эквивалентны одной, приложенной в центре O силе $\boldsymbol{R}$ с наперед неизвестными проекциями R_x,

R_y, R_z и паре с моментом $\boldsymbol{M}_0$, проекции которого M_x, M_y, M_z также неизвестны. Изображая на рис. 125, *б* эти силы и моменты и составляя для всех действующих на правую часть бруса сил и пар первые три из уравнений (66) и уравнения (67), получим

$$R_x - F\sin\alpha + Q = 0, \qquad R_y - P = 0, \qquad R_z - F\cos\alpha = 0;$$
$$M_x - bP = 0, \qquad M_y + bF\sin\alpha - \frac{b}{2}Q = 0, \qquad M_z - \frac{h}{2}P = 0.$$

Решая эти уравнения, найдем

$$R_x = F\sin\alpha - Q, \qquad R_y = P, \qquad R_z = F\cos\alpha;$$
$$M_x = bP, \qquad M_y = \frac{b}{2}Q - bF\sin\alpha, \qquad M_z = \frac{h}{2}P.$$

Следовательно, в сечении AA_1 будут действовать: две поперечные силы, равные R_x и R_y, продольная растягивающая сила, равная R_z, и три пары с моментами, равными M_x, M_y и M_z: первые две из этих пар изгибают брус около осей Ox и Oy, а третья создает кручение вокруг оси Oz.

§ 52*. Условия равновесия несвободного твердого тела. Понятие об устойчивости равновесия. В §§ 11, 24, 49 и др. были получены уравнения, дающие необходимые условия равновесия *свободного твердого тела*. К несвободным телам эти условия применяют, пользуясь аксиомой связей. При этом получаются уравнения, которые служат для определения реакций связей.

Вопрос об условиях равновесия несвободного твердого тела возникает тогда, когда наложенные на тело связи закрепляют его не жестко (см. задачи 6, 7 в § 13 и др.). В этом случае только часть уравнений, получаемых с помощью аксиомы связей, содержит реакции связей и служит для определения этих реакций. Остальные уравнения показывают, при каких соотношениях между заданными силами (задача 6) или в каком положении (задача 7) возможно равновесие тела, т. е. дают условия его равновесия. Таким образом, *условия равновесия несвободного твердого тела определяются теми из составленных с помощью аксиомы связей уравнений, которые не содержат реакций связей.*

Например, для тела, имеющего неподвижную ось вращения z (см. рис. 126), мы, пользуясь аксиомой связей и составляя уравнения (66), найдем, что реакции подшипников A и B входят во все эти уравнения, кроме последнего (см. задачу 44). В уравнение же $\sum m_z(\boldsymbol{F}_k)=0$ реакции не войдут, так как они пересекают ось z.

Следовательно, *условие равновесия тела, имеющего неподвижную ось вращения, состоит в том, что сумма моментов всех действующих сил относительно этой оси должна быть равна нулю*:

$$\sum m_z(F_k) = 0.$$

Для тела, закрепленного наложенными связями не жестко, возникает важный вопрос об *устойчивости равновесия.* Если действующие силы стремятся вернуть тело в положение равновесия (когда оно из этого положения выведено), то рассматриваемое положение равновесия является *устойчивым*; в противном случае равновесие будет *неустойчивым.* Практически тело может находиться в равновесии только когда положение равновесия устойчиво.

Рассмотрим, например, тело, закрепленное на горизонтальной оси. По найденному условию тело будет находиться в равновесии под действием силы тяжести $\boldsymbol{P}$, когда $m_z(\boldsymbol{P})=0$, т. е. когда центр тяжести C тела занимает наинизшее (рис. 126, *а*) или наивысшее

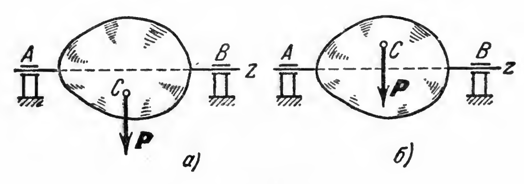


Рис. 126.

(рис. 126, *б*) положение. В первом случае при небольшом отклонении момент силы $\boldsymbol{P}$ стремится вернуть тело в положение равновесия. Во втором случае при сколь угодно малом отклонении момент силы $\boldsymbol{P}$ будет это отклонение увеличивать. Следовательно, *равновесие тела является устойчивым, когда его центр тяжести занимает наинизшее положение, и неустойчивым — когда наивысшее.* Этот результат справедлив во всех случаях равновесия тел под действием силы тяжести. Если центр тяжести тела находится на оси вращения, то равновесие тела называют *безразличным* или *астатическим.*

Исследуем еще характер равновесия стержня, рассмотренного в задаче 7 (или 12). Условием равновесия стержня является $\sum m_A(\boldsymbol{F}_k)=0$. При этом (см. рис. 38):

$$m_A(\boldsymbol{T})=Qa\cos\frac{\alpha}{2}, \qquad |m_A(\boldsymbol{P})|=Pa\sin\alpha.$$

Если увеличить угол α, то $|m_A(\boldsymbol{P})|$ возрастет, а $m_A(\boldsymbol{T})$ уменьшится и под действием силы $\boldsymbol{P}$ угол α будет продолжать возрастать. Если же уменьшить угол α, то $m_A(\boldsymbol{T})$ возрастет, а $m_A(\boldsymbol{P})$ уменьшится и под действием силы $T=Q$ угол α будет продолжать уменьшаться. Следовательно, положение равновесия стержня, определяемое равенством $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{Q}{2P}$, является *неустойчивым.* Когда $\alpha=180°$, равновесие будет устойчивым, если $Q<2P$, и неустойчивым, если $Q>2P$, в чем можно убедиться, введя угол $\beta=180°-\alpha$.

Рассмотренный метод исследования применим лишь в простейших случаях. Более сложные случаи исследуются динамическими методами.

ГЛАВА IX

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

§ 53. Центр параллельных сил. Понятие о центре параллельных сил возникает при решении некоторых задач механики и, в частности, при определении центров тяжести тел.

Рассмотрим систему параллельных и одинаково направленных сил $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$, приложенных к твердому телу в точках A_1, $A_2, \ldots, A_n$ (рис. 127). Очевидно, что эта система имеет равнодействующую $\boldsymbol{R}$, направленную так же, как слагаемые силы, причем по модулю

$$R = \sum F_k. \qquad (70)$$

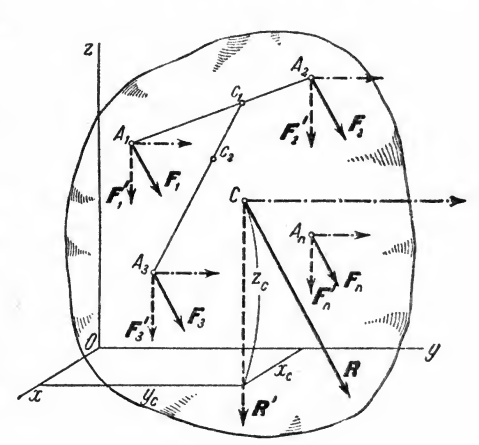


Рис. 127.

Если теперь каждую из сил системы поворачивать около ее точки приложения в одну и ту же сторону и на один и тот же угол, то мы будем получать новые системы одинаково направленных параллельных сил с теми же модулями и точками приложения, но с другим общим направлением (см., например, пунктирные линии на рис. 127). Равнодействующая каждой из таких систем параллельных сил будет, очевидно, иметь тот же модуль R, но всякий раз другую линию действия. Чтобы найти эту линию действия, надо каждый раз определять какую-нибудь точку, через которую она проходит. Покажем, что при всех таких поворотах *линия действия равнодействующей всегда проходит через одну и ту же точку С*. В самом деле, сложив сначала силы $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$, найдем (см. § 17), что их равнодействующая $\boldsymbol{R}_1$ (на чертеже не показана) при любых поворотах сил будет проходить через точку c_1, лежащую на прямой A_1A_2 и удовлетворяющую равенству $F_1 \cdot A_1c_1 = F_2 \cdot A_2c_1$, так как при поворотах сил ни положение прямой A_1A_2, ни это равенство не изменяются. Складывая теперь силу $\boldsymbol{R}_1$ с силой $\boldsymbol{F}_3$, мы получим, что их равнодействующая, являющаяся одновременно равнодействующей сил $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$, будет всегда проходить через аналогично определяемую точку c_2, лежащую на прямой c_1A_3, и т. д. Доведя эту операцию последовательного сложения до конца, мы убедимся, что равнодействующая $\boldsymbol{R}$ всех сил действительно проходит всегда через одну и

ту же точку C, положение которой по отношению к точкам A_1, A_2, ..., A_n, т. е. к телу, будет неизменным.

Точка C, через которую проходит линия действия равнодействующей системы параллельных сил при любых поворотах этих сил около их точек приложения в одну и ту же сторону и на один и тот же угол, называется центром параллельных сил.

Найдем *координаты центра параллельных сил.* Положение точки C по отношению к телу является неизменным и от выбора системы координат зависеть не будет. Возьмем поэтому произвольные координатные оси $Oxyz$ и обозначим в этих осях координаты точек: $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, ...; $C(x_C, y_C, z_C)$. Пользуясь тем, что от направления сил положение точки C не зависит, повернем сначала силы около их точек приложения так, чтобы они стали параллельны оси Oz, и применим к повернутым силам F'_1, F'_2, ..., F'_n теорему Вариньона (§ 50). Так как R' является равнодействующей этих сил, то по формуле (69), беря моменты относительно оси Oy, получим

$$m_y(R') = \sum m_y(F'_k). \tag{71}$$

Но из чертежа [или из равенств (52)] видно, что $m_y(R') = Rx_C$, так как $R' = R$; аналогично $m_y(F'_1) = F_1x_1$, так как $F'_1 = F_1$ и т. д. Подставляя все эти величины в равенство (71), будем иметь: $Rx_C = F_1x_1 + F_2x_2 + \ldots + F_nx_n$. Отсюда находим:

$$x_C = \frac{F_1x_1 + F_2x_2 + \ldots + F_nx_n}{R} = \frac{\sum F_kx_k}{R}.$$

Для координаты y_C аналогичную формулу получим, беря моменты относительно оси Ox. Чтобы определить z_C, повернем опять все силы, сделав их параллельными оси Oy, и применим к этим силам (изображенным пунктиром с точками) теорему Вариньона, беря моменты относительно оси Ox. Это даст:

$$-Rz_C = -F_1z_1 + (-F_2z_2) + \ldots + (-F_nz_n),$$

откуда найдем z_C.

Окончательно получим следующие формулы для координат центра параллельных сил:

$$x_C = \frac{\sum F_kx_k}{R}, \quad y_C = \frac{\sum F_ky_k}{R}, \quad z_C = \frac{\sum F_kz_k}{R}, \tag{72}$$

где R определяется равенством (70).

Заметим, что формулы (70) и (72) будут справедливы и для параллельных сил, направленных в разные стороны, если в них считать F_k величинами алгебраическими (для одного направления со знаком плюс, а для другого — минус) и если при этом будет $R \neq 0$.

§ 54. Центр тяжести твердого тела. На любую частицу тела, находящегося вблизи земной поверхности, действует направленная вертикально вниз сила, называемая силой тяжести (подробнее вопрос о том, что собою представляет сила тяжести, будет рассмотрен в § 121).

Для тел, размеры которых очень малы по сравнению с земным радиусом, силы тяжести, действующие на частицы тела, можно считать параллельными друг другу и сохраняющими для каждой частицы постоянную величину при любых поворотах тела. Поле тяжести, в котором выполняются эти два условия, называют *однородным полем тяжести.*

Равнодействующую сил тяжести $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_n$, действующих на частицы данного тела, обозначим $\boldsymbol{P}$ (рис. 128). Модуль этой силы равен весу тела и определяется равенством[1])

$$P = \sum p_k. \qquad (73)$$

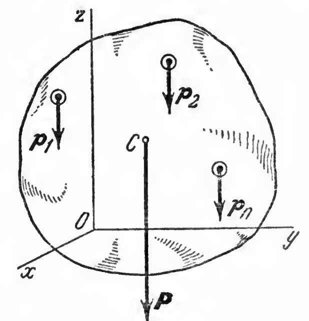


Рис. 128.

При любом повороте тела силы $\boldsymbol{p}_k$ остаются приложенными в одних и тех же точках тела и параллельными друг другу; изменяется только их направление по отношению к телу. Следовательно, по доказанному в § 53, равнодействующая $\boldsymbol{P}$ сил $\boldsymbol{p}_k$ будет при любых положениях тела проходить через одну и ту же неизменно связанную с телом точку C, являющуюся центром параллельных сил тяжести $\boldsymbol{p}_k$. Эта точка и называется *центром тяжести тела.* Таким образом, *центром тяжести твердого тела называется неизменно связанная с этим телом точка, через которую проходит линия действия равнодействующей сил тяжести частиц данного тела при любом положении тела в пространстве.* Что такая точка всегда существует, следует, как мы видели, из доказанного в § 53.

Координаты центра тяжести, как центра параллельных сил, определяются формулами (72) и будут:

$$x_C = \frac{\sum p_k x_k}{P}, \quad y_C = \frac{\sum p_k y_k}{P}, \quad z_C = \frac{\sum p_k z_k}{P}, \qquad (74)$$

где x_k, y_k, z_k — координаты точек приложения сил тяжести $\boldsymbol{p}_k$ частиц тела.

---

[1]) Весом тела называют численную величину силы, с которой покоящееся тело, находящееся в поле тяжести, давит на опору, препятствующую его вертикальному падению (например, на чашу весов).

Отметим в заключение, что согласно определению центр тяжести — это точка геометрическая; она может лежать и вне пределов данного тела (например, для кольца).

§ 55. Координаты центров тяжести однородных тел. Для однородного тела вес p_k любой его части пропорционален объему v_k этой части: $p_k = \gamma v_k$, а вес P всего тела пропорционален объему V этого тела, т. е. $P = \gamma V$, где γ — вес единицы объема.

Подставив эти значения P и p_k в формулы (74), мы заметим, что в числителе γ как общий множитель выносится за скобку и сокращается с γ в знаменателе. В результате из формул (74) получим:

$$x_C = \frac{\Sigma v_k x_k}{V}, \quad y_C = \frac{\Sigma v_k y_k}{V}, \quad z_C = \frac{\Sigma v_k z_k}{V}. \tag{75}$$

Как видно, центр тяжести однородного тела зависит только от его геометрической формы, а от величины γ не зависит. По этой причине точку C, координаты которой определяются формулами (75), называют *центром тяжести объема* V.

Путем аналогичных рассуждений легко найти, что если тело представляет собой однородную плоскую и тонкую пластину, то для нее

$$x_C = \frac{\Sigma s_k x_k}{S}, \quad y_C = \frac{\Sigma s_k y_k}{S}, \tag{76}$$

где S — площадь всей пластины, а s_k — площади ее частей.

Точку, координаты которой определяются формулами (76), называют *центром тяжести площади* S.

Точно так же получаются формулы для координат *центра тяжести линии:*

$$x_C = \frac{\Sigma l_k x_k}{L}, \quad y_C = \frac{\Sigma l_k y_k}{L}, \quad z_C = \frac{\Sigma l_k z_k}{L}, \tag{77}$$

где L — длина всей линии, l_k — длины ее частей.

По формулам (77) можно находить центры тяжести изделий из тонкой проволоки постоянного сечения.

Таким образом, центр тяжести однородного тела определяется, как центр тяжести соответствующего объема, площади или линии.

§ 56. Способы определения координат центров тяжести тел. Исходя из полученных выше общих формул, можно указать следующие конкретные способы определения координат центров тяжести тел.

1) Симметрия. Если однородное тело имеет плоскость, ось или центр симметрии, то его центр тяжести лежит соответственно или в плоскости симметрии, или на оси симметрии, или в центре симметрии.

Допустим, например, что однородное тело имеет плоскость симметрии. Тогда этой плоскостью оно разбивается на две такие части, веса которых p_1 и p_2 равны друг другу, а центры тяжести находятся на одинаковых расстояниях от плоскости симметрии. Следовательно, центр тяжести тела как точка, через которую проходит равнодействующая двух равных и параллельных сил p_1 и p_2, будет действительно лежать в плоскости симметрии. Аналогичный результат получается и в случаях, когда тело имеет ось или центр симметрии.

Из свойств симметрии следует, что центр тяжести однородного круглого кольца, круглой или прямоугольной пластины, прямоугольного параллелепипеда, шара и других однородных тел, имеющих центр симметрии, лежит в геометрическом центре (центре симметрии) этих тел.

2) Разбиение. Если тело можно разбить на конечное число таких частей, для каждой из которых положение центра тяжести известно, то координаты центра тяжести всего тела можно непосредственно вычислить по формулам (74)—(77). При этом число слагаемых в каждом из числителей будет равно числу частей, на которые разбито тело.

Задача 50. Определить координаты центра тяжести однородной пластины, изображенной на рис. 129. Все размеры даны в сантиметрах.

Решение. Проводим оси координат и разбиваем пластину на три прямоугольника (линии разреза показаны пунктиром). Вычисляем координаты центров тяжести каждого из прямоугольников и их площади (см. таблицу).

№№	1	2	3
x_k	−1	1	5
y_k	1	5	9
s_k	4	20	12

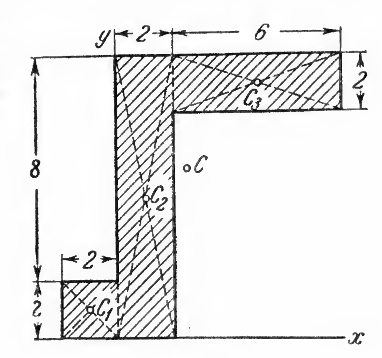


Рис. 129.

Площадь всей пластины

$$S = s_1 + s_2 + s_3 = 36 \text{ см}^2.$$

Подставляя вычисленные величины в формулы (76), получаем:

$$x_C = \frac{x_1 s_1 + x_2 s_2 + x_3 s_3}{S} = \frac{-4 + 20 + 60}{36} = 2\frac{1}{9} \text{ см};$$

$$y_C = \frac{y_1 s_1 + y_2 s_2 + y_3 s_3}{S} = \frac{4 + 100 + 108}{36} = 5\frac{8}{9} \text{ см}.$$

Найденное положение центра тяжести C показано на чертеже; точка C оказалась вне пластины. На этом примере мы еще раз убеждаемся, что центр

тяжести тела — это геометрическая точка, которая может лежать и вне пределов данного тела.

3) Дополнение. Этот способ является частным случаем способа разбиения. Он применяется к телам, имеющим вырезы, если центры тяжести тела без выреза и вырезанной части известны.

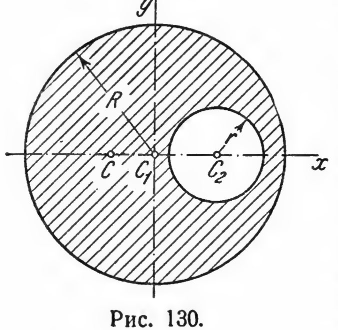


Рис. 130.

Задача 51. Определить положение центра тяжести круглой пластины радиуса R с вырезом радиуса r (рис. 130). Расстояние $C_1C_2 = a$.

Решение. Центр тяжести пластины лежит на линии C_1C_2, так как эта линия является осью симметрии. Проводим оси координат. Для нахождения координаты x_C дополняем площадь пластины до полного круга (часть I), а затем вычитаем из полученной площади площадь вырезанного круга (часть II). При этом площадь части II, как вычитаемая, должна браться со знаком минус. Тогда $s_1 = \pi R^2$, $x_1 = 0$; $s_2 = -\pi r^2$, $x_2 = a$; $S = s_1 + s_2 = \pi(R^2 - r^2)$. Подставляя найденные значения в формулы (76), получаем:

$$x_C = \frac{x_1 s_1 + x_2 s_2}{S} = -\frac{ar^2}{R^2 - r^2}; \quad y_C = 0.$$

Найденный центр тяжести C, как видим, лежит левее точки C_1.

4) Интегрирование. Если тело нельзя разбить на несколько конечных частей, положения центров тяжести которых известны, то тело разбивают сначала на произвольные малые объемы Δv_k, для которых формулы (75) принимают вид

$$x_C = \frac{\sum x_k \Delta v_k}{V} \text{ и т. д.,} \tag{78}$$

где x_k, y_k, z_k — координаты некоторой точки, лежащей внутри объема Δv_k. Затем в равенствах (78) переходят к пределу, устремляя все Δv_k к нулю, т. е. стягивая эти объемы в точки. Тогда стоящие в числителях суммы обращаются в интегралы, распространенные на весь объем тела, и формулы (78) дают в пределе:

$$x_C = \frac{1}{V}\int_{(V)} x\,dv, \quad y_C = \frac{1}{V}\int_{(V)} y\,dv, \quad z_C = \frac{1}{V}\int_{(V)} z\,dv. \tag{79}$$

Аналогично для координат центров тяжести площадей и линий получаем в пределе из формул (76) и (77)

$$x_C = \frac{1}{S}\int_{(S)} x\,ds, \quad y_C = \frac{1}{S}\int_{(S)} y\,ds \tag{80}$$

и

$$x_C = \frac{1}{L}\int_{(L)} x\,dl, \quad y_C = \frac{1}{L}\int_{(L)} y\,dl, \quad z_C = \frac{1}{L}\int_{(L)} z\,dl. \qquad (81)$$

Пример применения этих формул к определению координат центра тяжести рассмотрен в следующем параграфе.

5) Экспериментальный способ. Центры тяжести неоднородных тел сложной конфигурации (самолет, паровоз и т. п.) можно определять экспериментально. Один из возможных экспериментальных методов (метод подвешивания) состоит в том, что тело подвешивают на нити или тросе за различные его точки. Направление нити, к которой подвешено тело, будет каждый раз давать направление силы тяжести. Точка пересечения этих направлений определяет центр тяжести тела.

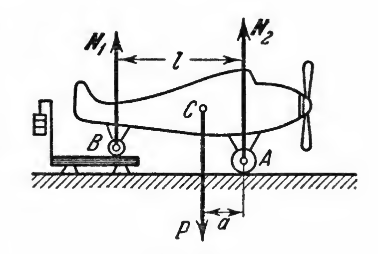


Рис. 131.

Другим возможным способом экспериментального определения центра тяжести является метод взвешивания. Идея этого метода ясна из рассмотренного ниже примера.

Пример. Покажем, как можно экспериментально определить положение центра тяжести самолета (расстояние a), если расстояние $AB = l$ (рис. 131) известно. Поставив колесо B на платформу весов, найдем взвешиванием силу давления колеса на платформу; тем самым будет найдена численно равная этой силе реакция N_1. Точно так же взвешиванием находим реакцию N_2. Приравнивая затем нулю сумму моментов всех сил относительно центра тяжести C самолета, получаем $N_2 a - N_1(l - a) = 0$, откуда находим

$$a = \frac{N_1 l}{N_1 + N_2}.$$

Очевидно, $N_1 + N_2 = P$, где P — вес самолета. Если величина P наперед известна, то для определения a можно обойтись только однократным взвешиванием.

§ 57. Центры тяжести некоторых однородных тел.

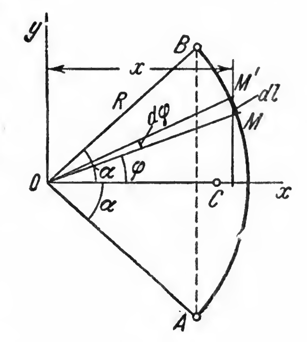


Рис. 132.

1) Центр тяжести дуги окружности. Рассмотрим дугу AB радиуса R с центральном углом $AOB = 2\alpha$. В силу симметрии центр тяжести этой дуги лежит на оси Ox (рис. 132). Найдем координату x_C по формулам (81). Для этого выделим на дуге AB элемент MM' длиною $dl = R d\varphi$, положение которого определяется углом φ. Координата x элемента MM' будет $x = R\cos\varphi$. Подставляя эти значения x и dl

в первую из формул (81) и имея в виду, что интеграл должен быть распространен на всю длину дуги, получим:

$$x_C = \frac{1}{L}\int_A^B x\,dl = \frac{R^2}{L}\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\varphi\,d\varphi = 2\frac{R^2}{L}\sin\alpha,$$

где L — длина дуги AB, равная $R\cdot 2\alpha$. Отсюда окончательно находим, что *центр тяжести дуги окружности лежит на ее оси симметрии на расстоянии от центра O, равном*

$$x_C = R\frac{\sin\alpha}{\alpha}, \qquad (82)$$

где угол α измеряется в радианах.

Этот результат можно получить и не пользуясь явно понятием об интеграле. По формуле (77), если обозначить длину элемента дуги через Δl_k, будет

$$x_C = \frac{1}{L}\sum x_k \Delta l_k,$$

где x_k — координата элемента Δl_k, причем с точностью до малых высшего порядка $x_k = R\cos\varphi_k$ (вместо φ пишем φ_k). Тогда (см. § 28, рис. 74) $x_k\,\Delta l_k = R\,\Delta l_k\cos\varphi_k = R\,\Delta y_k$, откуда $\sum x_k\,\Delta l_k = R\sum\Delta y_k = R\cdot AB$. В результате, замечая, что $AB = 2R\sin\alpha$ и $L = R\cdot 2\alpha$, придем к формуле (82).

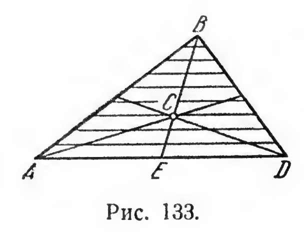


Рис. 133.

2) Центр тяжести площади треугольника. Разобьем площадь треугольника ABD (рис. 133) прямыми, параллельными стороне AD, на n узких полосок; центры тяжести этих полосок будут, очевидно, лежать на медиане BE треугольника. Следовательно, и центр тяжести всего треугольника лежит на этой медиане. Аналогичный результат получается для двух других медиан. Отсюда заключаем, что *центр тяжести площади треугольника лежит в точке пересечения его медиан.* При этом, как известно,

$$CE = \frac{1}{3}BE.$$

3) Центр тяжести площади кругового сектора. Рассмотрим круговой сектор OAB радиуса R с центральным углом 2α (рис. 134). Разобьем мысленно площадь сектора OAB радиусами, проведенными из центра O, на n секторов. В пределе, при неограниченном увеличении числа n, эти секторы можно рассматривать как плоские треугольники, центры тяжести которых лежат на дуге DE

радиуса $\frac{2}{3}R$. Следовательно, центр тяжести сектора OAB будет совпадать с центром тяжести дуги DE, положение которого найдется по формуле (82). Окончательно получим, что *центр тяжести площади кругового сектора лежит на его оси симметрии на расстоянии от центра O, равном*

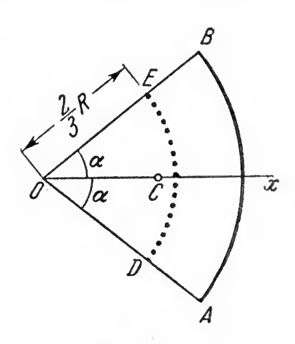


Рис. 134.

$$x_C = \frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}. \qquad (83)$$

4) Центр тяжести объема пирамиды. Рассмотрим треугольную пирамиду (тетраэдр) $ABDE$ (рис. 135). Для нахождения центра тяжести пирамиды разобьем ее объем плоскостями, параллельными основанию ABD, на n элементарных усеченных пирамид, которые в пределе, при неограниченном увеличении числа n, можно рассматривать как плоские треугольники. Центры тяжести этих треугольников лежат на прямой EC_1, соединяющей вершину E пирамиды с центром тяжести C_1 ее основания. Следовательно, на прямой EC_1 будет лежать и центр тяжести всей пирамиды.

Такими же рассуждениями найдем, что центр тяжести данной пирамиды должен лежать на прямой BC_2, соединяющей вершину B с центром тяжести грани ADE. Следовательно, искомый центр тяжести лежит в точке C, где пересекаются прямые EC_1 и BC_2.

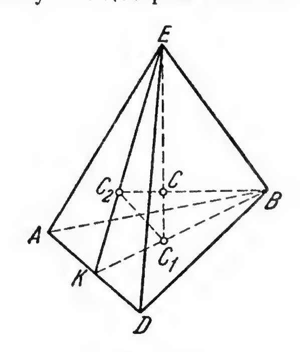


Рис. 135.

Найдем положение точки C. Так как прямые C_1C_2 и BE делят стороны угла BKE на пропорциональные части, то они параллельны и $\triangle C_1CC_2 \sim \triangle ECB$; кроме того, $C_1C_2 = \frac{1}{3}BE$, так как $KC_1 = \frac{1}{3}KB$. Отсюда находим:

$$\frac{CC_1}{CE} = \frac{C_1C_2}{BE} = \frac{1}{3}.$$

Следовательно,

$$CC_1 = \frac{1}{3}CE = \frac{1}{4}C_1E. \qquad (84)$$

Этот результат будет также справедлив для любой многоугольной пирамиды, а в пределе и для конуса.

Таким образом, *центр тяжести объема пирамиды (или конуса) лежит на отрезке прямой, соединяющей вершину пирамиды (конуса) с центром тяжести основания, на расстоянии одной четверти длины этого отрезка, считая от основания.*

Формулы координат центров тяжести ряда других однородных тел можно найти в различных технических справочниках.

РАЗДЕЛ ВТОРОЙ

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

ГЛАВА X

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

§ 58. Введение в кинематику. *Кинематикой* называется раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учета их инертности (массы) и действующих на них сил.

Кинематика представляет собою, с одной стороны, введение в динамику, так как установление основных кинематических понятий и зависимостей необходимо для изучения движения тел с учетом действия сил. С другой стороны, методы кинематики имеют и самостоятельное практическое значение, например при изучении передач движения в механизмах. По этой причине под влиянием запросов развивающегося машиностроения и произошло выделение кинематики в самостоятельный раздел механики (в первой половине XIX в.).

Под движением мы понимаем в механике изменение с течением времени положения данного тела в пространстве по отношению к другим телам.

Для определения положения движущегося тела (или точки) с тем телом, по отношению к которому изучается движение, жестко связывают какую-нибудь систему координат, которая вместе с телом образует *систему отсчета.* Если координаты всех точек тела в выбранной системе отсчета остаются все время постоянными, то тело по отношению к этой системе отсчета находится в покое. Если же координаты каких-нибудь точек тела с течением времени изменяются, то тело по отношению к данной системе отсчета (а, следовательно, и по отношению к телу, с которым эта система связана) находится в движении. В дальнейшем мы будем говорить о движении тела по отношению к данной системе отсчета, подразумевая под этим движение по отношению к тому телу, с которым эта система отсчета связана.

Движение тел совершается в пространстве с течением времени. Пространство в механике мы рассматриваем, как трехмерное евклидово пространство. Все измерения в нем производятся на основании

методов евклидовой геометрии. За единицу длины при измерении расстояний принимается один метр. Время в механике считается универсальным, т. е. протекающим одинаково во всех рассматриваемых системах отсчета. За единицу времени принимается одна секунда[1]).

Евклидово пространство и универсальное время отражают реальные свойства пространства и времени лишь приближенно. Однако, как показывает опыт, для движений, которые изучаются в механике (движения со скоростями, далекими от скорости света), это приближение дает вполне достаточную для практики точность.

Время является скалярной, непрерывно изменяющейся величиной. В задачах кинематики время t принимают за независимое переменное (аргумент). Все другие переменные величины (расстояния, скорости и т. д.) рассматривают как изменяющиеся с течением времени, т. е. как функции времени t. Отсчет времени ведется от некоторого *начального момента* ($t=0$), о выборе которого в каждом случае уславливаются. Всякий данный *момент времени* t определяется числом секунд, прошедших от начального момента до данного; разность между какими-нибудь двумя последовательными моментами времени называется *промежутком времени*.

Почерпнутые из опыта и подтвержденные практикой основы, на которых строится кинематика, дают аксиомы геометрии. Никаких дополнительных законов или аксиом для кинематического изучения движения не требуется.

Для решения задач кинематики надо, чтобы изучаемое движение было как-то задано (описано).

Кинематически задать движение или закон движения тела (точки) значит задать положение этого тела (точки) относительно данной системы отсчета в любой момент времени. Установление математических способов задания движения точек или тел является одной из важных задач кинематики. Поэтому изучение движения любого объекта мы будем начинать с установления способов задания этого движения.

Основная задача кинематики состоит в том, чтобы, зная закон движения данного тела (или точки), определить все кинематические величины, характеризующие как движение тела в целом, так и движение каждой из его точек в отдельности (траектории, скорости, ускорения и т. п.).

Для решения этой задачи необходимо, чтобы непосредственно был задан или закон движения данного тела, или же закон движения какого-нибудь другого тела, кинематически связанного с данным.

---

[1]) Согласно международной системе единиц измерения физических величин (см. § 101) *метр* есть длина, равная 1650763,73 длины волны в вакууме излучения, соответствующего переходу между уровнями $2p_{10}$ и $5d_5$ атома криптона-86; *секунда* есть 1/31556925,9747 часть тропического года для 1900 г., января 0, в 12 часов эфемеридного времени.

Изучение кинематики мы начнем с изучения движения простейшего объекта — точки (кинематика точки), а затем перейдем к изучению кинематики твердого тела.

§ 59. Способы задания движения точки. Траектория. Изучение кинематики точки начнем с рассмотрения способов задания движения точки. Чтобы задать движение точки, надо задать ее положение по отношению к выбранной системе отсчета в любой момент времени. Для задания движения точки можно применять один из следующих трех способов: 1) естественный, 2) координатный, 3) векторный.

1) Естественный способ задания движения. Непрерывная линия, которую описывает движущаяся точка относительно данной системы отсчета, называется *траекторией* точки. Если траекторией является прямая линия, движение точки называется *прямолинейным*, а если кривая — *криволинейным*.

Естественным (или натуральным) способом задания движения удобно пользоваться в тех случаях, когда траектория движущейся точки известна заранее. Пусть точка M движется относительно системы отсчета $O_1x_1y_1z_1$ вдоль некоторой траектории AB (рис. 136). Выберем на этой траектории какую-нибудь неподвижную точку O, которую примем за начало отсчета; затем, рассматривая траекторию как криволинейную координатную ось, установим на ней положительное и отрицательное направление, как на обычной координатной оси. Тогда положение точки M на траектории будет однозначно определяться криволинейной координатой s, которая равна расстоянию от точки O до точки M, измеренному вдоль дуги траектории и взятому с соответствующим знаком. При движении точка M будет перемещаться в положения M_1, M_2, ..., следовательно, расстояние s будет с течением времени изменяться. Чтобы знать положение точки M на траектории, в любой момент времени надо знать зависимость

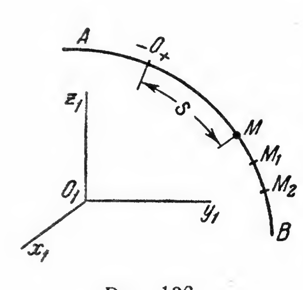


Рис. 136.

$$s = f(t). \qquad (1)$$

Уравнение (1) и выражает *закон движения точки M* вдоль траектории.

Таким образом, чтобы задать движение точки естественным способом, надо задать: 1) *траекторию точки*; 2) *начало отсчета* на траектории с указанием положительного и отрицательного *направлений отсчета*; 3) *закон движения точки вдоль траектории в виде* $s = f(t)$.

Например, если точка движется из начала отсчета O вдоль некоторой кривой так, что ее расстояние от этого начала растет пропорционально квадрату времени, то закон движения точки будет

$$s = at^2,$$

где a — коэффициент, численно равный расстоянию, проходимому точкой за первую секунду. В момент $t_2 = 2$ *сек* расстояние точки от начала отсчета будет численно равно $4a$ и т. д. Следовательно, зная уравнение (1), мы действительно можем определить положение движущейся точки в любой момент времени.

Заметим, что величина s в уравнении (1) определяет *положение* движущейся точки, а *не пройденный ею путь*. Например, если точка, двигаясь из начала O, доходит до положения M_1 (см. рис. 136), а затем, перемещаясь в обратном направлении, приходит в положение M, то в этот момент ее координата $s = \overset{\frown}{OM}$, а пройденный за время движения путь будет равен $\overset{\frown}{OM_1} + \overset{\frown}{M_1M}$, т. е. не равен s.

В случае *прямолинейного движения*, если направить ось Ox вдоль траектории точки (рис. 137), будем иметь $s = x$ и *закон прямолинейного движения* точки будет

$$x = f(t). \tag{2}$$

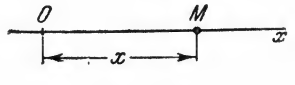


Рис. 137.

2) Координатный способ задания движения. Естественный способ задания движения весьма нагляден. Однако траектория точки заранее бывает известна далеко не всегда. Поэтому на практике чаще пользуются другим способом задания движения точки — координатным.

Положение точки по отношению к данной системе отсчета $Oxyz$ можно определить ее декартовыми координатами x, y, z (рис. 138). При движении все эти три координаты будут с течением времени изменяться. Чтобы знать закон движения точки, т. е. ее положение в пространстве в любой момент времени, надо знать значения координат точки для каждого момента времени, т. е. знать зависимости

$$x = f_1(t), \qquad y = f_2(t), \qquad z = f_3(t). \tag{3}$$

Рис. 138.

Уравнения (3) представляют собой *уравнения движения точки в декартовых прямоугольных координатах*. Они определяют закон движения точки при координатном способе задания движения[1]).

---

[1]) Задать движение точки можно, пользуясь и другими системами координат, например, полярными (см. § 71), сферическими и т. д.

Если движение точки совершается все время в одной и той же плоскости, то, приняв эту плоскость за плоскость Oxy, мы получим в этом случае два уравнения движения

$$x = f_1(t), \qquad y = f_2(t). \tag{4}$$

Наконец, при прямолинейном движении точки, если вдоль ее траектории направить координатную ось Ox, движение будет описываться одним уравнением (2), полученным выше (координатный и естественный способы задания движения в этом случае совпадают).

Уравнения (3) или (4) представляют собою одновременно уравнения *траектории* точки в параметрической форме, где роль параметра играет время t. Исключив из уравнений движения время t, можно найти уравнение траектории в обычной форме, т. е. в виде, дающем зависимость между ее координатами.

Примеры. 1) Пусть движение точки в плоскости Oxy дано уравнениями:

$$x = 2t, \qquad y = 12t^2. \tag{a}$$

По этим уравнениям можно найти, что в момент $t = 0$ точка находится в положении M_0 (0, 0), т. е. в начале координат, в момент $t_1 = 1$ *сек* — в положении M_1 (2, 12) и т. д. Таким образом, уравнения (а) действительно определяют положение точки в любой момент времени. Давая t разные значения и изображая соответствующие положения точки на рисунке, мы можем построить ее траекторию.

Другим путем траекторию можно найти, исключив t из уравнений (а). Из первого уравнения находим $t = \frac{x}{2}$ и, подставляя это значение t во второе уравнение, получаем $y = 3x^2$. Следовательно, траекторией точки является парабола с вершиной в начале координат и осью, параллельной оси Oy.

2) Рассмотрим теперь случай, когда движение точки дано уравнениями:

$$x = a\sin(\pi t), \qquad y = a\cos(\pi t), \qquad z = a\cos(\pi t). \tag{б}$$

Возводя два первых уравнения почленно в квадрат и складывая их, найдем: $x^2 + y^2 = a^2$. Кроме того, из второго и третьего уравнений $y = z$. Таким образом, траекторией является линия пересечения кругового цилиндра радиуса a, ось которого совпадает с осью Oz, и плоскости $y = z$, делящей пополам двугранный угол между плоскостями Oxy и Oxz, т. е. эллипс с полуосями a и $a\sqrt{2}$, лежащий в плоскости $y = z$.

Другие примеры определения траектории см. в задачах 53, 54, 56 (§ 65).

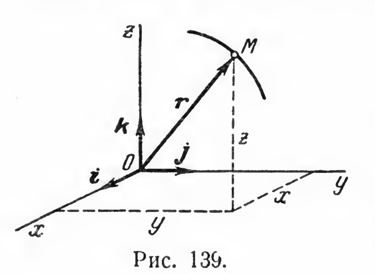


Рис. 139.

3) Векторный способ задания движения. Пусть точка M движется по отношению к некоторой системе отсчета $Oxyz$. Положение этой точки в любой момент времени можно определить, задав вектор $\boldsymbol{r}$, проведенный из начала координат O в точку M (рис. 139). Вектор $\boldsymbol{r}$ называется *радиусом-вектором* точки M.

При движении точки M вектор $\boldsymbol{r}$ будет с течением времени изменяться и по модулю, и по направлению. Следовательно, $\boldsymbol{r}$ является переменным вектором (вектором-функцией), зависящим от аргумента t:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t). \tag{5}$$

Равенство (5) и определяет закон криволинейного движения точки в векторной форме, так как оно позволяет в любой момент времени t построить соответствующий вектор $\boldsymbol{r}$ и найти положение движущейся точки.

Геометрическое место концов вектора $\boldsymbol{r}$, т. е. годограф этого вектора, определяет траекторию движущейся точки.

Векторный способ задания движения удобен для установления общих зависимостей, так как позволяет описать движение точки одним векторным уравнением (5) вместо трех скалярных уравнений (3).

Связь между координатным и векторным способами задания движения легко установить, если ввести единичные векторы (орты) осей $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, т. е. векторы, численно равные единице и направленные соответственно вдоль осей x, y и z (см. рис. 139). Тогда, учитывая, что проекции вектора $\boldsymbol{r}$ на оси Ox, Oy, Oz равны координатам точки M, т. е. $r_x = x$, $r_y = y$, $r_z = z$, получим

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}. \tag{6}$$

Следовательно, если, например, движение точки в плоскости Oxy дано в координатной форме уравнениями $x = 2t$, $y = 12t^2$, то векторное уравнение (5) для этого движения будет

$$\boldsymbol{r} = 2t\boldsymbol{i} + 12t^2\boldsymbol{j}.$$

По этому уравнению можно для любого момента времени t построить вектор $\boldsymbol{r}$ и найти положение точки. Например, в момент $t_1 = 1$ *сек* $\boldsymbol{r}_1 = 2\boldsymbol{i} + 12\boldsymbol{j}$ и строится, как диагональ соответствующего параллелограмма, и т. д.

Наоборот, если, например, движение точки задано векторно в виде $\boldsymbol{r} = (1 - t)\,\boldsymbol{i} + 2t^2\boldsymbol{j} - 3t\boldsymbol{k}$, то уравнения ее движения в координатной форме будут $x = (1 - t)$, $y = 2t^2$, $z = -3t$.

§ 60*. Переход от координатного способа задания движения к естественному. Если движение задано уравнениями (3) или (4), то по ним, как было установлено, можно определить траекторию точки. Кроме того, известно, что $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ или $ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt$, где $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$ и т. д. Отсюда, считая, что при $t = 0$ расстояние $s = 0$, получим[1])

$$s = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt. \tag{7}$$

---

[1]) Беря перед корнем знак плюс, мы тем самым определяем положительное направление отсчета расстояния s (в ту сторону, куда начинается движение точки в момент $t = 0$).

Равенство (7) после вычисления интеграла дает закон движения вдоль траектории в виде (1). В случае, когда движение задается уравнениями (4), в формуле (7) не будет члена с производной от z.

Задача 52. Движение точки в плоскости Oxy дано уравнениями

$$x = a\cos\omega t, \qquad y = a\sin\omega t, \tag{а}$$

где a и ω — постоянные величины. Найти траекторию точки и закон движения вдоль траектории.

Решение. Возводя обе части уравнений (а) в квадрат и складывая их почленно, найдем

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Следовательно, траектория — окружность радиуса a с центром в начале координат (рис. 140). Вычисляя производные от x и y по t, получим

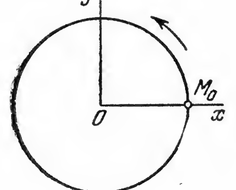


Рис. 140.

$$\dot{x} = -a\omega\sin\omega t, \qquad \dot{y} = a\omega\cos\omega t.$$

Подставляя эти значения в равенство (7), будем иметь

$$s = \int_0^t a\omega\, dt \quad \text{или} \quad s = a\omega t. \tag{б}$$

Уравнение (б) дает закон движения точки вдоль траектории в виде (1). Согласно уравнениям (а), когда $t = 0$, $x = a$, $y = 0$, т. е. точка находится в положении M_0, а когда t начинает возрастать, x убывает, а y растет, принимая положительные значения. Следовательно, начало отсчета s лежит в точке M_0, а движение по окружности происходит в направлении, показанном на рис. 140 стрелкой. Как видно из уравнения (б), при движении точки расстояние s увеличивается пропорционально времени, возрастая за каждую секунду на величину $a\omega$; такое движение называется равномерным.

В данном случае переход к естественному способу задания движения позволил представить картину движения гораздо нагляднее, чем это можно сделать непосредственно по уравнениям (а).

§ 61. Вектор скорости точки. Одной из основных кинематических характеристик движения точки является векторная величина, называемая скоростью точки. Введем сначала понятие о средней скорости точки за какой-нибудь промежуток времени. Пусть движущаяся точка находится в момент времени t в положении M, определяемом радиусом-вектором $\boldsymbol{r}$, а в момент t_1 приходит в положение M_1, определяемое вектором $\boldsymbol{r}_1$ (рис. 141). Тогда перемещение точки за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ определяется вектором $\overline{MM_1}$, который мы будем называть *вектором перемещения точки*. Этот вектор направлен по хорде, если точка движется криволинейно (рис. 141, *а*), и вдоль самой траектории AB, когда движение является прямолинейным (рис. 141, *б*).

Из треугольника OMM_1 видно, что $\boldsymbol{r} + \overline{MM_1} = \boldsymbol{r}_1$, следовательно,

$$\overline{MM_1} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r} = \Delta\boldsymbol{r}.$$

Отношение вектора перемещения точки к соответствующему промежутку времени дает векторную величину, называемую *средней* по модулю и направлению скоростью точки за промежуток времени Δt:

$$\boldsymbol{v}_{\text{ср}} = \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}. \qquad (8)$$

Модуль средней скорости, определяемой формулой (8), равен

$$v_{\text{ср}} = \frac{MM_1}{\Delta t}. \qquad (8')$$

Направлен вектор $\boldsymbol{v}_{\text{ср}}$ так же, как и вектор $\overline{MM_1}$, т. е. при криволинейном движении вдоль хорды MM_1, в сторону движения точки,

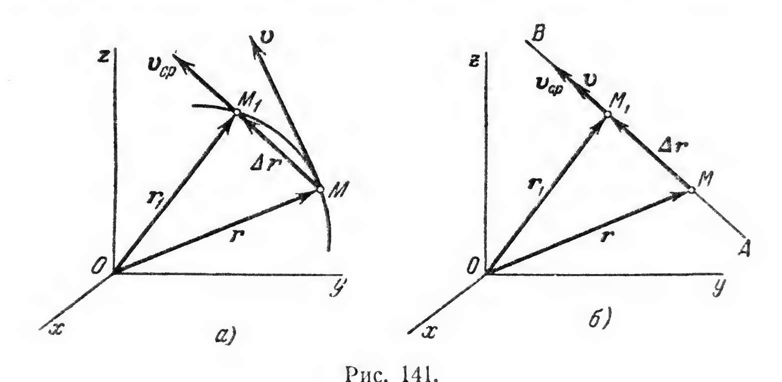


Рис. 141.

а при прямолинейном движении — вдоль самой траектории (от деления на Δt направление вектора не изменяется).

Очевидно, что чем меньше будет промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$, для которого вычислена средняя скорость, тем величина $\boldsymbol{v}_{\text{ср}}$ будет точнее характеризовать движение точки. Чтобы получить характеристику движения, не зависящую от выбора промежутка времени Δt, вводят понятие *о скорости точки в данный момент времени.*

Скоростью точки в данный момент t называется векторная величина $\boldsymbol{v}$, к которой стремится средняя скорость $\boldsymbol{v}_{\text{ср}}$ при стремлении промежутка времени Δt к нулю

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} (\boldsymbol{v}_{\text{ср}}) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}.$$

Предел отношения $\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$ представляет собою первую производную от вектора $\boldsymbol{r}$ по аргументу t и обозначается, как

и производная от скалярной функции, символом $\frac{dr}{dt}$ [1]). Окончательно получаем

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}. \qquad (9)$$

Итак, *вектор скорости точки в данный момент времени равен первой производной от радиуса-вектора точки по времени.*

Так как предельным направлением секущей MM_1 является касательная, то вектор скорости точки в данный момент направлен по касательной к траектории точки в сторону движения.

Формула (9) показывает также, что вектор скорости $\boldsymbol{v}$ равен отношению элементарного перемещения точки $d\boldsymbol{r}$, направленного по касательной к траектории, к соответствующему промежутку времени dt.

При прямолинейном движении вектор скорости $\boldsymbol{v}$ все время направлен вдоль прямой, по которой движется точка, и может изменяться лишь по численной величине; при криволинейном движении кроме численной величины все время изменяется и направление вектора скорости точки. Размерность скорости — длина/время; в качестве единиц измерения применяются обычно *м/сек* или *км/час.*

§ 62. Вектор ускорения точки. Ускорением точки называется векторная величина, характеризующая изменение с течением времени модуля и направления скорости точки.

Пусть в некоторый момент времени t движущаяся точка находится в положении M и имеет скорость $\boldsymbol{v}$, а в момент t_1 приходит в положение M_1 и имеет скорость $\boldsymbol{v}_1$ (рис. 142). Тогда за промежуток времени $\Delta t=t_1-t$ скорость точки получает приращение $\Delta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}$. Для построения вектора $\Delta\boldsymbol{v}$ отложим от точки M вектор, равный $\boldsymbol{v}_1$, и построим параллелограмм, в котором диагональю будет $\boldsymbol{v}_1$, а одной из сторон $\boldsymbol{v}$. Тогда, очевидно, вторая сторона и будет изображать вектор $\Delta\boldsymbol{v}$. Заметим, что вектор $\Delta\boldsymbol{v}$ всегда направлен в сторону вогнутости траектории.

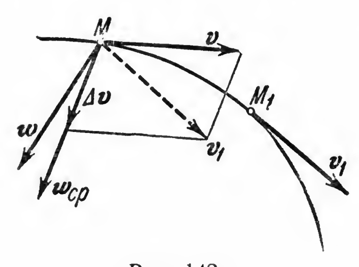


Рис. 142.

Отношение приращения вектора скорости $\Delta\boldsymbol{v}$ к соответствующему промежутку времени Δt определяет *вектор среднего ускорения точки* за этот промежуток времени:

$$\boldsymbol{w}_{\text{ср}}=\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}. \qquad (10)$$

---

[1]) Вообще для любого переменного вектора $\boldsymbol{u}$, зависящего от аргумента t,

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{u}}{\Delta t}=\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}.$$

Вектор среднего ускорения имеет, очевидно, то же направление, что и вектор $\Delta \boldsymbol{v}$, т. е. направлен в сторону вогнутости траектории.

Ускорением точки в данный момент времени t называется векторная величина $\boldsymbol{w}$, к которой стремится среднее ускорение $\boldsymbol{w}_{\text{ср}}$ при стремлении промежутка времени Δt к нулю:

$$\boldsymbol{w} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt},$$

или, с учетом равенства (9),

$$\boldsymbol{w} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}. \tag{11}$$

Следовательно, *вектор ускорения точки в данный момент времени равен первой производной от вектора скорости или второй производной от радиуса-вектора точки по времени.*

Размерность ускорения — длина/(время)^2; в качестве единицы измерения применяется обычно *м/сек*^{2}.

Из формулы (11) следует также, что вектор ускорения точки $\boldsymbol{w}$ равен отношению элементарного приращения вектора скорости $d\boldsymbol{v}$ к соответствующему промежутку времени dt.

Найдем, как располагается вектор $\boldsymbol{w}$ по отношению к траектории точки. При прямолинейном движении вектор $\boldsymbol{w}$ направлен, очевидно, вдоль прямой, по которой движется точка. Если траекторией точки является плоская кривая, то вектор ускорения $\boldsymbol{w}$, так же как и вектор $\boldsymbol{w}_{\text{ср}}$, лежит в плоскости этой кривой и направлен в сторону ее вогнутости. Если траектория не является плоской кривой, то вектор $\boldsymbol{w}_{\text{ср}}$ будет направлен в сторону вогнутости траектории и будет лежать в плоскости, проходящей через касательную к траектории в точке M и прямую, параллельную касательной в соседней точке M_1 (см. рис. 142). В пределе, когда точка M_1 стремится к M, эта плоскость занимает положение так называемой *соприкасающейся плоскости*[1]). Следовательно, в общем случае *вектор ускорения* $\boldsymbol{w}$ *лежит в соприкасающейся плоскости и направлен в сторону вогнутости кривой.*

Полученные в §§ 61, 62 формулы (9) и (11) дают общие, векторные выражения основных кинематических характеристик движения и являются исходными для всех других формул и зависимостей кинематики точки.

---

[1]) Соприкасающаяся плоскость в точке M кривой может быть еще определена как предельное положение плоскости, проведенной через точки M, M_1 и M_2 этой кривой, когда точки M_1 и M_2 стремятся к M. Из всех плоскостей, проходящих через точку M, соприкасающаяся плоскость имеет с кривой наибольший порядок соприкосновения (теснее других плоскостей прилегает к кривой). Для пространственной кривой (например, для винтовой линии) в каждой точке кривой будет своя соприкасающаяся плоскость. Для плоской кривой соприкасающаяся плоскость совпадает с плоскостью этой кривой и является общей для всех ее точек.

§ 63. Теорема о проекции производной вектора. В векторных равенствах, содержащих производные, переход от зависимостей между векторами к зависимостям между их проекциями осуществляется с помощью следующей теоремы: *проекция производной от вектора на какую-нибудь неподвижную ось равна производной от проекции дифференцируемого вектора на ту же ось*[1]).

Пусть мы имеем переменный вектор $\boldsymbol{p}$, зависящий от аргумента t. Производная от $\boldsymbol{p}$ по t дает какой-то другой вектор $\boldsymbol{q}$. По аналогии с равенством (6) вектор $\boldsymbol{p}$ через его проекции можно представить в виде $\boldsymbol{p}=p_x\boldsymbol{i}+p_y\boldsymbol{j}+p_z\boldsymbol{k}$. Поскольку векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ постоянны и по модулю ($|\boldsymbol{i}|=|\boldsymbol{j}|=|\boldsymbol{k}|=1$) и направлению (оси $Oxyz$ неподвижны), то

$$\boldsymbol{q}=\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=\frac{dp_x}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{dp_y}{dt}\boldsymbol{j}+\frac{dp_z}{dt}\boldsymbol{k}. \qquad (12)$$

С другой стороны, вектор $\boldsymbol{q}$ также можно представить в виде

$$\boldsymbol{q}=q_x\boldsymbol{i}+q_y\boldsymbol{j}+q_z\boldsymbol{k}. \qquad (13)$$

Так как левые части равенств (12) и (13) равны, то должны быть равны и их правые части. Отсюда заключаем, что

$$\text{если } \boldsymbol{q}=\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}, \quad \text{то } q_x=\frac{dp_x}{dt}, \quad q_y=\frac{dp_y}{dt}, \quad q_z=\frac{dp_z}{dt}. \qquad (14)$$

Тем самым теорема доказана.

Заметим, что для модулей векторов зависимость вида (14) не будет справедлива, т. е. если $\boldsymbol{q}=\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$, то в общем случае $|q|\neq\frac{d|p|}{dt}$. В частности, мы доказали, что $\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ и $\boldsymbol{w}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$; при этом, в общем случае, $|v|\neq\frac{d|\boldsymbol{r}|}{dt}$ и $|w|\neq\frac{d|v|}{dt}$.

Действительно, если, например, точка движется по окружности с центром в начале координат, то она имеет скорость $\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ ($\boldsymbol{r}$ с течением времени меняется по направлению), но при этом $|\boldsymbol{r}|=\text{const}$, и, следовательно, $\frac{d|\boldsymbol{r}|}{dt}=0$; отсюда ясно, что $|v|\neq\frac{d|\boldsymbol{r}|}{dt}$. То, что при этом и $|w|\neq\frac{d|v|}{dt}$, будет показано в § 67.

Вопрос о том, как определяются модули скорости и ускорения точки, рассматривается ниже.

---

[1]) Если эта чисто математическая теорема, выражаемая равенствами (14), известна, то ее доказательство можно опустить.

§ 64. Определение скорости и ускорения точки при координатном способе задания движения. Найдем, как вычисляются скорость и ускорение точки, если ее движение задано уравнениями (3) или (4). Вопрос об определении траектории в этом случае был уже рассмотрен в § 59.

1) Определение скорости точки. Вектор скорости точки $\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$. Отсюда на основании соотношений (14), учитывая, что $r_x=x$, $r_y=y$, $r_z=z$ (см. рис. 139), будем иметь:

$$v_x=\frac{dx}{dt},\quad v_y=\frac{dy}{dt},\quad v_z=\frac{dz}{dt},\tag{15}$$

или

$$v_x=\dot{x},\quad v_y=\dot{y},\quad v_z=\dot{z},\tag{15'}$$

где точка над буквой есть символ дифференцирования по времени. Таким образом, *проекции скорости на оси координат равны первым производным от соответствующих координат точки по времени.*

Зная проекции скорости, найдем ее модуль и направление (т. е. углы α, β, γ, которые вектор $\boldsymbol{v}$ образует с осями координат) по формулам:

$$\left.\begin{gathered} v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2};\\ \cos\alpha=\frac{v_x}{v},\quad \cos\beta=\frac{v_y}{v},\quad \cos\gamma=\frac{v_z}{v}. \end{gathered}\right\}\tag{16}$$

2) Определение ускорения точки. Вектор ускорения точки $\boldsymbol{w}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$. Отсюда на основании теоремы о проекции производной и формул (15) получаем:

$$w_x=\frac{dv_x}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2},\quad w_y=\frac{dv_y}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2},\quad w_z=\frac{dv_z}{dt}=\frac{d^2z}{dt^2},\tag{17}$$

или

$$w_x=\dot{v}_x=\ddot{x},\quad w_y=\dot{v}_y=\ddot{y},\quad w_z=\dot{v}_z=\ddot{z},\tag{17'}$$

т. е. *проекции ускорения на оси координат равны первым производным от проекций скоростей или вторым производным от соответствующих координат точки по времени.* Модуль и направление ускорения найдутся из формул:

$$\left.\begin{gathered} w=\sqrt{w_x^2+w_y^2+w_z^2};\\ \cos\alpha_1=\frac{w_x}{w},\quad \cos\beta_1=\frac{w_y}{w},\quad \cos\gamma_1=\frac{w_z}{w}, \end{gathered}\right\}\tag{18}$$

где α_1, β_1, γ_1 — углы, образуемые вектором ускорения с осями координат.

Итак, если движение точки задано в декартовых прямоугольных координатах уравнениями (3) или (4), то скорость точки

определяется по формулам (15) и (16), а ускорение — по формулам (17) и (18). При этом в случае движения, происходящего в одной плоскости, во всех формулах должна быть отброшена проекция на ось z.

В случае же прямолинейного движения, которое задается одним уравнением $x=f(t)$, будем иметь

$$v_x=\frac{dx}{dt}, \qquad w_x=\frac{dv_x}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}. \tag{19}$$

Так как проекции на другие оси отсутствуют, то, следовательно, в данном случае $v_x=\pm v$, $w_x=\pm w$, т. е. при прямолинейном движении формулы (19) непосредственно определяют скорость и ускорение точки.

§ 65. Решение задач кинематики точки. Задачи, решаемые методами кинематики точки, могут состоять в определении траектории, скорости или ускорения точки, в отыскании времени, в течение которого точка проходит тот или иной путь, или пути, проходимого за тот или иной промежуток времени, и т. п.

Прежде чем решать любую из такого рода задач, надо *установить, по какому закону движется точка.* При этом может иметь место один из следующих двух случаев:

1) Закон движения точки в условиях задачи задан. Тогда решение сводится к использованию соответствующих формул (задачи 53, 54).

2) Закон движения рассматриваемой точки не задан, но при этом ее движение зависит определенным образом от заданного движения какой-нибудь другой точки (или другого тела). В этом случае *решение задачи надо начинать с нахождения уравнений, определяющих закон движения рассматриваемой точки* (задачи 55, 56).

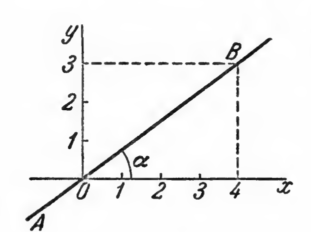


Рис. 143.

Задача 53. Движение точки задано уравнениями (x, y — в метрах, t — в секундах):

$$x=8t-4t^2,\ y=6t-3t^2.$$

Определить траекторию, скорость и ускорение точки.

Решение. Для определения траектории исключаем из уравнений движения время t. Умножая обе части первого уравнения на 3, а обе части второго — на 4 и почленно вычитая из первого равенства второе, получим: $3x-4y=0$ или

$$y=\frac{3}{4}x.$$

Следовательно, траектория — прямая линия, наклоненная к оси Ox под углом α, где $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$ (рис. 143).

Определяем скорость точки. По формулам (15) и (16) получаем:

$$v_x = \dot{x} = 8(1-t), \quad v_y = \dot{y} = 6(1-t);$$
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 10\,|1-t|.$$

Теперь находим ускорение точки. Формулы (17) и (18) дают:

$$w_x = \ddot{x} = -8, \quad w_y = \ddot{y} = -6, \quad w = 10 \text{ м/сек}^2.$$

Направлены векторы $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{w}$, очевидно, вдоль траектории, т. е. вдоль прямой AB. Проекции ускорения на оси координат все время отрицательны, следовательно, ускорение имеет постоянное направление от B к A. Проекции скорости при $0 < t < 1$ положительны, следовательно, в течение этого промежутка времени скорость точки направлена от O к B. При этом в момент $t = 0$ $v = 10$ *м/сек*, в момент $t = 1$ *сек* $v = 0$. В последующие моменты времени ($t > 1$ *сек*) обе проекции скорости отрицательны и, следовательно, скорость направлена от B к A, т. е. так же, как и ускорение.

Заметим, наконец, что при $t = 0$ $x = 0$ и $y = 0$; при $t = 1$ *сек* $x = 4$, $y = 3$ (точка B); при $t = 2$ *сек* $x = 0$, $y = 0$; при $t > 2$ величины x и y растут по модулю, оставаясь отрицательными.

Итак, заданные в условиях задачи уравнения движения рассказывают нам всю историю движения точки. Движение начинается из точки O с начальной скоростью $v_0 = 10$ *м/сек* и происходит вдоль прямой AB, наклоненной к оси Ox под углом α, для которого $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$. На участке OB точка движется замедленно (модуль ее скорости убывает) и через одну секунду приходит в положение $B\,(4, 3)$, где скорость ее обращается в нуль. Отсюда начинается ускоренное движение в обратную сторону. В момент $t = 2$ *сек* точка вновь оказывается в начале координат и дальше продолжает свое движение вдоль OA. Ускорение движения все время равно 10 *м/сек*^{2}.

Задача 54. Движение точки задано уравнениями:

$$x = a\sin\omega t, \quad y = a\cos\omega t, \quad z = ut,$$

где a, ω и u — постоянные величины. Определить траекторию, скорость и ускорение точки.

Решение. Возводя первые два уравнения почленно в квадрат и складывая, получаем (так как $\sin^2\omega t + \cos^2\omega t = 1$):

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

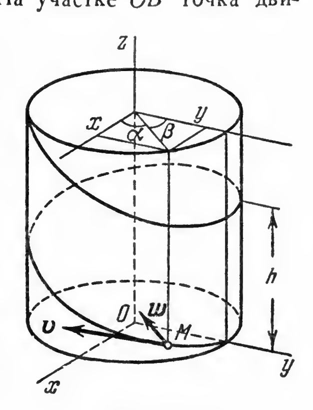


Рис. 144.

Следовательно, траектория лежит на круглом цилиндре радиуса a, ось которого направлена вдоль оси Oz (рис. 144). Определяя из последнего уравнения t и подставляя в первое, находим:

$$x = a\sin\left(\frac{\omega}{u}z\right).$$

Таким образом, траекторией точки будет линия пересечения синусоидальной поверхности, образующие которой параллельны оси Oy (синусоидальный гофр) с цилиндрической поверхностью радиуса a. Эта кривая называется *винтовой линией*. Из уравнений движения видно, что один виток винтовой линии точка проходит за время t_1, определяемое из равенства

$\omega t_1 = 2\pi$. При этом вдоль оси z точка за это время перемещается на величину $h = ut_1 = \frac{2\pi u}{\omega}$, называемую *шагом* винтовой линии.

Найдем скорость и ускорение точки. Дифференцируя уравнения движения по времени, получаем:

$$v_x = a\omega \cos \omega t, \quad v_y = -a\omega \sin \omega t, \quad v_z = u,$$

откуда

$$v = \sqrt{a^2\omega^2 (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) + u^2} = \sqrt{a^2\omega^2 + u^2}.$$

Стоящие под знаком радикала величины постоянны. Следовательно, движение происходит с постоянной по модулю скоростью, направленной по касательной к траектории. Теперь по формулам (17) вычисляем проекции ускорения:

$$w_x = -a\omega^2 \sin \omega t, \quad w_y = -a\omega^2 \cos \omega t, \quad w_z = 0,$$

откуда

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = a\omega^2.$$

Итак, движение происходит с постоянным по модулю ускорением. Для определения направления ускорения имеем формулы:

$$\cos \alpha_1 = \frac{w_x}{w} = -\sin \omega t = -\frac{x}{a},$$

$$\cos \beta_1 = \frac{w_y}{w} = -\cos \omega t = -\frac{y}{a}, \quad \cos \gamma_1 = \frac{w_z}{w} = 0.$$

Но, очевидно,

$$\frac{x}{a} = \cos \alpha, \quad \frac{y}{a} = \cos \beta,$$

где α и β — углы, образуемые с осями Ox и Oy радиусом a, проведенным от оси цилиндра к движущейся точке. Так как косинусы углов α_1 и β_1 отличаются от косинусов α и β только знаками, то отсюда заключаем, что ускорение точки все время направлено по радиусу цилиндра к его оси.

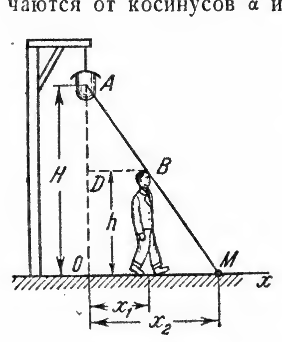


Рис. 145.

Заметим, что хотя в данном случае движение и происходит со скоростью, постоянной по модулю, ускорение точки не равно нулю, так как направление скорости изменяется.

Задача 55. Человек ростом h удаляется от фонаря, висящего на высоте H, двигаясь прямолинейно со скоростью u. С какой скоростью движется конец тени человека?

Решение. Для решения задачи найдем сначала закон, по которому движется конец тени. Выбираем начало отсчета в точке O, находящейся на одной вертикали с фонарем, и направляем вдоль прямой, по которой движется конец тени, координатную ось Ox (рис. 145). Изображаем человека в произвольном положении на расстоянии x_1 от точки O. Тогда конец его тени будет находиться от начала O на расстоянии x_2.

Из подобия треугольников OAM и DAB находим:

$$x_2 = \frac{H}{H-h} x_1.$$

Это уравнение выражает закон движения конца тени M, если закон движения человека, т. е. $x_1 = f(t)$, известен.

Вычислив производную по времени от обеих частей равенства и замечая, что по формуле (19) $\dot{x}_1 = u_x = u$, а $\dot{x}_2 = v_x = v$, где v — искомая скорость, получаем:

$$v = \frac{H}{H-h}u.$$

Если человек движется с постоянной скоростью ($u = \text{const}$), то скорость конца тени v будет тоже постоянна, но в $\frac{H}{H-h}$ раз больше, чем скорость человека.

Обращаем внимание на то, что *при составлении уравнений движения надо изображать движущееся тело или механизм* (см. задачу 56) *в произвольном положении*. Только тогда мы получим уравнения, определяющие положение движущейся точки (или тела) в любой момент времени.

Задача 56. Определить траекторию, скорость и ускорение середины M шатуна кривошипно-шатунного механизма (рис. 146), если $OA = AB = 2a$, а угол φ при вращении кривошипа растет пропорционально времени: $\varphi = \omega t$.

Рис. 146.

Решение. Начинаем с определения уравнений движения точки M. Проводя оси и обозначая координаты точки M в произвольном положении через x и y, находим:

$$x = 2a\cos\varphi + a\cos\varphi, \quad y = a\sin\varphi.$$

Заменяя φ его значением, получаем уравнения движения точки M:

$$x = 3a\cos\omega t, \quad y = a\sin\omega t.$$

Для определения траектории точки M представим уравнения движения в виде

$$\frac{x}{3a} = \cos\omega t, \quad \frac{y}{a} = \sin\omega t.$$

Возводя эти равенства почленно в квадрат и складывая, получим:

$$\frac{x^2}{9a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Итак, траектория точки M — эллипс с полуосями $3a$ и a.

Теперь по формулам (15) и (16) находим скорость точки M:

$$v_x = -3a\omega\sin\omega t, \quad v_y = a\omega\cos\omega t;$$

$$v = a\omega\sqrt{9\sin^2\omega t + \cos^2\omega t}.$$

Скорость оказывается величиной переменной, меняющейся с течением времени в пределах от $v_{\min} = a\omega$ до $v_{\max} = 3a\omega$.

Далее по формулам (17) определяем проекции ускорения точки B:

$$w_x = -3a\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 x; \quad w_y = -a\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 y,$$

отсюда

$$w = \sqrt{\omega^4 (x^2 + y^2)} = \omega^2 r,$$

где r — длина радиуса-вектора, проведенного из центра O до точки M. Следовательно, величина ускорения точки меняется пропорционально ее расстоянию от центра эллипса.

Для определения направления w имеем по формулам (18):

$$\cos \alpha_1 = \frac{w_x}{w} = -\frac{x}{r}, \quad \cos \beta_1 = \frac{w_y}{w} = -\frac{y}{r}.$$

Отсюда, так же как и в задаче 54, находим, что ускорение точки M все время направлено вдоль MO к центру эллипса.

§ 66. Определение скорости точки при естественном способе задания движения. Пусть даны (см. § 59) траектория точки и закон движения вдоль этой траектории в виде

$$s = f(t). \tag{20}$$

Рассмотрим, как в этом случае определяется скорость точки. Если за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ точка переходит из положения M в положениие M_1, совершая вдоль дуги траектории перемещение $\Delta s = s_1 - s$ (рис. 147), то численная величина ее средней скорости будет равна[1]):

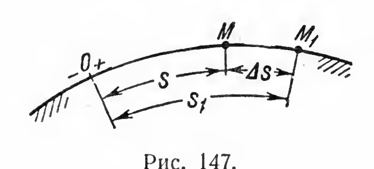


Рис. 147.

$$v_{\text{ср}} = \frac{s_1 - s}{t_1 - t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{21}$$

Переходя к пределу, найдем численную величину скорости точки в данный момент времени t:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \text{или} \quad v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}. \tag{22}$$

Итак, *численная величина скорости точки в данный момент времени равна первой производной от расстояния (криволинейной координаты) s точки по времени.*

Направлен вектор скорости по касательной к траектории, которая нам наперед известна.

---

[1]) Значения $v_{\text{ср}}$, даваемые формулами (21) и (8′), как видим, не совпадают (первая определяет $v_{\text{ср}}$ при движении по дуге, а вторая — при кратчайшем перемещении из M в M_1). Однако в пределе (при $\Delta t \to 0$) обе формулы дают одно и то же значение для v, так как отношение длины дуги Δs к длине хорды MM_1 в пределе равно единице.

Формула (22) (или 21) определяет *численную (алгебраическую)* величину скорости, т. е. величину со знаком, причем знак v совпадает со знаком Δs, так как всегда $\Delta t > 0$. Поскольку численная величина вектора скорости отличается от величины его модуля только знаком, будем обозначать обе эти величины одним и тем же символом v; ни к каким недоразумениям это практически не приводит. В тех же случаях, когда надо подчеркнуть, что речь идет о модуле скорости, будем обозначать этот модуль символом $|v|$.

Так как знак v совпадает со знаком Δs, то легко видеть, что если величина $v > 0$, то вектор скорости $\boldsymbol{v}$ направлен в положительном направлении отсчета расстояния s, а если $v < 0$, то в отрицательном. Следовательно, численная величина скорости определяет одновременно и модуль вектора скорости и сторону, в которую он направлен.

Равенство (22) показывает также, что величину v можно вычислять как отношение элементарного перемещения ds точки вдоль дуги траектории к соответствующему промежутку времени dt.

§ 67. Касательное и нормальное ускорения точки. В § 64 мы вычисляли вектор ускорения $\boldsymbol{w}$ по его проекциям на неподвижные координатные оси $Oxyz$. При естественном способе задания движения вектор $\boldsymbol{w}$ определяют по его проекциям на оси $M\tau nb$, имеющие начало в точке M и движущиеся вместе с нею (рис. 148). Эти оси, называемые осями естественного трехгранника (или скоростными осями), направлены следующим образом: ось $M\tau$ — вдоль касательной к траектории в сторону положительного отсчета расстояния s; ось Mn — по нормали, лежащей в соприкасающейся плоскости и направленной в сторону вогнутости траектории; ось Mb — перпендикулярно к первым двум так, чтобы она образовала с ними правую тройку. Нормаль Mn, лежащая в соприкасающейся плоскости (в плоскости самой кривой, если кривая плоская), называется *главной нормалью*, а перпендикулярная к ней нормаль Mb — *бинормалью*.

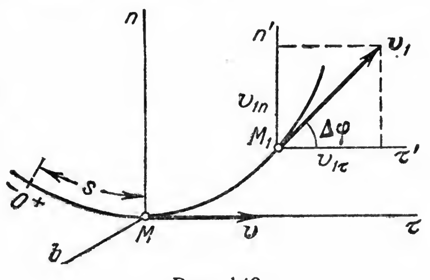


Рис. 148.

В § 62 было показано, что ускорение точки $\boldsymbol{w}$ лежит в соприкасающейся плоскости, т. е. в плоскости $M\tau n$; следовательно, проекция вектора $\boldsymbol{w}$ на бинормаль равна нулю ($w_b = 0$).

Вычислим проекции $\boldsymbol{w}$ на две другие оси. Пусть в момент времени t точка находится в положении M и имеет скорость $\boldsymbol{v}$, а в момент $t_1 = t + \Delta t$ приходит в положение M_1 и имеет скорость $\boldsymbol{v}_1$.

Тогда по определению

$$\boldsymbol{w} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}}{\Delta t}.$$

Перейдем в этом равенстве от векторов к их проекциям на оси $M\tau$ и Mn, проведенные в точке M (см. рис. 148). Тогда на основании теоремы о проекции суммы (или разности) векторов на ось получим:

$$w_\tau = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_{1\tau} - v_\tau}{\Delta t}, \quad w_n = \lim \frac{v_{1n} - v_n}{\Delta t}.$$

Учитывая, что проекции вектора на параллельные оси одинаковы, проведем через точку M_1 оси $M\tau'$, Mn', параллельные $M\tau$, Mn, и обозначим угол между направлением вектора $\boldsymbol{v}_1$ и касательной $M\tau$ через $\Delta\varphi$. Этот угол между касательными к кривой в точках M и M_1 называется *углом смежности*.

Напомним, что предел отношения угла смежности $\Delta\varphi$ к длине дуги $\overset{\frown}{MM_1} = \Delta s$ определяет кривизну k кривой в точке M. Кривизна же является величиной, обратной радиусу кривизны ρ в точке M. Таким образом,

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = k = \frac{1}{\rho}.$$

Обращаясь теперь к чертежу (см. рис. 148), находим, что проекции векторов $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{v}_1$ на оси $M\tau$ и Mn будут равны[1]):

$$v_\tau = v, \qquad v_n = 0;$$
$$v_{1\tau} = v_1 \cos\Delta\varphi, \quad v_{1n} = v_1 \sin\Delta\varphi,$$

где v и v_1 — численные величины скорости точки в моменты t и t_1. Следовательно,

$$w_\tau = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_1 \cos\Delta\varphi - v}{\Delta t}, \quad w_n = \lim_{\Delta t \to 0} \left(v_1 \frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta t} \right).$$

Заметим, что при $\Delta t \to 0$ точка M_1 неограниченно приближается к M и одновременно $\Delta\varphi \to 0$, $\Delta s \to 0$, $v_1 \to v$.

Тогда, учитывая, что в пределе $\lim\limits_{\Delta\varphi \to 0} (\cos\Delta\varphi) = 1$, получим для w_τ выражение

$$w_\tau = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_1 - v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}.$$

[1]) Если траектория точки M не является плоской кривой, то равенство $v_{1n} = v_1 \sin\Delta\varphi$ будет приближенным вследствие отклонения вектора v_1 от плоскости $M\tau n$. Однако окончательный результат будет точным, так как при переходе к пределу это отклонение стремится к нулю.

Правую часть выражения w_n преобразуем так, чтобы в нее вошли отношения, пределы которых нам известны. Для этого умножим числитель и знаменатель дроби, стоящей под знаком предела, на $\Delta\varphi\,\Delta s$. Тогда будем иметь

$$w_n = \lim_{\Delta t \to 0}\left(v_1 \frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta\varphi}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = \frac{v^2}{\rho}, \tag{23}$$

так как пределы каждого из стоящих в скобке сомножителей при $\Delta t \to 0$ равны:

$$\lim v_1 = v, \quad \lim \frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta\varphi} = 1, \quad \lim \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{1}{\rho}, \quad \lim \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v.$$

Окончательно получаем:

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}; \quad w_n = \frac{v^2}{\rho}. \tag{24}$$

Итак, мы доказали, что *проекция ускорения точки на касательную равна первой производной от численной величины скорости или второй производной от расстояния (криволинейной координаты) s по времени, а проекция ускорения на главную нормаль равна квадрату скорости, деленному на радиус кривизны траектории в данной точке кривой*; проекция ускорения на бинормаль равна нулю ($w_b = 0$). Эти результаты выражают собою одну из важных теорем кинематики точки.

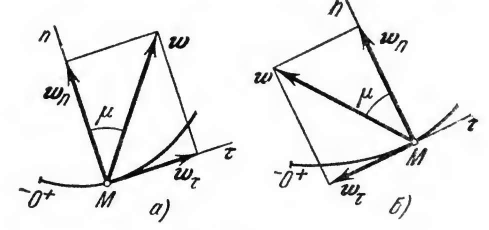


Рис. 149.

При движении точки M касательная $M\tau$ поворачивается вокруг бинормали Mb с угловой скоростью $\omega = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$. Вводя эту величину, можно из выражения (23) получить еще одну, часто используемую в инженерной практике формулу для вычисления w_n:

$$w_n = v\omega, \tag{24'}$$

т. е. нормальное ускорение равно произведению скорости точки на угловую скорость поворота касательной к траектории.

Отложим вдоль касательной $M\tau$ и главной нормали Mn векторы $\boldsymbol{w}_\tau$ и $\boldsymbol{w}_n$, т. е. касательную и нормальную составляющие ускорения (рис. 149). При этом составляющая $\boldsymbol{w}_n$ будет всегда направлена в сторону вогнутости кривой, так как всегда $w_n > 0$, а составляющая $\boldsymbol{w}_\tau$ может быть направлена или в положительном, или в отрицательном направлении оси $M\tau$ в зависимости от знака проекции w_τ (см. рис. 149, *а* и *б*).

Вектор ускорения точки $\boldsymbol{w}$ изображается диагональю параллелограмма, построенного на составляющих $\boldsymbol{w}_\tau$ и $\boldsymbol{w}_n$. Так как эти состав-

ляющие взаимно перпендикулярны, то модуль вектора $\boldsymbol{w}$ и угол μ его отклонения от нормали Mn определятся формулами:

$$w=\sqrt{w_\tau^2+w_n^2}=\sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2},\qquad \operatorname{tg}\mu=\frac{|w_\tau|}{w_n}. \tag{25}$$

Таким образом, если движение точки задано естественным способом, то, зная траекторию (а следовательно, и ее радиус кривизны ρ в любой точке) и закон движения (20), мы, по формулам (22) и (24) — (25), можем определить модуль и направление векторов скорости и ускорения точки в любой момент времени[1]).

§ 68. Некоторые частные случаи движения точки. Пользуясь полученными результатами, рассмотрим некоторые частные случаи движения точки.

1) Прямолинейное движение. Если траекторией точки является прямая линия, то $\rho=\infty$. Тогда $w_n=\frac{v^2}{\rho}=0$ и все ускорение точки равно одному только касательному ускорению:

$$w=w_\tau=\frac{dv}{dt}. \tag{26}$$

Так как в данном случае скорость изменяется только численно, то отсюда заключаем, что *касательное ускорение характеризует изменение скорости по численной величине.*

2) Равномерное криволинейное движение. Равномерным называется такое криволинейное движение точки, в котором численная величина скорости все время остается постоянной: $v=\text{const}$. Тогда $w_\tau=\frac{dv}{dt}=0$ и все ускорение точки равно одному только нормальному ускорению:

$$w=w_n=\frac{v^2}{\rho}. \tag{26'}$$

Вектор ускорения $\boldsymbol{w}$ направлен при этом все время по нормали к траектории точки.

Так как в данном случае ускорение появляется только за счет изменения направления скорости, то отсюда заключаем, что *нормальное ускорение характеризует изменение скорости по направлению.*

Найдем закон равномерного криволинейного движения. Из формулы (22) имеем $\frac{ds}{dt}=v$ или $ds=v\,dt$.

---

[1]) Из формулы (24) видно, что в общем случае $w\neq\frac{dv}{dt}$, на что и было указано в конце § 63.

Пусть в начальный момент ($t=0$) точка находится от начала отсчета на расстоянии s_0. Тогда, беря от левой и правой части равенства определенные интегралы в соответствующих пределах, получим

$$\int_{s_0}^{s} ds = \int_{0}^{t} v\,dt \text{ или } s - s_0 = vt,$$

так как $v = \text{const}$. Окончательно находим закон равномерного криволинейного движения точки в виде

$$s = s_0 + vt. \qquad (27)$$

Если в равенстве (27) положить $s_0 = 0$, то s даст путь, пройденный точкой за время t. Следовательно, при равномерном движении путь, пройденный точкой, растет пропорционально времени, а скорость движения равна отношению пути ко времени

$$s = vt, \quad v = \frac{s}{t}. \qquad (27')$$

3) Равномерное прямолинейное движение. В этом случае $w_n = w_\tau = 0$, а значит и $w = 0$. Заметим, что *единственным движением, в котором ускорение точки все время равно нулю, является равномерное прямолинейное движение.*

4) Равнопеременное криволинейное движение. Равнопеременным называется такое криволинейное движение точки, при котором *касательное ускорение* остается все время величиною постоянной: $w_\tau = \text{const}$. Найдем закон этого движения, считая, что при $t = 0$ $s = s_0$, а $v = v_0$, где v_0 — начальная скорость точки. Согласно формуле (24) $\frac{dv}{dt} = w_\tau$ или $dv = w_\tau\,dt$.

Так как $w_\tau = \text{const}$, то, беря от обеих частей последнего равенства интегралы в соответствующих пределах, получим:

$$v = v_0 + w_\tau t. \qquad (28)$$

Формулу (28) представим в виде

$$\frac{ds}{dt} = v_0 + w_\tau t \text{ или } ds = v_0\,dt + w_\tau t\,dt.$$

Вторично интегрируя, найдем закон равнопеременного криволинейного движения точки в виде

$$s = s_0 + v_0 t + w_\tau \frac{t^2}{2}. \qquad (29)$$

Скорость этого движения определяется формулой (28).

Если при криволинейном движении точки модуль скорости возрастает, то движение называется *ускоренным*, а если убывает —

замедленным. Так как изменение модуля скорости характеризуется касательным ускорением, то движение будет ускоренным, если величины v и w_τ имеют одинаковые знаки (угол между векторами $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{w}$ острый, рис. 150, *а*), и замедленным, если разные (угол между $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{w}$ тупой, рис. 150, *б*).

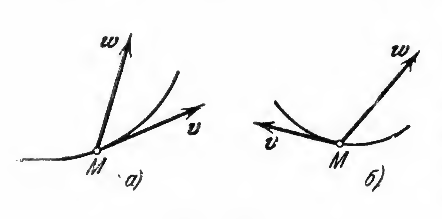


Рис. 150.

В частности, при равнопеременном движении, если в равенстве (28) v и w_τ имеют одинаковые знаки, движение будет *равноускоренным*, а если разные знаки — *равнозамедленным*.

Формулы (27) — (29) определяют также законы равномерного или равнопеременного прямолинейного движения, если считать $s = x$. При этом в равенствах (28) и (29) $w_\tau = w$, где w — численная величина полного ускорения точки [см. формулу (26)].

5) Гармонические колебания. Рассмотрим *прямолинейное* движение точки, при котором ее расстояние x от начала координат O изменяется со временем по закону

$$x = a \cos kt, \qquad (30)$$

где a и k — постоянные величины.

Точка M (рис. 151) совершает при этом движении колебания между положениями $M_0(+a)$ и $M_1(-a)$. Колебания, происходящие по закону (30), играют большую роль в технике. Они называются *простыми гармоническими колебаниями.* Величина a, равная наибольшему отклонению точки от центра колебаний O, называется *амплитудой* колебаний.

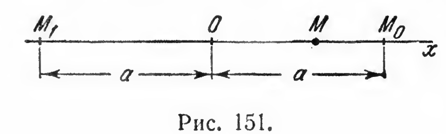


Рис. 151.

Легко видеть, что, начиная движение в момент $t = 0$ из положения M_0, точка вновь придет в это положение в момент времени t_1, для которого $\cos kt_1 = 1$, т. е. $kt_1 = 2\pi$.

Промежуток времени $T = t_1 = \frac{2\pi}{k}$, в течение которого точка совершает одно полное колебание, называется *периодом* колебаний.

Беря производные от x по t, найдем численные значения скорости и ускорения точки

$$v = v_x = -ak \sin kt, \quad w = w_x = -ak^2 \cos kt. \qquad (30')$$

Следовательно, в этом движении и скорость и ускорение точки изменяются с течением времени по гармоническому закону. По знакам v и w легко проверить, что когда точка движется к центру

колебаний, ее движение является ускоренным, а когда от центра колебаний, — замедленным.

Аналогичные колебания происходят и при законе $x = a \sin kt$, только движение в этом случае начинается из центра O.

Гармонические колебания по закону $s = a \cos kt$ (или $s = a \sin kt$) точка может совершать, двигаясь вдоль любой кривой (см., например, в § 70 задачу 57). Все сказанное о характере движения при этом сохранится с той лишь разницей, что последняя из формул (30′) будет определять *касательное* ускорение точки; кроме него, точка будет еще иметь нормальное ускорение $w_n = v^2/\rho$.

§ 69. Графики движения, скорости и ускорения точки. Если в соответствующих масштабах откладывать вдоль оси абсцисс время t, а вдоль оси ординат — расстояние s, то построенная в этих осях кривая $s = f(t)$ будет изображать *график расстояний* или *график движения* точки. По этому графику наглядно видно, как изменяется положение точки (ее координата s) с течением времени.

Аналогично, в соответствующих масштабах могут быть построены кривые, дающие зависимость $v(t)$ — *график скорости* и $w_\tau(t)$, $w_n(t)$, $w(t)$ — *графики касательного, нормального и полного ускорений.*

На рис. 152, *а, б, в* сверху показаны графики движений, определяемых соответственно уравнениями (27), (29) и (30). Ниже на тех

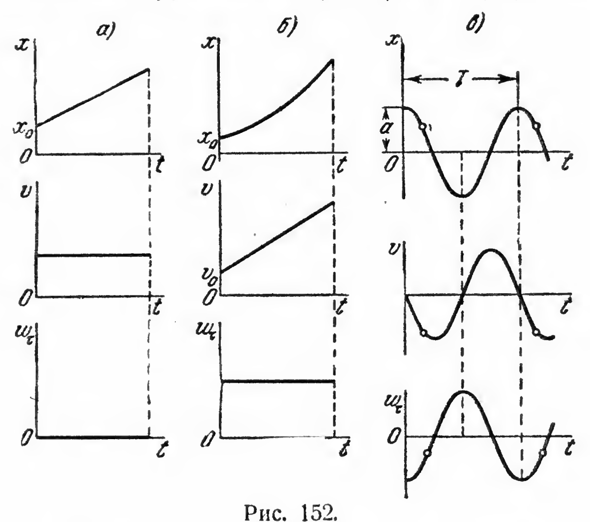


Рис. 152.

же рисунках изображены для этих движений графики скоростей и графики касательных ускорений.

График равномерного движения изображается, как мы видим, прямой линией, направленной под углом к оси абсцисс, график

скорости этого движения — прямой, параллельной оси абсцисс ($v = \text{const}$), а график касательного ускорения — прямой, совпадающей с осью абсцисс ($w_\tau = 0$). Для равнопеременного движения (в изображенном на рис. 152, *б* случае — ускоренного) график движения изображается ветвью параболы, график скорости — прямой, направленной под углом к оси абсцисс, а график касательного ускорения — прямой, параллельной оси абсцисс ($w_\tau = \text{const}$). Наконец, для гармонических колебаний (рис. 152, *в*) соответствующие графики изображаются косинусоидами или синусоидами.

График движения не следует смешивать с траекторией, которая во всех рассмотренных случаях должна быть задана дополнительно. Графики нормального и полного ускорений на рис. 152 не показаны, так как w_n и w, кроме закона движения, зависят еще от ρ, т. е. от вида траектории, и при одном и том же законе $s = f(t)$ будут для разных траекторий разными.

§ 70. Решение задач. Как уже указывалось, для решения задач кинематики надо знать закон движения точки. Если движение задано естественным способом (дана траектория и закон движения вдоль траектории), то все характеристики движения (скорость, касательное, нормальное и полное ускорения) определяются по формулам, полученным в §§ 66—68. Касательное и нормальное ускорения точки можно найти и в случае, когда движение задано координатным способом, т. е. уравнениями (3) или (4). Для этого по формулам (15)—(18) вычисляем v и w. Беря производную по времени от найденного выражения v, определяем $w_\tau = \frac{dv}{dt}$. Теперь, зная w и w_τ, находим w_n из равенства $w^2 = w_\tau^2 + w_n^2$. Одновременно можно найти радиус кривизны траектории ρ из формулы $w_n = v^2/\rho$. Пример таких расчетов дан в задаче 59.

Задача 57. При небольших углах отклонения груз маятника (рис. 153) движется по окружности радиуса l по закону $s = a \sin kt$ (начало отсчета в точке O, a и k — постоянные величины). Найти скорость, касательное и нормальное ускорения груза и те положения, в которых эти величины обращаются в нуль.

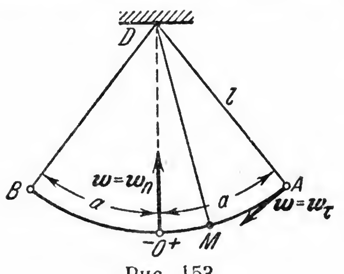


Рис. 153.

Решение. Пользуясь соответствующими формулами, находим:

$$v = \frac{ds}{dt} = ak\cos kt;\quad w_\tau = \frac{dv}{dt} = -ak^2\sin kt;$$

$$w_n = \frac{v^2}{l} = \frac{a^2k^2}{l}\cos^2 kt.$$

Из закона движения следует, что груз совершает вдоль траектории гармонические колебания с дуговой амплитудой a. В крайних положениях (в точках A и B) $\sin kt = \pm 1$, а следовательно, $\cos kt = 0$. Поэтому в точках

A и B скорость и нормальное ускорение обращаются в нуль; касательное же ускорение имеет здесь наибольшее по модулю значение $w_{\tau\max} = ak^2$. Наоборот, когда груз приходит в начало отсчета O, то $s = 0$ и, следовательно, $\sin kt = 0$, а $\cos kt = 1$. В этом положении $w_\tau = 0$, а v и w_n имеют максимальные значения:

$$v_{\max} = ak, \quad w_{n\max} = \frac{a^2k^2}{l}.$$

Из данного примера видно, что при криволинейном неравномерном движении в отдельных точках траектории w_τ или w_n могут обращаться в нуль. При этом $w_\tau = 0$ в тех точках, где

$$\frac{dv}{dt} = 0,$$

т. е. там, например, где v имеет максимум или минимум, а $w_n = 0$ в тех точках, где $v = 0$ (как в нашем случае) или где $\rho = \infty$ (точки перегиба траектории).

Задача 58. Поезд начинает двигаться равноускоренно по закруглению радиуса $R = 800$ *м* и, пройдя путь $s_1 = 600$ *м*, приобретает скорость $v_1 = 36$ *км/час*. Определить скорость и ускорение поезда в середине этого пути.

Решение. Так как поезд движется равноускоренно и при этом $v_0 = 0$, то закон его движения (если считать $s_0 = 0$) будет $s = \frac{1}{2} w_\tau t^2$, а скорость движения: $v = w_\tau t$.

Исключая из этих уравнений время t, получим:

$$v^2 = 2w_\tau s.$$

По условиям задачи, при $s = s_1$ $v = v_1$. Отсюда находим:

$$w_\tau = \frac{v_1^2}{2s_1}.$$

В середине пути при $s_2 = \frac{s_1}{2}$ скорость v_2 равна

$$v_2 = \sqrt{2w_\tau s_2} = \sqrt{w_\tau s_1} = \frac{v_1}{\sqrt{2}}.$$

Нормальное ускорение в этом месте траектории равно:

$$w_{n2} = \frac{v_2^2}{R} = \frac{v_1^2}{2R}.$$

Зная w_τ и w_{n2}, определим полное ускорение поезда в середине пути:

$$w_2 = \sqrt{w_\tau^2 + w_{n2}^2} = \frac{v_1^2}{2}\sqrt{\frac{1}{s_1^2} + \frac{1}{R^2}}.$$

Подставляя численные значения, найдем:

$$v_2 \approx 7{,}1 \text{ м/сек}; \quad w_2 = \frac{5}{48} \approx 0{,}1 \text{ м/сек}^2.$$

Задача 59. Точка, брошенная с горизонтальной скоростью, движется по закону, определяемому уравнениями:

$$x = v_0 t, \qquad y = \frac{1}{2} g t^2,$$

где v_0 и g — некоторые постоянные.

Найти траекторию, скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны траектории в любом положении, выразив их через скорость точки в этом положении.

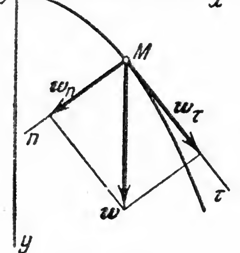
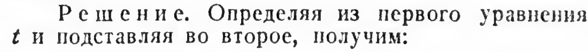


Рис. 154.

Решение. Определяя из первого уравнения t и подставляя во второе, получим:



$$y = \frac{g}{2v_0^2} x^2.$$



Траектория точки — парабола (рис. 154).

Дифференцируя уравнения движения по времени, найдем:

$$v_x = \dot{x} = v_0, \quad v_y = \dot{y} = gt,$$

откуда

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}. \tag{a}$$

Таким образом, в начальный момент ($t = 0$) скорость точки $v = v_0$, а затем с течением времени величина скорости непрерывно возрастает.

Найдем ускорение точки. По соответствующим формулам имеем

$$w_x = \ddot{x} = 0, \quad w_y = \ddot{y} = g.$$

Следовательно, ускорение точки

$$w = g.$$

В данном случае точка движется с постоянным по модулю и направлению ускорением, параллельным оси Oy (это ускорение силы тяжести). Обращаем внимание на то, что хотя здесь $w = \text{const}$, движение точки не является равнопеременным, так как условием равнопеременного движения является не $w = \text{const}$, а $w_\tau = \text{const}$. В этом же движении, как мы сейчас увидим, w_τ не постоянно.

Зная зависимость v от t [формула (а)], найдем теперь w_τ:

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}} = \frac{g^2 t}{v}.$$

Но из равенства (а) $v^2 = v_0^2 + g^2 t^2$ и, следовательно,

$$t = \frac{1}{g} \sqrt{v^2 - v_0^2}.$$

Подставляя это значение t, выразим w_τ через скорость v:

$$w_\tau = g \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{v^2}}.$$

Отсюда следует, что в начальный момент, когда $v = v_0$, $w_\tau = 0$. Затем, с увеличением v величина w_τ растет и при $v \to \infty$ $w_\tau \to g$; следовательно,

в пределе величина касательного ускорения стремится к полному ускорению g.

Для нахождения w_n обратимся к зависимости:

$$w^2 = w_\tau^2 + w_n^2.$$

Отсюда

$$w_n^2 = w^2 - w_\tau^2 = g^2 - g^2\left(1 - \frac{v_0^2}{v^2}\right) = g^2\frac{v_0^2}{v^2}$$

и

$$w_n = \frac{v_0 g}{v}.$$

Таким образом, в начальный момент $(v = v_0)$ $w_n = g$, а затем с увеличением v величина w_n убывает, стремясь в пределе к нулю.

Для нахождения радиуса кривизны траектории воспользуемся формулой

$$w_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

Отсюда

$$\rho = \frac{v^2}{w_n} = \frac{v^3}{v_0 g}.$$

В начальный момент радиус кривизны имеет наименьшее значение

$$\rho_{\min} = \frac{v_0^2}{g};$$

затем с увеличением v радиус кривизны растет и, следовательно, кривизна траектории уменьшается. При $v \to \infty$ $\rho \to \infty$, а кривизна стремится к нулю.

§ 71*. Скорость в полярных координатах. Когда точка движется все время в одной и той же плоскости, ее положение можно определять полярными координатами r и φ (рис. 155). При движении точки эти координаты с течением времени изменяются. Следовательно, закон движения точки в полярных координатах будет задаваться уравнениями:

$$r = f_1(t), \quad \varphi = f_2(t). \tag{31}$$

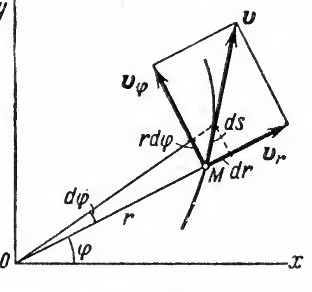


Рис. 155.

Скорость точки численно равна $\frac{ds}{dt}$, т. е. отношению элементарного перемещения ds к промежутку времени dt. В данном случае перемещение ds геометрически складывается из радиального перемещения, численно равного dr, и поперечного, перпендикулярного к радиусу перемещения, численно равного $r\,d\varphi$. Следовательно, сама скорость $\boldsymbol{v}$ будет геометрически складываться из радиальной скорости $\boldsymbol{v}_r$ и поперечной скорости $\boldsymbol{v}_\varphi$, численно равных

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r}, \quad v_\varphi = r\frac{d\varphi}{dt} = r\dot{\varphi}. \tag{32}$$

Так как $\boldsymbol{v}_r$ и $\boldsymbol{v}_\varphi$ взаимно перпендикулярны, то по модулю

$$v=\sqrt{v_r^2+v_\varphi^2}=\sqrt{\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2}. \tag{33}$$

Формулы (32) и (33) определяют скорость точки в полярных координатах при плоском движении.

Равенство (33) можно еще получить, выразив через r и φ декартовы координаты точки в виде (см. рис. 155):

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi.$$

Тогда $\dot{x}=\dot{r}\cos\varphi-r\dot{\varphi}\sin\varphi$, $\dot{y}=\dot{r}\sin\varphi+r\dot{\varphi}\cos\varphi$ и по формуле (16)

$$v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=\sqrt{\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2}.$$

Таким же путем, вычисляя $\ddot{x}$ и $\ddot{y}$, можно по формуле (18) найти выражение для ускорения точки в полярных координатах

$$w=\sqrt{(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)^2+(r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi})^2}. \tag{33'}$$

При этом величина, стоящая под знаком радикала в первой скобке, равна w_r, а во второй — равна w_φ.

§ 72*. Графическое исследование движения точки. Графический метод решения задач кинематики точки применяют в тех случаях, когда аналитически зависимость $s=f(t)$ (или $x=f(t)$ при прямолинейном движении) выражается слишком сложно или когда закон изучаемого движения оказывается непосредственно заданным графиками, полученными экспериментально с помощью самопишущих приборов.

Если известен график движения, выражающий зависимость расстояния s от времени t (рис. 156), то по нему можно построить график скорости методом графического дифференцирования. Как видно из чертежа, средняя скорость точки за промежуток времени $\Delta t=t_2-t_1$ определяется тангенсом угла наклона секущей K_1K_2, так как (с точностью до масштабного коэффициента)

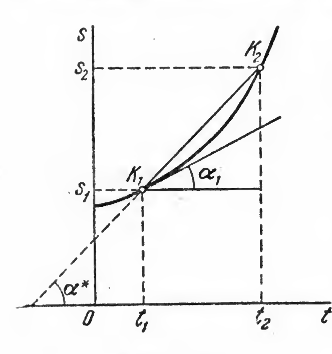


Рис. 156.

$$v_{\text{ср}}=\frac{s_2-s_1}{t_2-t_1}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\operatorname{tg}\alpha^*.$$

Скорость же точки в данный момент времени t_1 будет определяться тангенсом угла наклона касательной в точке K_1, так как (тоже с точностью до масштабного коэффициента)

$$v_1=\left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=t_1}=\operatorname{tg}\alpha_1. \tag{34}$$

Таким образом, проводя касательные к кривой расстояний в точках K_1, K_2, ..., мы по тангенсам соответствующих углов можем найти значения скорости точки в моменты t_1, t_2, ... и по этим значениям построить график скорости. Аналогично по графику скорости может быть построен график касательного ускорения $w_\tau=\frac{dv}{dt}$. Порядок соответствующих графических построений (с учетом масштабов изображения t и s) показан в ходе решения задачи 60.

Для построения графиков нормального и полного ускорений (в случае криволинейного движения) значения величин w_n и w в разные моменты времени определяют численным расчетом по соответствующим формулам. При этом величины v и w_τ берутся с построенных графиков скорости и касательного ускорения, а ρ определяется по заданной траектории движения.

Если для данного движения известен график скорости, то по нему легко построить график движения методом графического интегрирования. Так как $ds = v\,dt$, то отсюда, считая $s_0 = 0$, получим

$$s = \int_0^t v\,dt.$$

Стоящий справа интеграл вычисляется как соответствующая площадь, которая берется со знаком плюс для положительных значений v и со знаком минус — для отрицательных. Подсчет площадей удобнее вести по клеткам, изобразив график на миллиметровой бумаге. В случае, показанном на рис. 157, расстояние s_1 в момент t_1 будет равно разности верхней и нижней заштрихованных площадей, умноженной на масштабный коэффициент [1]). Найдя таким путем значения s в разные моменты времени t, можно построить график движения. Аналогичным путем по графику касательного ускорения можно построить график скорости.

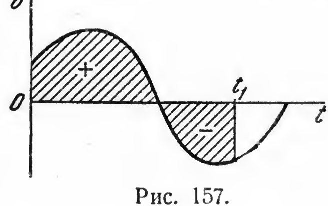


Рис. 157.

Задача 60. Исследовать графически движение поршня в кривошипно-шатунном механизме (рис. 158), если длина кривошипа $O'A = 0{,}2$ *м*, а длина шатуна $AB = 0{,}4$ *м*. Кривошип вращается равномерно, делая 1 оборот за время $T = 1{,}6$ *сек*.

Решение. 1) Построение графика движения поршня. Построение сводится к следующим операциям.

а) Выбираем масштабы для изображения расстояния x и времени t. Если построение делается на миллиметровой бумаге, то следует иметь в виду, что на ней ошибка при измерении расстояний может достигать $\pm\, 0{,}25 \div 0{,}5$ *мм* (в зависимости от качества бумаги и чертежа). Из этого и следует исходить при выборе масштабов. Примем в нашем случае масштаб для x: в 1 *см* 0,1 *м*; масштаб для t: в 1 *см* 0,2 *сек*.

б) Изображаем схему механизма в масштабе, выбранном для x (рис. 158, *а*); при этом $O'A_0 = 2$ *см*, $A_0B_0 = 4$ *см*. Проводим вдоль траектории поршня координатную ось $O'x$. Делим полуокружность, по которой движется точка A, на 8 одинаковых частей (чем больше число частей, тем точнее построение). Каждый такой участок точка A проходит за 0,1 *сек*. Из точек деления делаем циркулем засечки радиуса $AB = 4$ *см* на оси $O'x$. Эти засечки дают значения x в моменты t, равные соответственно 0; 0,1 *сек*; 0,2 *сек* и т. д.

в) По найденным значениям x и t строим график движения поршня за время одного оборота кривошипа, соединяя соответствующие точки плавной кривой (рис. 158, *б*); правая ветвь кривой в данном случае симметрична левой.

2) Построение графика скорости. Это построение сводится к следующим операциям:

а) Проводим оси v, t (рис. 158, *в*), сохраняя тот же масштаб для времени t, что и на рис. 158, *б*. Откладываем вдоль оси t отрезок O_1K_0,

---

[1]) Сумма этих площадей определит путь, пройденный точкой за время t_1, если $s_0 = 0$.

изображающий в выбранном масштабе одну секунду (в нашем случае длина $O_1K_0 = 5$ *см*).

б) Определяем направление касательной к кривой $x = f(t)$ в точке C_1, соответствующей моменту времени $t_1 = 0,1$ *сек* *). Проводим через точку K_0 прямую K_0D_0, параллельную этой касательной (пунктирная линия). Тогда отрезок O_1D_0 выразит скорость в момент $t_1 = 0,1$ *сек*, так как $O_1K_0 = 1$ *сек*, а по формуле (34)

$$(v)_{t=0,1\ сек} = \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{O_1D_0}{O_1K_0} = O_1D_0.$$

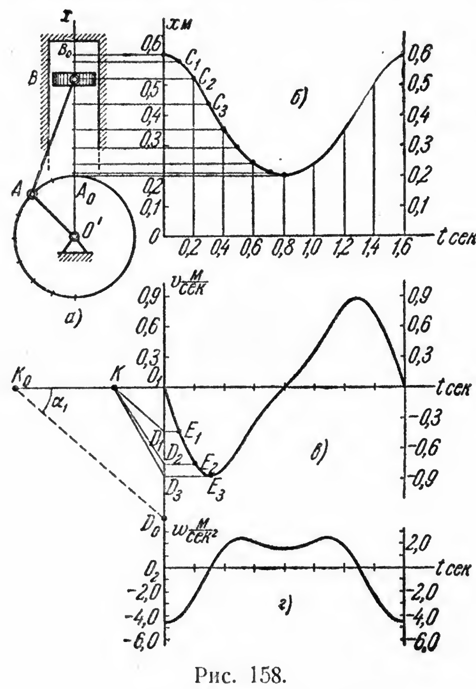


Рис. 158.

При этом, если расстояние x выражено в масштабе в 1 *см* 0,1 *м*, то скорость v будет выражена в масштабе в 1 *см* 0,1 *м/сек*. Если получившийся масштаб не удобен для изображения (слишком велик или мал), то его можно изменить так, как это показано ниже.

в) В нашем случае масштаб для изображения v оказался слишком велик. Уменьшим его втрое. Для этого от точки O_1 откладываем отрезок $O_1K = \frac{1}{3} O_1K_0$. Через точку K проводим прямую KD_1, параллельную касательной в точке C_1 (или линии K_0D_0). Тогда отрезок O_1D_1 определит скорость в момент $t_1 = 0,1$ *сек* в масштабе

$$\text{в 1 см } 0,3\ \frac{м}{сек}\ (\text{масштаб } v).$$

Проведя прямую D_1E_1, параллельную оси O_1t, получаем точку E_1 графика скорости.

---

*) Для проведения касательной в данной точке кривой удобно пользоваться линейкой с боковой зеркальной поверхностью, перпендикулярной плоскости линейки (такой прибор можно получить, приклеив к боковой поверхности обычной логарифмической линейки полоску разглаженного станиоля). Линейку, приложенную в данной точке кривой (поперек кривой), поворачивают до тех пор, пока продолжение кривой в зеркале не будет видно без заметного излома. Тогда направление линейки дает направление нормали, а перпендикуляр к ней — направление касательной в данной точке кривой. Если вместо зеркала используется полоска станиоля, кривую лучше предварительно обвести тушью.

Аналогично, проведя через точку K прямые KD_2, KD_3, ..., параллельные направлениям касательных в точках C_2, C_3, ..., построим точки E_2, E_3, ... графика скорости. Соединяя эти точки плавной кривой, найдем график скорости поршня (рис. 158, *в*).

3) Построение графика ускорения по графику скорости (или графика касательного ускорения, если движение криволинейное) производится аналогично построению графика скорости по графику движения. На рис. 158, *г* показан график ускорения поршня в масштабе в 1 *см* 2,5 *м/сек*^{2}.

Задача 61. Определить графическим построением контур кулака (рисунок 159, *а*), при равномерном вращении которого вокруг оси O' вертикальный стержень AB будет двигаться по закону, изображенному на рис. 159, *б*

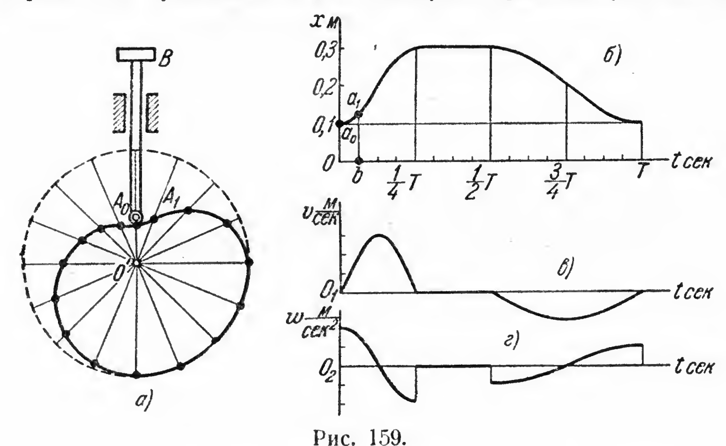


Рис. 159.

(на графике T — время одного оборота кулака; за первую четверть оборота стержень совершает подъем на 0,2 *м*, в течение второй четверти оборота — остается на месте, а за последние пол-оборота — возвращается в начальное положение). Показать также вид графиков скорости и ускорения стержня в этом движении. График движения дан в масштабе: в 1 *см* 0,1 *м*.

Решение. Построим контур кулака в том же масштабе, в котором задан график движения. Для этого проводим из центра O' окружность радиусом 3 *см* и делим ее на 16 равных частей. Отрезок OT на оси t графика движения делим также на 16 равных частей. Значение x для каждого из этих моментов времени откладываем вдоль соответствующего радиуса от центра O' ($O'A_0 = Oa_0$, $O'A_1 = ba_1$ и т. д.). Соединяя полученные точки A_0, A_1 и т. д. плавной кривой, найдем искомый контур кулака (рис. 159, *а*).

Аналогичным путем, если задан контур кулака, можно построить график движения стержня AB.

Задаваясь каким-нибудь значением времени T одного оборота кулака, строим (так же, как в предыдущей задаче) графики скорости и ускорения стержня AB.

Вид этих графиков показан на рис. 159, *в* и 159, *г*. В течение второй четверти оборота кулака скорость и ускорение стержня AB (как и должно быть по условиям задачи) равны нулю. При этом скорость стержня изменяется все время непрерывно, а ускорение претерпевает скачки в моменты $t_1 = \frac{1}{4}T$ и $t_2 = \frac{1}{2}T$.

ГЛАВА XI

ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ И ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 73. Поступательное движение. В кинематике, как и в статике, мы будем рассматривать все твердые тела как абсолютно твердые, т. е. будем считать, что расстояние между двумя любыми точками тела остается во все время движения неизменным.

Задачи кинематики твердого тела распадаются на две части: 1) задание движения и изучение кинематических характеристик движения всего тела в целом; 2) изучение движения каждой из точек тела в отдельности.

Начнем с рассмотрения поступательного движения твердого тела. *Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная в этом теле, перемещается, оставаясь параллельной самой себе.*

Поступательное движение не следует смешивать с прямолинейным. При поступательном движении тела траектории его точек могут быть любыми кривыми линиями.

Приведем примеры поступательных движений.

1. Кузов автомобиля на прямом горизонтальном участке дороги движется поступательно. При этом траектории его точек будут прямыми линиями.

2. Спарник AB (рис. 160) при вращении кривошипов O_1A и O_2B ($O_1A = O_2B$) также движется поступательно (любая проведенная в нем прямая остается параллельной самой себе). Точки спарника движутся при этом по окружностям.

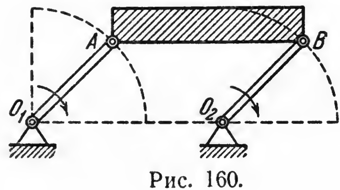


Рис. 160.

Свойства поступательного движения определяются следующей теоремой: *при поступательном движении все точки тела описывают одинаковые (при наложении совпадающие) траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения.*

Для доказательства рассмотрим твердое тело, совершающее поступательное движение относительно системы отсчета $Oxyz$. Возьмем в теле две произвольные точки A и B, положения которых в момент времени t определяются радиусами-векторами $\boldsymbol{r}_A$ и $\boldsymbol{r}_B$ (рис. 161); проведем вектор $\overline{AB}$, соединяющий эти точки. Тогда, как легко видеть,

$$\boldsymbol{r}_B = \boldsymbol{r}_A + \overline{AB}. \qquad (35)$$

При этом длина AB постоянна, как расстояние между точками твердого тела, а направление $\overline{AB}$ остается неизменным, так как тело

движется поступательно. Таким образом, вектор $\overline{AB}$ во все время движения тела остается постоянным ($\overline{AB} = \text{const}$). Вследствие этого, как видно из равенства (35) (и непосредственно из чертежа), траектория точки B получается из траектории точки A параллельным смещением всех ее точек на постоянный вектор $\overline{AB}$. Следовательно, траектории точек A и B будут действительно одинаковыми (при наложении совпадающими) кривыми.

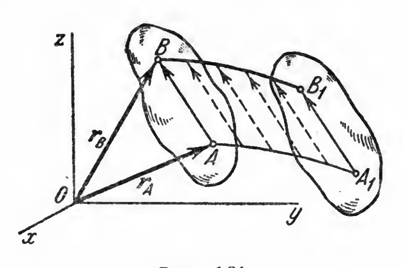


Рис. 161.

Для нахождения скоростей точек A и B продифференцируем обе части равенства (35) по времени. Тогда получим:

$$\frac{d\boldsymbol{r}_B}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}_A}{dt} + \frac{d\,(\overline{AB})}{dt}.$$

Но производная от постоянного вектора $\overline{AB}$ равна нулю. Производные же от векторов $\boldsymbol{r}_A$ и $\boldsymbol{r}_B$ по времени дают скорости точек A и B. В результате находим, что

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_B,$$

т. е. что скорости точек A и B тела в любой момент времени одинаковы и по модулю и по направлению. Беря от обеих частей полученного равенства производные по времени, найдем:

$$\frac{d\boldsymbol{v}_A}{dt} = \frac{d\boldsymbol{v}_B}{dt} \quad \text{или} \quad \boldsymbol{w}_A = \boldsymbol{w}_B.$$

Следовательно, ускорения точек A и B тела в любой момент времени тоже одинаковы по модулю и направлению.

Так как точки A и B были выбраны произвольно, то из найденных результатов следует, что у всех точек тела их траектории, а также скорости и ускорения в любой момент времени будут одинаковы. Таким образом, теорема доказана.

Из теоремы следует, что поступательное движение твердого тела вполне определяется движением какой-нибудь одной его точки. Следовательно, изучение поступательного движения тела сводится к задаче кинематики точки, нами уже рассмотренной.

При поступательном движении общую для всех точек тела скорость $\boldsymbol{v}$ называют *скоростью поступательного движения тела*, а ускорение $\boldsymbol{w}$ — *ускорением поступательного движения*. Векторы $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{w}$ можно, очевидно, изображать приложенными в любой точке тела.

Заметим, что понятия о скорости и ускорении *тела* имеют смысл *только при поступательном движении*. Во всех остальных случаях

точки тела, как мы увидим, движутся с разными скоростями и ускорениями и термины «скорость тела» или «ускорение тела» для этих движений теряют смысл.

§ 74. Вращательное движение твердого тела. Угловая скорость и угловое ускорение. *Вращательным называется такое движение твердого тела, при котором какие-нибудь две точки, принадлежащие телу (или неизменно с ним связанные), остаются во все время движения неподвижными* (рис. 162). Проходящая через неподвижные точки A и B прямая AB называется *осью вращения.*

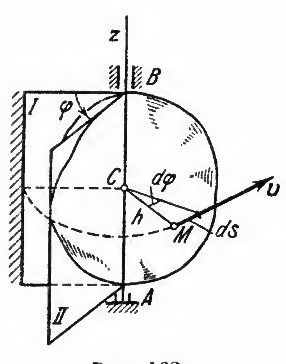


Рис. 162.

Так как расстояния между точками твердого тела должны оставаться неизменными, то очевидно, что при вращательном движении все точки, принадлежащие оси вращения, будут неподвижны, а все остальные точки тела будут описывать окружности, плоскости которых перпендикулярны к оси вращения, а центры лежат на этой оси[1]).

Для определения положения вращающегося тела проведем через ось вращения Az две полуплоскости: полуплоскость I — неподвижную и полуплоскость II, врезанную в само тело и вращающуюся вместе с ним (рис. 162). Тогда положение тела в любой момент времени будет однозначно определяться взятым с соответствующим знаком углом φ между этими полуплоскостями, который назовем *углом поворота тела.* Мы будем считать угол φ положительным, если он отложен от неподвижной плоскости в направлении против хода часовой стрелки (для наблюдателя, смотрящего с положительного конца оси Az), и отрицательным, если по ходу часовой стрелки. Измеряется угол φ всегда *в радианах.* Чтобы знать положение тела в любой момент времени, надо знать зависимость угла φ от времени t, т. е.

$$\varphi = f(t). \tag{36}$$

Уравнение (36) выражает *закон вращательного движения твердого тела.*

Основными кинематическими характеристиками вращательного движения твердого тела являются его угловая скорость ω и угловое ускорение ε.

---

[1]) Вращение тела вокруг оси может происходить и так, что при этом ни одна из точек, принадлежащих самому телу, на оси вращения лежать не будет (например, вращение колеса, надетого на ось, или вращение человека, сидящего на карусели).

Если за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ тело совершает поворот на угол $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$, то средняя угловая скорость тела за этот промежуток времени будет численно равна

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Угловой скоростью тела в данный момент времени t называется величина, к которой стремится значение $\omega_{\text{ср}}$, когда промежуток времени Δt стремится к нулю:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad \text{или} \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt}. \qquad (37)$$

Таким образом, *угловая скорость тела в данный момент времени численно равна первой производной от угла поворота по времени.* Равенство (37) показывает также, что величина ω равна отношению элементарного угла поворота $d\varphi$ к соответствующему промежутку времени dt. Знак ω определяет направление вращения тела. Легко видеть, что, когда вращение происходит против хода часовой стрелки, $\omega > 0$, а когда по ходу часовой стрелки, то $\omega < 0$.

Размерность угловой скорости радиан/время или 1/время, так как радиан — величина безразмерная; в качестве единицы измерения обычно применяется 1/*сек*.

Угловую скорость тела можно изобразить в виде вектора $\boldsymbol{\omega}$, численная величина которого ω равна $\frac{d\varphi}{dt}$ и который направлен вдоль оси вращения тела в ту сторону, откуда вращение видно происходящим против хода часовой стрелки (см. рис. 163). Такой вектор сразу определяет и модуль угловой скорости, и ось вращения, и направление вращения вокруг этой оси.

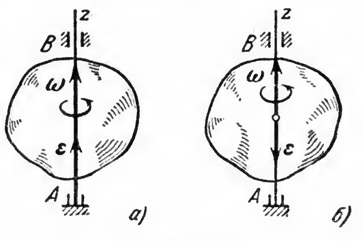


Рис. 163.

Угловое ускорение характеризует изменение угловой скорости тела с течением времени.

Если за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ угловая скорость тела изменяется на величину $\Delta\omega = \omega_1 - \omega$, то среднее угловое ускорение тела за этот промежуток времени будет численно равно:

$$\varepsilon_{\text{ср}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

Угловым ускорением тела в данный момент времени t называется величина, к которой стремится значение $\varepsilon_{\text{ср}}$, когда промежуток

времени Δt стремится к нулю; следовательно,

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

или, принимая во внимание равенство (37),

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \qquad (38)$$

Итак, *угловое ускорение тела в данный момент времени численно равно первой производной от угловой скорости или второй производной от угла поворота тела по времени.*

Размерность углового ускорения будет 1/время^2; в качестве единицы измерения обычно применяется $1/сек^2$.

Если модуль угловой скорости со временем возрастает, вращение тела называется *ускоренным*, а если убывает — *замедленным*. Легко видеть, что вращение будет ускоренным, когда величины ω и ε имеют одинаковые знаки, и замедленным, — когда разные.

Угловое ускорение тела (по аналогии с угловой скоростью) можно также изобразить в виде вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$, направленного вдоль оси вращения. При этом направление $\boldsymbol{\varepsilon}$ совпадает с направлением $\boldsymbol{\omega}$, когда тело вращается ускоренно (рис. 163, *а*) и противоположно $\boldsymbol{\omega}$ при замедленном вращении (рис. 163, *б*).

§ 75. Равномерное и равнопеременное вращения. Если угловая скорость тела остается во все время движения постоянной ($\omega = \text{const}$), то вращение тела называется *равномерным*. Найдем закон равномерного вращения. Из формулы (37) имеем $d\varphi = \omega\, dt$. Отсюда, считая, что в начальный момент при $t = 0$ угол $\varphi = 0$, и беря интегралы, слева от 0 до φ, а справа от 0 до t, получим:

$$\varphi = \omega t. \qquad (39)$$

Из равенства (39) следует также, что при равномерном вращении

$$\omega = \frac{\varphi}{t}. \qquad (40)$$

В технике скорость равномерного вращения часто определяют числом оборотов в минуту, обозначая эту величину через n *об/мин* [1]). Найдем зависимость между n *об/мин* и ω $1/сек$. При одном обороте тело поворачивается на угол 2π, а при n оборотах на $2\pi n$; этот

[1]) Следует особо подчеркнуть, что n по размерности не угол, а угловая скорость.

поворот делается за время $t=1$ *мин* $=60$ *сек*. Из равенства (40) следует тогда, что

$$\omega=\frac{\pi n}{30}\approx 0{,}1\ n. \tag{41}$$

Если угловое ускорение тела во все время движения остается постоянным ($\varepsilon=\text{const}$), то вращение называется *равнопеременным*. Найдем закон равнопеременного вращения, считая, что в начальный момент времени $t=0$ угол $\varphi=0$, а угловая скорость $\omega=\omega_0$ (ω_0 — начальная угловая скорость).

Из формулы (38) имеем $d\omega=\varepsilon\, dt$. Интегрируя левую часть в пределах от ω_0 до ω, а правую — в пределах от 0 до t, найдем:

$$\omega=\omega_0+\varepsilon t. \tag{42}$$

Представим выражение (42) в виде

$$\frac{d\varphi}{dt}=\omega_0+\varepsilon t \quad \text{или} \quad d\varphi=\omega_0\, dt+\varepsilon t\, dt.$$

Вторично интегрируя, найдем отсюда закон равнопеременного вращения:

$$\varphi=\omega_0 t+\varepsilon\frac{t^2}{2}. \tag{43}$$

Угловая скорость ω этого вращения определяется формулой (42). Если величины ω и ε имеют одинаковые знаки, вращение будет равноускоренным, а если разные — равнозамедленным.

§ 76. Скорости и ускорения точек вращающегося тела. Установив в предыдущих параграфах характеристики движения всего тела в целом, перейдем к изучению движения отдельных его точек.

Рассмотрим какую-нибудь точку M твердого тела, находящуюся на расстоянии h от оси вращения Az (см. рис. 162). При вращении тела точка M будет описывать окружность радиуса h, плоскость которой перпендикулярна к оси вращения, а центр C лежит на самой оси. Если за время dt происходит элементарный поворот тела на угол $d\varphi$, то точка M при этом совершит вдоль своей траектории элементарное перемещение $ds=h\,d\varphi$. Тогда скорость точки будет равна отношению ds к dt, т. е.

$$v=\frac{ds}{dt}=h\frac{d\varphi}{dt}$$

или

$$v=h\omega. \tag{44}$$

Скорость v в отличие от угловой скорости тела называют еще *линейной* или *окружной* скоростью точки M.

Таким образом, *линейная скорость точки вращающегося твердого тела численно равна произведению угловой скорости тела на расстояние от этой точки до оси вращения.*

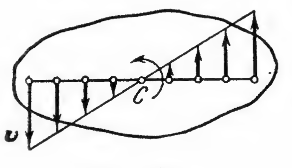


Рис. 164.

Направлена линейная скорость по касательной к описываемой точкой M окружности или перпендикулярно к плоскости, проходящей через ось вращения и точку M.

Так как для всех точек тела ω имеет в данный момент одно и то же значение, то из формулы (44) следует, что линейные скорости точек вращающегося тела пропорциональны их расстояниям от оси вращения (рис. 164).

Для нахождения ускорения точки M воспользуемся формулами

$$w_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad w_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

В нашем случае $\rho = h$. Подставляя сюда значение v из равенства (44), получаем:

$$w_\tau = h\frac{d\omega}{dt}, \quad w_n = \frac{h^2\omega^2}{h}$$

или окончательно:

$$w_\tau = h\varepsilon, \ w_n = h\omega^2. \tag{45}$$

Касательное ускорение w_τ направлено по касательной к траектории (в сторону движения, если тело вращается ускоренно, или в обратную сторону, если тело вращается замедленно); нормальное

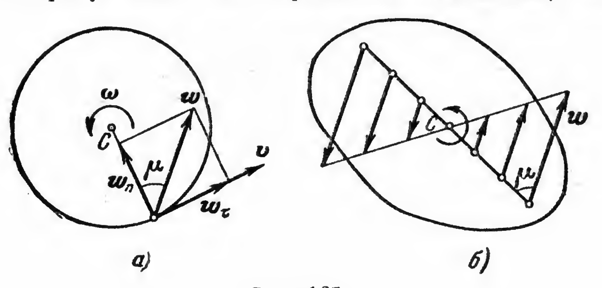


Рис. 165.

ускорение w_n всегда направлено по радиусу h к оси вращения (рис. 165, *а*).

Полное ускорение точки M будет равно

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2} = \sqrt{h^2\varepsilon^2 + h^2\omega^4}$$

или

$$w = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \tag{46}$$

Отклонение вектора полного ускорения от радиуса описываемой точкой окружности определяется углом μ, который вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{|w_\tau|}{w_n}.$$

Подставляя сюда значения w_τ и w_n из равенств (45), получаем:

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}. \qquad (47)$$

Так как ε и ω имеют в данный момент для всех точек тела одно и то же значение, то из формул (46) и (47) следует, что ускорения всех точек вращающегося твердого тела пропорциональны их расстояниям от оси вращения и образуют в данный момент времени один и тот же угол μ с радиусами описываемых ими окружностей (рис. 165, *б*).

Формулы (44)—(47) позволяют определить скорость и ускорение любой точки тела, если известен закон вращения тела и расстояние данной точки от оси вращения. По этим же формулам можно, зная движение одной точки тела, найти движение любой другой его точки, а также характеристики движения всего тела в целом.

Задача 62. Вал, делающий $n = 90$ *об/мин*, после выключения двигателя начинает вращаться равнозамедленно и останавливается через $t_1 = 40$ *сек*. Определить, сколько оборотов сделал вал за это время.

Решение. Так как вал вращается равнозамедленно, то для него

$$\varphi = \omega_0 t + \varepsilon \frac{t^2}{2}, \qquad (а)$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t. \qquad (б)$$

Начальной угловой скоростью при замедленном вращении будет та, которую вал имел до выключения двигателя. Следовательно:

$$\omega_0 = \frac{\pi n}{30}.$$

В момент остановки при $t = t_1$ угловая скорость вала $\omega_1 = 0$. Подставляя эти значения в уравнение (б), получаем:

$$0 = \frac{\pi n}{30} + \varepsilon t_1 \quad \text{и} \quad \varepsilon = -\frac{\pi n}{30 t_1}.$$

Если обозначить число сделанных валом за время t_1 оборотов через N (не смешивать с n; n — угловая скорость!), то угол поворота за то же время будет равен $\varphi_1 = 2\pi N$. Подставляя найденные значения ε и φ_1 в уравнение (а), получим:

$$2\pi N = \frac{\pi n}{30} t_1 - \frac{\pi n}{60} t_1 = \frac{\pi n}{60} t_1,$$

откуда

$$N = \frac{n t_1}{120} = 30 \text{ об.}$$

Задача 63. Маховик радиуса $R=1{,}2$ *м* вращается равномерно, делая $n=90$ *об/мин.* Определить линейную скорость и ускорение точки, лежащей на ободе маховика.

Решение. Линейная скорость точки $v=R\omega$, где угловая скорость ω должна быть выражена в радианах в секунду. В нашем случае:

$$\omega=\frac{\pi n}{30}=3\pi\,\frac{1}{сек}.$$

Тогда

$$v=\frac{\pi n}{30}R\approx 11{,}3\ м/сек.$$

Так как $\omega=\text{const}$, то $\varepsilon=0$, и следовательно,

$$w=w_n=R\omega^2=\frac{\pi^2n^2}{900}R\approx 106{,}6\ м/сек^2.$$

Ускорение точки направлено в данном случае к оси вращения.

Задача 64. В период разгона маховик вращается по закону

$$\varphi=\frac{9}{32}t^3.$$

Определить линейную скорость и ускорение точки, находящейся на расстоянии $h=0{,}8$ *м* от оси вращения, в тот момент, когда касательное ускорение этой точки станет равно нормальному.

Решение. Находим угловую скорость и угловое ускорение маховика

$$\omega=\frac{d\varphi}{dt}=\frac{27}{32}t^2,\quad \varepsilon=\frac{d\omega}{dt}=\frac{27}{16}t.$$

Для касательного и нормального ускорения точки имеем формулы: $w_\tau=h\varepsilon$, $w_n=h\omega^2$.

Обозначим момент, в который $w_\tau=w_n$, через t_1. Очевидно, в этот момент $\varepsilon_1=\omega_1^2$ или

$$\frac{27}{16}t_1=\left(\frac{27}{32}\right)^2t_1^4,$$

откуда

$$t_1^3=\frac{64}{27}\quad\text{и}\quad t_1=\frac{4}{3}\ сек.$$

Подставляя это значение t_1 в выражения для ω и ε, найдем, что в момент t_1

$$\omega_1=\frac{3}{2}\ 1/сек,\qquad \varepsilon_1=\frac{9}{4}\ 1/сек^2.$$

Отсюда искомые величины равны:

$$v_1=h\omega_1=1{,}2\ м/сек;\ w_1=h\sqrt{\varepsilon_1^2+\omega_1^4}=1{,}8\sqrt{2}\approx 2{,}54\ м/сек^2.$$

Вектор w_1 направлен под углом 45° к вектору скорости точки.

Задача 65. Груз B (рис. 166) приводит во вращение вал радиуса r и сидящую на одной оси с валом шестерню *1* радиуса r_1. Движение груза

начинается из состояния покоя и происходит с постоянным ускорением a. Определить, по какому закону будет при этом вращаться находящаяся в зацеплении с шестерней *1* шестерня *2* радиуса r_2.

Р е ш е н и е. Так как груз B начинает двигаться без начальной скорости, то его скорость v_B в любой момент времени t будет равна at ($v_B = at$). Эту же скорость будут иметь точки обода вала. Но, с другой стороны, скорости этих точек равны $\omega_1 r$, где ω_1 — общая для вала и шестерни *1* угловая скорость. Следовательно,

$$\omega_1 r = at, \quad \omega_1 = \frac{at}{r}.$$

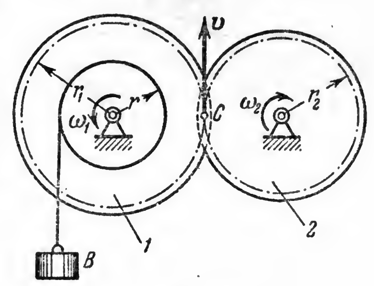


Рис. 166.

Теперь найдем ω_2. Так как в точке C сцепления колес линейная скорость должна быть одной и той же для обеих шестерен, то $v_C = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$, откуда

$$\omega_2 = \frac{r_1}{r_2}\,\omega_1 = \frac{r_1 a}{r_2 r}\,t.$$

Итак, угловая скорость шестерни *2* растет пропорционально времени. Учитывая, что $\omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt}$, где φ_2 — угол поворота шестерни *2*, получим:

$$d\varphi_2 = \frac{r_1 a}{r_2 r}\,t\,dt.$$

Отсюда, беря от обеих частей интегралы и считая, что при $t = 0$ угол $\varphi_2 = 0$, найдем окончательно закон равноускоренного вращения шестерни *2* в виде

$$\varphi_2 = \frac{r_1 a}{2 r r_2}\,t^2.$$

ГЛАВА XII

ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 77. Уравнения плоскопараллельного движения. Разложение движения на поступательное и вращательное. *Плоскопараллельным (или плоским) называется такое движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой неподвижной плоскости* П (рис. 167). Плоское движение совершают многие части механизмов и машин, например, катящееся колесо на прямолинейном участке пути, шатун в кривошипно-шатунном механизме и др. Частным случаем плоскопараллельного движения является вращательное движение твердого тела.

Рассмотрим сечение S тела какой-нибудь плоскостью Oxy, параллельной плоскости П (см. рис. 167). При плоскопараллельном движении все точки тела, лежащие на прямой MM', перпендикулярной

к сечению S, т. е. к плоскости П, движутся тождественно. Поэтому *для изучения движения всего тела достаточно изучить, как движется сечение S тела* в плоскости Oxy. В дальнейшем будем плоскость Oxy совмещать с плоскостью рисунка, а вместо всего тела изображать только его сечение (плоскую фигуру) S.

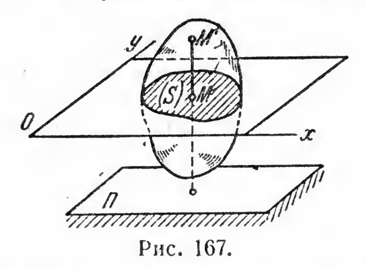


Рис. 167.

Положение сечения S в плоскости Oxy определяется, очевидно, положением какого-нибудь проведенного в этом сечении отрезка AB (рис. 168). В свою очередь, положение отрезка AB можно определить, зная координаты x_A, y_A точки A и угол φ, который отрезок AB образует с осью x.

Точку A, выбранную для определения положения сечения S, будем в дальнейшем называть *полюсом*.

При движении тела величины x_A, y_A и φ будут изменяться. Чтобы знать закон движения тела, т. е. знать его положение в пространстве в любой момент времени, надо знать зависимости:

$$x_A = f_1(t), \quad y_A = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t). \tag{48}$$

Рис. 168.

Уравнения (48), определяющие закон происходящего движения, называются *уравнениями плоскопараллельного движения твердого тела*. Покажем, что плоское движение слагается из поступательного и вращательного. Для этого рассмотрим два последовательных положения I и II, которые занимает сечение S движущегося тела в моменты времени t_1 и $t_2 = t_1 + \Delta t$ (рис. 169). Легко видеть, что сечение S, а с ним и все тело, можно привести из положения I в положение II следующим образом. Переместим сначала тело поступательно, так, чтобы полюс A, двигаясь вдоль своей траектории, пришел в положение A_2 (при этом отрезок A_1B_1 займет положение A_2B_1'), а затем повернем сечение вокруг полюса A_2 на угол $\Delta\varphi_1$. Таким же путем можно переместить тело из положения II в следующее его положение III и т. д. Отсюда заключаем, что *плоскопараллельное движение твердого тела слагается из поступательного движения, при котором все точки тела движутся так же, как полюс A, и из вращательного движения вокруг этого полюса*[1]).

---

[1]) Вращательное движение тела происходит вокруг оси, перпендикулярной к плоскости П и проходящей через полюс A. Однако для краткости мы будем в дальнейшем называть это движение просто вращением вокруг полюса A.

Поступательная часть плоскопараллельного движения описывается, очевидно, первыми двумя из уравнений (48), а вращение вокруг полюса — третьим из этих уравнений.

Основными кинематическими характеристиками рассматриваемого движения являются скорость и ускорение поступательного движения, равные скорости и ускорению полюса ($\boldsymbol{v}_{пост} = \boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{w}_{пост} = \boldsymbol{w}_A$), а также угловая скорость ω и угловое ускорение ε вращательного

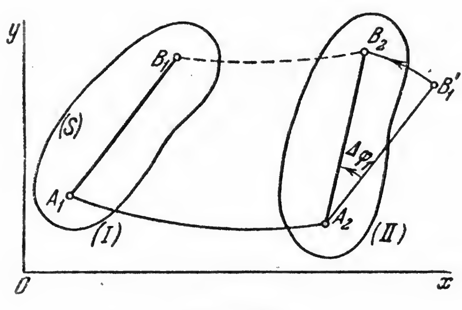


Рис. 169.

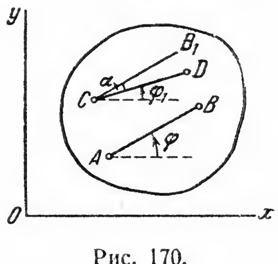


Рис. 170.

движения вокруг полюса. Значения этих характеристик в любой момент времени t можно найти по уравнениям (48).

При изучении движения можно в качестве полюса выбирать любую точку тела. Рассмотрим, что получится, если вместо A выбрать в качестве полюса какую-нибудь точку C и определять положение сечения отрезком CD, образующим с осью Ox угол φ_1 (рис. 170). Характеристики поступательной части движения при этом, очевидно, изменятся, так как в общем случае $\boldsymbol{v}_C \neq \boldsymbol{v}_A$ и $\boldsymbol{w}_C \neq \boldsymbol{w}_A$ (иначе движение тела было бы поступательным). Характеристики же вращательной части движения, т. е. ω и ε, остаются неизменными. В самом деле, проведя из C прямую CB_1, параллельную AB, мы видим, что в любой момент времени угол $\varphi_1 = \varphi - \alpha$, где $\alpha = \text{const}$. Отсюда:

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = \frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

или

$$\omega_1 = \omega, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon.$$

Этот результат виден также из рис. 169: какая бы точка ни была взята за полюс, чтобы привести сечение S из положения I в положение II, надо сделать отрезок A_1B_1 параллельным A_2B_2, т. е. повернуть сечение вокруг любого полюса на один и тот же угол $\Delta\varphi_1$, равный углу между названными отрезками. Следовательно, *вращательная часть движения от выбора полюса не зависит.*

§ 78. Определение траекторий точек тела. Перейдем теперь к изучению движения отдельных точек твердого тела, т. е. к отысканию их траекторий, скоростей и ускорений. Для этого, как было указано, достаточно изучить движение точек тела, лежащих в сечении S. Начнем с определения траекторий.

Рассмотрим точку M тела, положение которой в сечении S определяется расстоянием $b=AM$ от полюса A и углом $BAM=\alpha$ (рис. 171). Если движение тела задано уравнениями (48), то координаты x и y точки M в осях Oxy будут:

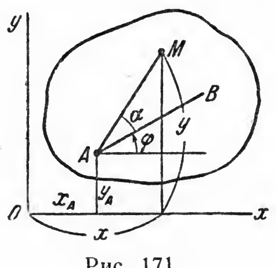


Рис. 171.

$$\left.\begin{aligned} x &= x_A + b\cos(\varphi+\alpha), \\ y &= y_A + b\sin(\varphi+\alpha), \end{aligned}\right\} \qquad (49)$$

где x_A, y_A, φ — известные по уравнениям (48) функции времени t.

Равенства (49), определяющие закон движения точки M в плоскости Oxy, дают одновременно уравнение траектории этой точки в параметрическом виде. Обычное уравнение траектории получим, исключив из системы (49) время t.

Если рассматриваемое тело является звеном какого-нибудь механизма, то для определения траектории любой точки M тела достаточно выразить ее координаты через какой-нибудь параметр, определяющий положение механизма, а затем исключить этот параметр. Уравнения движения (48) при этом знать не обязательно.

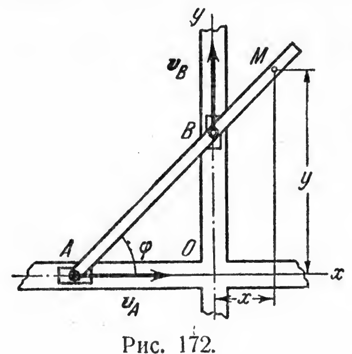


Рис. 172.

Задача 66. Ползуны A и B, к которым прикрепляется линейка эллипсографа, перемещаются по взаимно перпендикулярным направляющим (рис. 172). Расстояние $AB=l$. Определить траекторию точки M линейки.

Решение. Взяв за полюс точку A, будем определять положение точки M на линейке отрезком $AM=b$. Положение самой линейки задается углом φ. Тогда для координат x и y точки M находим: $x=(b-l)\cos\varphi$, $y=b\sin\varphi$. Исключая параметр φ, получаем, что траекторией точки (независимо от закона движения линейки) будет эллипс

$$\frac{x^2}{(b-l)^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

с полуосями $a=|b-l|$ и b и с центром в точке O.

Меняя с помощью соответствующих винтов расстояния l и b, мы можем вычертить карандашом M эллипс с любыми заданными полуосями, не превосходящими размеров линейки. Отсюда и название механизма — эллипсограф.

§ 79. Определение скоростей точек тела. Плоскопараллельное движение твердого тела слагается из поступательного движения, при котором все точки тела движутся со скоростью полюса $\boldsymbol{v}_A$, и из вращательного движения вокруг этого полюса. Покажем, что скорость любой точки M тела складывается геометрически из скоростей, которые она получает в каждом из этих движений.

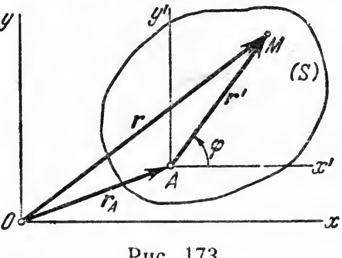


Рис. 173.

В самом деле, положение любой точки M, лежащей в сечении (S) тела, определяется по отношению к осям Oxy радиусом-вектором $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_A+\boldsymbol{r}'$ (рис. 173), где $\boldsymbol{r}_A$ — радиус-вектор полюса A, $\boldsymbol{r}'=\overline{AM}$ — вектор, определяющий положение точки M относительно осей $Ax'y'$, перемещающихся вместе с полюсом A поступательно [движение сечения (S) по отношению к этим осям представляет собою вращение вокруг полюса A]. Тогда

$$\boldsymbol{v}_M=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{r}_A}{dt}+\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt}.$$

В полученном равенстве величина $\frac{d\boldsymbol{r}_A}{dt}=\boldsymbol{v}_A$ есть скорость полюса A; величина же $\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt}$ равна скорости $\boldsymbol{v}_{MA}$, которую точка M получает при $\boldsymbol{r}_A=\text{const}$, т. е. относительно осей $Ax'y'$ или, иначе говоря, *при вращении тела вокруг полюса* A. Таким образом, из предыдущего равенства действительно следует, что

$$\boldsymbol{v}_M=\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{v}_{MA}. \tag{50}$$

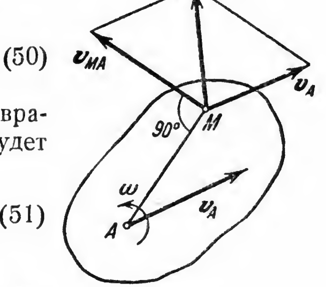


Рис. 174.

При этом скорость $\boldsymbol{v}_{MA}$ точки M во вращательном движении вокруг полюса A будет (§ 76):

$$v_{MA}=\omega\cdot MA \quad (\boldsymbol{v}_{MA}\perp \overline{MA}), \tag{51}$$

где ω — угловая скорость вращения тела.

Таким образом, *скорость любой точки M тела геометрически складывается из скорости какой-нибудь другой точки A, принятой за полюс, и скорости точки M в ее вращении вместе с телом вокруг этого полюса.* Модуль и направление скорости $\boldsymbol{v}_M$ находятся построением соответствующего параллелограмма (рис. 174).

Задача 67. Найти скорость точки M обода колеса, катящегося по прямолинейному рельсу без скольжения (рис. 175), если скорость центра C колеса равна v_C, а угол $DKM = \alpha$.

Решение. Беря точку C, скорость которой известна, за полюс, найдем, что $\boldsymbol{v}_M = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_{MC}$, где $v_{MC} \perp \overline{CM}$, и по модулю $v_{MC} = \omega \cdot MC = \omega R$ (R — радиус колеса). Величину угловой скорости ω найдем из условия того, что точка K колеса не скользит по рельсу и, следовательно, в данный момент $v_K = 0$. С другой стороны, так же, как и для точки M, $\boldsymbol{v}_K = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_{KC}$, где $v_{KC} = \omega \cdot KC = \omega R$. Так как для точки K $\boldsymbol{v}_{KC}$ и $\boldsymbol{v}_C$ направлены вдоль одной прямой, то при $v_K = 0$ будет $v_{KC} = v_C$, откуда $\omega = \dfrac{v_C}{R}$. В результате находим, что

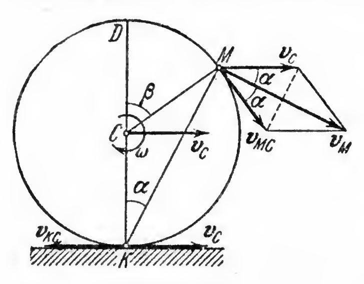


Рис. 175.

$$v_{MC} = \omega R = v_C.$$

Параллелограмм, построенный на векторах $\boldsymbol{v}_{MC}$ и $\boldsymbol{v}_C$, будет при этом ромбом. Но угол между $\boldsymbol{v}_C$ и $\boldsymbol{v}_{MC}$ равен β, так как стороны, образующие эти углы, взаимно перпендикулярны. В свою очередь угол $\beta = 2\alpha$, как центральный угол, опирающийся на ту же дугу, что и вписанный угол α. Тогда по свойствам ромба углы между $\boldsymbol{v}_C$ и $\boldsymbol{v}_M$ и между $\boldsymbol{v}_{MC}$ и $\boldsymbol{v}_M$ тоже равны α. Окончательно, так как диагонали ромба взаимно перпендикулярны, получим

$$v_M = 2v_C \cos\alpha \text{ и } \boldsymbol{v}_M \perp \overline{KM}.$$

Расчет, как видим, оказывается достаточно громоздким. В дальнейшем мы познакомимся с методами, позволяющими решать аналогичные задачи гораздо проще (см. задачу 69 в § 82).

§ 80. Теорема о проекциях скоростей двух точек тела. Определение скоростей точек тела с помощью формулы (50) связано обычно с довольно сложными расчетами (см. задачу 67). Однако, исходя из этого основного результата, можно получить ряд других, практически более удобных и простых методов определения скоростей точек тела.

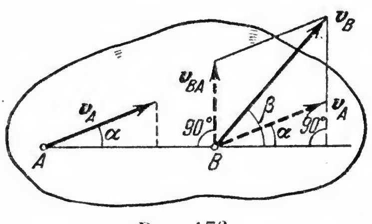


Рис. 176.

Один из таких методов дает теорема: *проекции скоростей двух точек твердого тела на прямую, соединяющую эти точки, равны друг другу.*

Рассмотрим какие-нибудь две точки A и B тела. Принимая точку A за полюс (рис. 176), получаем по формуле (50), что $\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{BA}$. Отсюда, проектируя обе части равенства на линию AB и учитывая, что вектор $\boldsymbol{v}_{BA}$ перпендикулярен к AB, находим:

$$v_B \cos\beta = v_A \cos\alpha, \tag{52}$$

и теорема доказана. Этот результат позволяет легко находить скорость данной точки тела, если известны направление движения этой точки и скорость какой-нибудь другой точки того же тела.

Задача 68. Найти зависимость между скоростями точек A и B линейки эллипсографа (см. рис. 172) при данном угле φ.

Решение. Направления скоростей точек A и B известны. Тогда, проектируя векторы $\boldsymbol{v}_A$ и $\boldsymbol{v}_B$ на линию AB, согласно доказанной теореме получим:

$$v_A \cos\varphi = v_B \cos(90° - \varphi),$$

откуда

$$v_A = v_B \operatorname{tg}\varphi.$$

§ 81. Определение скоростей точек тела с помощью мгновенного центра скоростей. Понятие о центроидах. Другой простой и наглядный метод определения скоростей точек тела при плоскопараллельном движении основан на понятии о мгновенном центре скоростей.

Мгновенным центром скоростей называется точка сечения S тела, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Легко убедиться, что если тело движется непоступательно, то такая точка в каждый момент времени t существует и притом единственная. Пусть в момент времени t точки A и B тела, лежащие в сечении S, имеют скорости $\boldsymbol{v}_A$ и $\boldsymbol{v}_B$, не параллельные друг другу (рис. 177). Тогда точка P, лежащая на пересечении перпендикуляров Aa к вектору $\boldsymbol{v}_A$ и Bb к вектору $\boldsymbol{v}_B$, и будет мгновенным центром скоростей, так как $\boldsymbol{v}_P = 0$ [1]). В самом деле, если допустить, что $\boldsymbol{v}_P \neq 0$, то по теореме о проекциях скоростей точек тела вектор $\boldsymbol{v}_P$ должен быть одновременно перпендикулярен и к AP (так как $\boldsymbol{v}_A \perp AP$) и к BP (так как $\boldsymbol{v}_B \perp BP$), что невозможно. Из той же теоремы видно, что никакая другая точка сечения S в этот момент времени не может иметь скорость, равную нулю (например, для точки a проекция $\boldsymbol{v}_B$ на линию Ba не равна нулю и, следовательно, $\boldsymbol{v}_a \neq 0$ и т. д.).

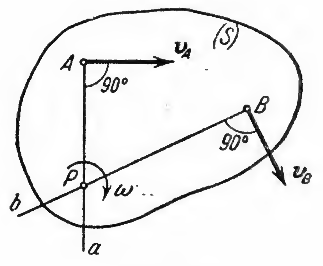


Рис. 177.

Если теперь в момент времени t взять точку P за полюс, то по формуле (50) скорость точки A будет равна

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_P + \boldsymbol{v}_{AP} = \boldsymbol{v}_{AP},$$

так как $\boldsymbol{v}_P = 0$. Аналогичный результат получается для любой другой точки тела. Следовательно, *скорость любой точки тела, лежащей*

[1]) Размеры сечения S всегда можно представлять себе такими, что точка P будет принадлежать этому сечению (см. ниже пример и рис. 178).

в сечении S, равна ее вращательной скорости вокруг мгновенного центра скоростей P. При этом согласно соотношениям (51)

$$v_A = \omega \cdot PA \qquad (\boldsymbol{v}_A \perp \overline{PA});$$
$$v_B = \omega \cdot PB \qquad (\boldsymbol{v}_B \perp \overline{PB}) \text{ и т. д.} \tag{53}$$

Из равенств (53) следует также, что

$$\frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB}, \tag{54}$$

т. е. что *скорости точек тела пропорциональны их расстояниям до мгновенного центра скоростей.*

Полученные результаты приводят к следующим выводам.

1) *Для определения мгновенного центра скоростей надо знать только направления скоростей $\boldsymbol{v}_A$ и $\boldsymbol{v}_B$ каких-нибудь двух точек A и B сечения тела* (или траектории этих точек); мгновенный центр скоростей находится в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из точек A и B к скоростям этих точек (или к касательным к траекториям).

2) *Для определения скорости любой точки тела надо знать модуль и направление скорости какой-нибудь одной точки A тела и направление скорости другой его точки B.* Тогда, восстановив из точек A и B перпендикуляры к $\boldsymbol{v}_A$ и $\boldsymbol{v}_B$, мы построим мгновенный центр скоростей P и по направлению $\boldsymbol{v}_A$ определим направление поворота тела. После этого, зная v_A, найдем по формуле (54) скорость $\boldsymbol{v}_M$ любой точки M тела. Направлен вектор $\boldsymbol{v}_M$ перпендикулярно $\overline{PM}$ в сторону поворота тела.

3) *Угловая скорость тела,* как видно из формул (53), *равна в каждый данный момент времени отношению скорости какой-нибудь точки сечения S к ее расстоянию от мгновенного центра P:*

$$\omega = \frac{v_B}{PB}. \tag{55}$$

Найдем еще другое выражение для ω. Из равенств (50) и (51) следует, что $v_{BA} = |\boldsymbol{v}_B - \boldsymbol{v}_A|$ и $v_{BA} = \omega \cdot AB$, откуда

$$\omega = \frac{|\boldsymbol{v}_B - \boldsymbol{v}_A|}{AB} = \frac{|\boldsymbol{v}_B + (-\boldsymbol{v}_A)|}{AB}. \tag{56}$$

Когда $v_A = 0$ (точка A — мгновенный центр скоростей), формула (56) переходит в (55).

Равенства (55) и (56) определяют одну и ту же величину, так как по доказанному (§ 77) поворот сечения S вокруг точки A или точки P происходит с одной и той же угловой скоростью ω.

Пример. Для линейки AD эллипсографа (рис. 178) направления скоростей точек A и B известны. Восстанавливая к ним перпендикуляры, найдем мгновенный центр скоростей P линейки (эллипсограф можно представить себе в виде листа фанеры $Л$, прикрепленного шарнирно к ползунам A и B, а линейку AD — нарисованной на этом листе; точка P, принадлежащая листу, и имеет скорость $v_P = 0$).

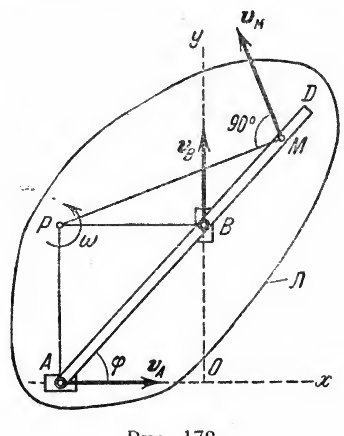


Рис. 178.

Зная P, из пропорции $\frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB}$ получим $v_A = v_B \frac{PA}{PB} = v_B \operatorname{tg} \varphi$, т. е. тот же результат, что и в задаче 68. Для точки M аналогично найдем, что $v_M = v_B \frac{PM}{PB}$. Длину PM можно вычислить, зная AB, AM и угол φ. Направление вектора v_M показано на чертеже ($v_M \perp PM$).

Для угловой скорости линейки по формулам (55) или (56) находим

$$\omega = \frac{v_B}{PB} \text{ или } \omega = \frac{|v_B - v_A|}{AB}.$$

Легко проверить, что обе формулы дают один и тот же результат.

Рассмотрим некоторые частные случаи определения мгновенного центра скоростей.

а) Если плоскопараллельное движение осуществляется путем качения без скольжения одного цилиндрического тела по поверхности другого, причем второе тело неподвижно, то точка касания P (для сечения, изображенного на рис. 179) имеет в данный момент времени скорость, равную нулю, и, следовательно, является мгновенным центром скоростей ($v_P = 0$, так как точки касания обоих тел при отсутствии скольжения должны иметь одинаковые скорости, а между тем второе тело неподвижно). Примером служит качение колеса по рельсу.

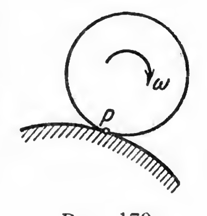


Рис. 179.

б) Если скорости точек A и B тела параллельны друг другу, причем линия AB не перпендикулярна к v_A (рис. 180, *а*), то мгновенный центр скоростей лежит в бесконечности и скорости всех точек параллельны v_A. При этом из теоремы о проекциях скоростей следует, что $v_A \cos \alpha = v_B \cos \beta$, т. е. $v_B = v_A$; аналогичный результат получается для всех других точек тела. Следовательно, в рассматриваемом случае скорости всех точек тела в данный момент времени равны друг другу и по модулю, и по направлению, т. е. тело имеет *мгновенное поступательное распределение скоростей* (такое состояние движения тела

называют еще *мгновенно поступательным*). Угловая скорость ω тела в этот момент времени, как видно из формулы (56), равна нулю.

в) Если скорости точек A и B тела параллельны друг другу и при этом линия AB перпендикулярна к $\boldsymbol{v}_A$, то мгновенный центр скоростей P определяется построениями, показанными на рис. 180, *б*. Справедливость построений следует из пропорции (54). В этом случае, в отличие от предыдущих, для нахождения центра P надо, кроме направлений, знать еще и модули скоростей v_A и v_B.

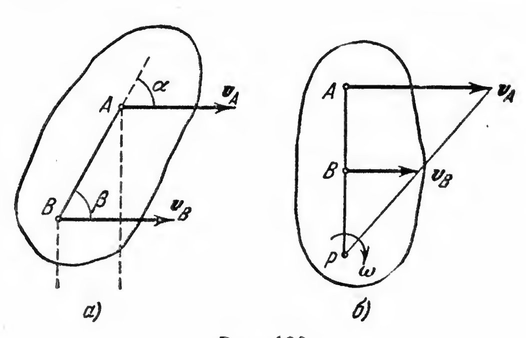


Рис. 180.

г) Если известен вектор скорости $\boldsymbol{v}_B$ какой-нибудь точки сечения S и угловая скорость ω, то положение мгновенного центра скоростей P, лежащего на перпендикуляре к $\boldsymbol{v}_B$ (см. рис. 177), можно найти из равенства (55), которое дает $BP = v_B/\omega$.

Мгновенный центр вращения и центроиды. Из рис. 177 и 180, *б* и из формул (53), (54) видно, что скорости точек сечения S распределены в каждый момент времени так, как если бы движение данного сечения представляло собою вращение вокруг центра P. По этой причине точку неподвижной плоскости, совпадающую с мгновенным центром скоростей, которую мы также будем обозначать буквой P, называют ***мгновенным центром вращения***, а ось Pz, перпендикулярную к сечению S и проходящую через точку P, — ***мгновенной осью вращения*** тела, совершающего плоскопараллельное движение. От неподвижной оси (или центра) вращения мгновенная ось (или центр) отличаются тем, что они все время меняют свое положение. В § 77 было установлено, что плоскопараллельное движение слагается из поступательного движения вместе с каким-то фиксированным полюсом и вращательного движения вокруг этого полюса. Полученный результат позволяет дать другую геометрическую картину плоского движения, а именно: *плоскопараллельное движение слагается из серии последовательных элементарных поворотов вокруг непрерывно меняющих свое положение мгновенных осей (или центров) вращения.*

Например, качение колеса, изображенного на рис. 183, можно представлять себе или как совокупность поступательного движения вместе с полюсом C и вращения вокруг этого полюса, или же как серию элементарных поворотов вокруг непрерывно изменяющей свое положение точки касания P обода и рельса.

При движении сечения S мгновенный центр P непрерывно изменяет свое положение как на неподвижной плоскости Oxy, так и в самом сечении S (в самом теле). Геометрическое место мгновенных центров вращения, т. е. положений точки P на неподвижной плоскости, называют ***неподвижной центроидой***, а геометрическое место мгновенных центров скоростей, т. е. положений точки P в плоскости, связанной с сечением S и движущейся вместе с ним, — ***подвижной центроидой*** (рис. 181). В данный момент обе центроиды

касаются друг друга в точке P, являющейся для этого момента мгновенным центром вращения (или скоростей); пересекаться центроиды не могут, так как тогда в данный момент существовало бы больше одного мгновенного центра, что невозможно. В следующий момент будут соприкасаться точки P_1' подвижной и P_1 неподвижной центроид, и эта точка будет для следующего момента мгновенным центром вращения и т. д. Отсюда, поскольку положение мгновенного центра P изменяется непрерывно и в каждый данный момент времени $v_P = 0$, можно заключить, что при плоскопараллельном движении происходит качение без скольжения подвижной центроиды по неподвижной. Наоборот, если материально осуществить обе центроиды, то геометрическую картину движения сечения S можно получить, скрепив его с подвижной центроидой и катя эту центроиду без скольжения по неподвижной.

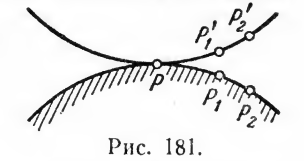


Рис. 181.

Легко видеть, что для колеса, изображенного на рис. 183, ось Ox является неподвижной центроидой, а окружность $PEDK$ — подвижной. Качением без скольжения подвижной центроиды по неподвижной и осуществляется движение колеса.

Пример. Для линейки AB эллипсографа (рис. 182) мгновенный центр вращения находится в точке P. Поскольку расстояние $PO = AB = l$ в любой момент времени, то геометрическим местом точек P в плоскости Oxy, т. е. неподвижной центроидой, будет окружность радиуса l с центром в O. Но одновременно, если линейку AB представить нарисованной на листе фанеры $Л$, то расстояние $PC = l/2$ центра P от точки C линейки будет тоже все время постоянным. Следовательно, геометрическим местом точек P на листе $Л$, т. е. подвижной центроидой, будет окружность радиуса $l/2$ с центром в точке C. При движении эллипсографа окружность *2* катится без скольжения по окружности *1* и точка их касания в каждый момент будет мгновенным центром вращения. Наоборот, если окружности *1* и *2* осуществить материально (в виде шестерен) и катить одну по другой (неподвижной) без скольжения, то при этом диаметр AB окружности *2* воспроизведет движение линейки эллипсографа.

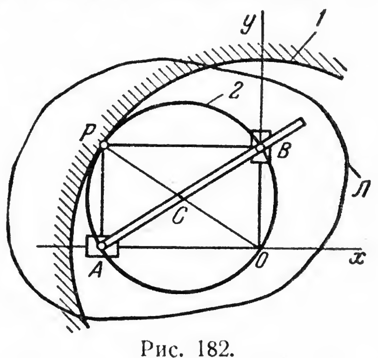


Рис. 182.

§ 82. Решение задач[1]. Для определения кинематических характеристик движения (угловой скорости тела или скоростей его точек) надо знать модуль и направление скорости какой-нибудь одной точки и направление скорости другой точки тела [кроме случаев а) и в), рассмотренных в конце § 81]. С определения этих характеристик по данным задачи и следует начинать решение.

Механизм, движение которого исследуется, надо изображать на чертеже в том положении, для которого требуется определить соответствующие характеристики. При расчете следует помнить,

[1]) Пример применения рассматриваемых здесь методов расчета дан еще в § 95 (задача 90).

что понятие о мгновенном центре скоростей имеет место для данного твердого тела. *В механизме, состоящем из нескольких тел, каждое непоступательно движущееся тело имеет в данный момент времени свой мгновенный центр скоростей и свою угловую скорость.*

Задача 69. Определить скорость точки M обода катящегося колеса (см. задачу 67) с помощью мгновенного центра скоростей.

Решение. Точка касания колеса P (рис. 183) является мгновенным центром скоростей, так как $v_P = 0$. Следовательно, $v_M \perp PM$. Так как прямой угол PMD опирается на диаметр, то вектор скорости v_M любой точки обода проходит через точку D. Составляя пропорцию

$$\frac{v_M}{PM} = \frac{v_C}{PC}$$

и замечая, что $PC = R$, а $PM = 2R \cos \alpha$, находим

$$v_M = 2v_C \cos \alpha.$$

Чем точка M дальше от P, тем ее скорость больше; наибольшую скорость $v_D = 2v_C$ имеет верхний конец D вертикального диаметра. Угловая скорость колеса согласно формуле (55) равна:

$$\omega = \frac{v_C}{PC} = \frac{v_C}{R}.$$

Аналогичная картина распределения скоростей имеет место при качении колеса или шестерни по любой цилиндрической поверхности (см. рис. 179).

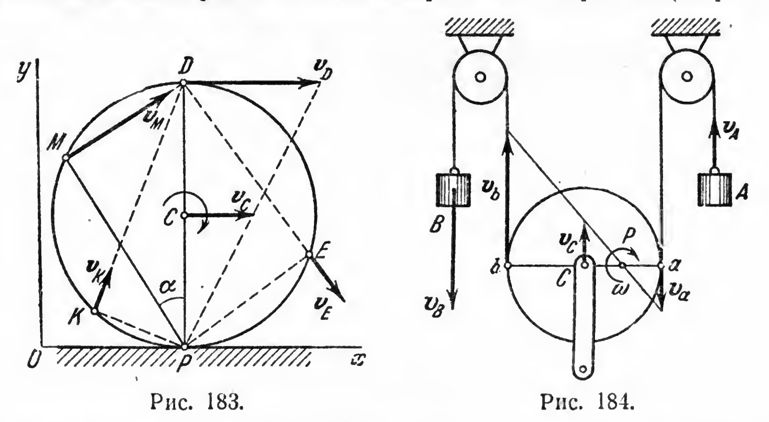


Рис. 183. Рис. 184.

Задача 70. Определить скорость центра C подвижного блока радиуса r и его угловую скорость ω (рис. 184), если груз A поднимается со скоростью v_A, а груз B опускается со скоростью v_B. Нить при своем движении по подвижному блоку не проскальзывает, а ее ветви вертикальны.

Решение. Так как нить по подвижному блоку не проскальзывает, то скорости точек a и b блока равны по модулю скоростям грузов, т. е. $v_a = v_A$ и $v_b = v_B$. Зная скорости точек a и b и полагая для определенности,

что $v_B > v_A$, находим положение мгновенного центра скоростей P подвижного блока таким же приемом, как и в случае, показанном на рис. 180, *б*. Скорость центра блока C изображается вектором $\boldsymbol{v}_C$. Для определения модуля v_C и угловой скорости ω подвижного блока составляем, пользуясь формулой (56), равенства

$$\omega = \frac{|\boldsymbol{v}_b + (-\boldsymbol{v}_a)|}{ab}, \quad \omega = \frac{|\boldsymbol{v}_b - \boldsymbol{v}_C|}{bC}.$$

Отсюда, так как $ab = 2r$, $bC = r$, находим:

$$\omega = \frac{v_B + v_A}{2r}, \quad v_C = \frac{v_B - v_A}{2}.$$

При $v_B > v_A$ центр C блока поднимается; если $v_B < v_A$ — он будет опускаться. При $v_B = v_A$ получим $v_C = 0$.

Для случая, когда оба груза A и B опускаются, значения ω и v_C найдем, заменив в полученных формулах v_A на $-v_A$.

Задача 71. В кривошипно-шатунном механизме (рис. 185) кривошип OA длиною r вращается с угловой скоростью ω_{OA}. Длина шатуна $AB = l$. При данном угле φ определить: 1) скорость ползуна B; 2) положение точки M шатуна AB, имеющей наименьшую скорость; 3) угловую скорость ω_{AB} шатуна. Рассмотреть дополнительно положения механизма при $\varphi = 0$ и $\varphi = 90°$.

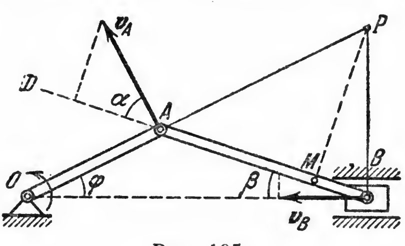


Рис. 185.

Решение. Из данных задачи следует, что точка A имеет скорость $v_A = \omega_{OA} r$, направленную перпендикулярно к OA, а скорость точки B направлена вдоль линии BO. Этих данных достаточно для определения всех кинематических характеристик шатуна AB.

1) По теореме о проекциях скоростей имеем $v_A \cos\alpha = v_B \cos\beta$. Угол OAD, как внешний угол треугольника OAB, равен $\varphi + \beta$. Отсюда $\alpha = 90° - (\varphi + \beta)$ и

$$v_B = \omega_{OA} r \frac{\sin(\varphi + \beta)}{\cos\beta} = \omega_{OA} r (\sin\varphi + \cos\varphi \operatorname{tg}\beta).$$

Исключим из этого равенства угол β. Из треугольника OAB

$$\frac{\sin\beta}{r} = \frac{\sin\varphi}{l}.$$

Кроме того, имеем:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\sqrt{1 - \sin^2\beta}}.$$

В результате находим:

$$v_B = \omega_{OA} r \left(1 + \frac{r\cos\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2\varphi}}\right) \sin\varphi.$$

2) Восстанавливая перпендикуляры к скоростям в точках A и B, определяем мгновенный центр скоростей P для шатуна AB (линия AP является продолжением OA). Наименьшую скорость имеет точка M, ближе всего

расположенная к центру P, т. е. лежащая на перпендикуляре PM к AB. Скорость этой точки

$$v_M = v_A \cos\alpha = \omega_{OA} r \sin(\varphi + \beta).$$

3) Угловая скорость шатуна AB согласно формуле (55) равна

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{PA} \quad \text{или} \quad \omega_{AB} = \frac{v_B}{PB}.$$

Длина PB (или PA) вычисляется по данным задачи.

4) При угле $\varphi = 0$ (рис. 186, *а*) перпендикуляр AB к скорости $\boldsymbol{v}_A$ и перпендикуляр Bb к направлению $\boldsymbol{v}_B$ пересекаются в точке B. Следовательно, точка B является в этом положении мгновенным центром скоростей и $v_B = 0$ («мертвое» положение механизма). Для этого положения

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AB} = \frac{r}{l}\omega_{OA}.$$

Распределение скоростей точек шатуна AB показано на чертеже.

5) При угле $\varphi = 90°$ (рис. 186, *б*) скорости $\boldsymbol{v}_A$ и $\boldsymbol{v}_B$ направлены параллельно и перпендикуляры к ним пересекаются в бесконечности. Следовательно, в этот момент времени все точки шатуна AB имеют одинаковые скорости, равные $\boldsymbol{v}_A$; $\omega_{AB} = 0$.

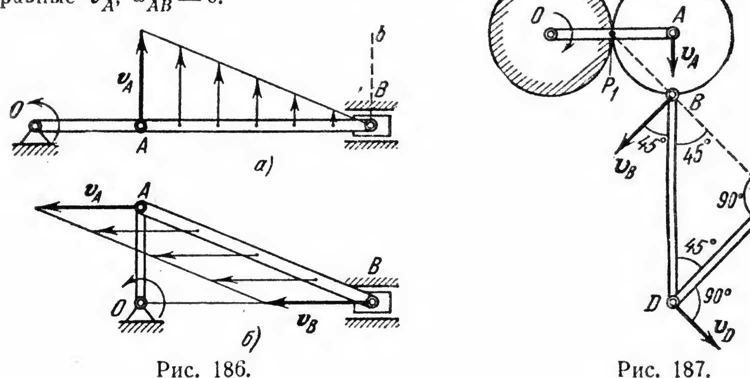


Рис. 186. Рис. 187.

Задача 72. Кривошип OA (рис. 187), вращающийся вокруг оси O с угловой скоростью ω_{OA}, несет на себе ось подвижной шестерни *1*, катящейся по неподвижной шестерне *2*. Радиусы шестерен одинаковы и равны r. К шестерне *1* шарнирно прикреплен шатун BD длиной l, соединенный с коромыслом DC. Определить угловую скорость ω_{BD} шатуна в момент, когда он перпендикулярен к кривошипу OA, если в этот момент $\angle BDC = 45°$.

Решение. Для определения ω_{BD} надо знать скорость какой-нибудь точки шатуна BD и положение его мгновенного центра скоростей. Найдем скорость точки B, пользуясь тем, что она одновременно принадлежит шестерне *1*. Для шестерни *1* известна скорость $v_A = \omega_{OA} 2r$ ($\boldsymbol{v}_A \perp OA$) и мгновенный центр скоростей P_1. Следовательно, $\boldsymbol{v}_B \perp P_1B$ и по теореме о проекциях скоростей $v_B \cos 45° = v_A$, откуда $v_B = v_A\sqrt{2} = 2r\omega_{OA}\sqrt{2}$.

Теперь для шатуна BD известны скорость $\boldsymbol{v}_B$ и направление скорости $\boldsymbol{v}_D$ ($\boldsymbol{v}_D \perp DC$). Восстанавливая перпендикуляры к $\boldsymbol{v}_B$ и $\boldsymbol{v}_D$, найдем мгновенный

центр скоростей P_{BD} шатуна. При этом, как легко видеть, отрезок

$$BP_{BD} = l\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Тогда

$$\omega_{BD} = \frac{v_B}{BP_{BD}} = 4\frac{r}{l}\omega_{OA}.$$

Заметим, что нельзя пытаться искать мгновенный центр скоростей, восстанавливая перпендикуляры к векторам скоростей $\boldsymbol{v}_A$ и $\boldsymbol{v}_D$. Точки A и D принадлежат разным телам и пересечение указанных перпендикуляров никакого центра скоростей не дает (сравн. с задачей 73).

Задача 73. На ось O (рис. 188) независимо друг от друга насажены шестерня *1* и кривошип OA, вращающийся с угловой скоростью ω_{OA}. Кривошип несет ось A шестерни *2*, наглухо скрепленной с шатуном AB, проходящим через качающуюся муфту C. Радиусы шестерен *1* и *2* одинаковы. Определить угловую скорость ω_1 шестерни *1* в момент, когда $OA \perp OC$, если при этом $\angle ACO = 30°$.

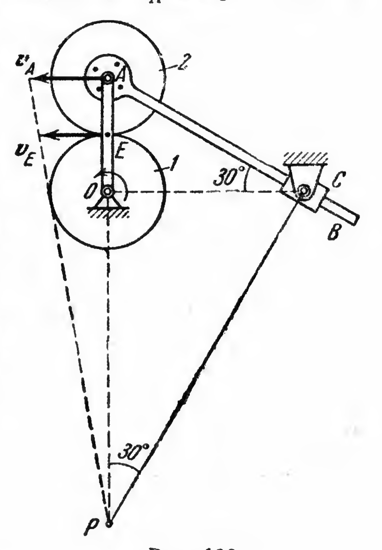


Рис. 188.

Решение. Для определения угловой скорости ω_1 шестерни *1* надо найти линейную скорость ее точки E. Эту скорость найдем, пользуясь тем, что такую же скорость имеет точка E шестерни *2*. Для шестерни *2* известны направление и модуль скорости точки A:

$$\boldsymbol{v}_A \perp OA, \quad v_A = \omega_{OA} \cdot 2r$$

(r — радиус шестерни).

Кроме того, мы знаем направление скорости $\boldsymbol{v}_E$, но в данном случае этого недостаточно, так как $\boldsymbol{v}_E \parallel \boldsymbol{v}_A$. По теореме проекций значение v_E также не найдется, так как $\boldsymbol{v}_A$ и $\boldsymbol{v}_E$ перпендикулярны к AE.

Поэтому для дальнейшего решения воспользуемся тем, что шестерня *2* и шатун AB образуют одно тело (они склепаны). Для этого тела мы знаем направление скорости точки C: вектор $\boldsymbol{v}_C$ (на рис. не показан) направлен вдоль CA, так как в точке C шатун может только проскальзывать вдоль муфты. Восстанавливая перпендикуляры к $\boldsymbol{v}_A$ и $\boldsymbol{v}_C$, находим мгновенный центр скоростей P тела BAE.

По данным задачи $\angle ACO = 30°$, откуда и $\angle CPA = 30°$. Поэтому

$$AC = 2 \cdot AO = 4r, \quad PA = 2 \cdot AC = 8r, \quad PE = 7r,$$

Тогда из пропорции

$$\frac{v_E}{PE} = \frac{v_A}{PA}$$

находим, что $v_E = \frac{7}{8}v_A = \frac{7}{4}r\omega_{OA}$. Отсюда

$$\omega_1 = \frac{v_E}{OE} = \frac{7}{4}\omega_{OA}.$$

§ 83*. План скоростей. Скорости точек тела можно определять графически, построением плана скоростей. *Планом скоростей* называется диаграмма, на которой от некоторого центра отложены векторы скоростей точек тела.

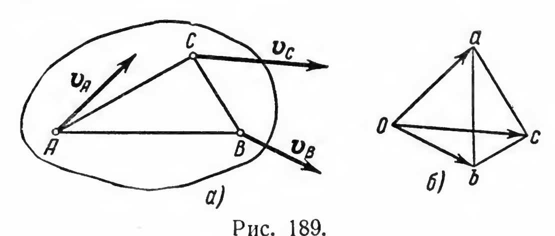


Рис. 189.

Пусть $\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{v}_B$, $\boldsymbol{v}_C$ — скорости точек A, B, C данного тела (рис. 189, *а*). Тогда соответствующий план скоростей получим, отложив от некоторого центра O (рис. 189, *б*) в выбранном масштабе отрезки

$$\overline{Oa} = \boldsymbol{v}_A, \quad \overline{Ob} = \boldsymbol{v}_B, \quad \overline{Oc} = \boldsymbol{v}_C.$$

Установим свойства и правила построения плана скоростей. По формулам (50) и (51) (см. § 79) имеем:

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{BA}, \tag{57}$$

где

$$\boldsymbol{v}_{BA} \perp AB \text{ и } v_{BA} = \omega \cdot AB. \tag{57'}$$

Но из треугольника Oab видно, что $\overline{Ob} = \overline{Oa} + \overline{ab}$ или $\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \overline{ab}$. Сравнивая этот результат с равенством (57), получаем $\overline{ab} = \boldsymbol{v}_{BA}$. Аналогично найдем, что $\overline{ac} = \boldsymbol{v}_{CA}$ и т. д. Тогда по формулам (57′)

$$ab \perp AB, \quad ac \perp AC \text{ и т. д.} \tag{58}$$

Кроме того, по тем же формулам $ab = \omega \cdot AB$, $ac = \omega \cdot AC$ и т. д., откуда

$$\frac{ab}{AB} = \frac{ac}{AC} = \frac{bc}{BC} = \ldots = \omega. \tag{58'}$$

Следовательно, *отрезки, соединяющие концы векторов скоростей на плане скоростей, перпендикулярны отрезкам, соединяющим соответствующие точки тела, и по модулю пропорциональны этим отрезкам;* фигуры, обозначенные на плане скоростей и в сечении (S) тела одинаковыми буквами, будут при этом подобны и повернуты одна относительно другой на 90°.

Соотношения (58) и (58′) позволяют построить план скоростей и определить скорость любой точки тела, если известны модуль и направление скорости какой-нибудь одной точки и направление скорости другой точки этого тела.

Угловая скорость тела, если известен план скоростей, находится по формуле (58').

План скоростей механизма строится как совокупность планов скоростей отдельных его звеньев (тел), причем все векторы скоростей откладываются от общего центра O. Пример построения дан в задаче 74.

Задача 74. Построить план скоростей механизма (рис. 190, *а*) для положения, изображенного на чертеже, если скорость v_A конца кривошипа $O'A$ известна. Шатун ABC выполнен в виде жесткой треугольной пластины. Кривошип $O''D$ соединен в точке D шарниром с серединой стержня CE $(CD = DE)$.

Решение. 1) Выбрав масштаб длин (например: 1 *см* → 0,1 *м*), изображаем механизм в данном его положении (рис. 190, *а*).

2) Определение v_B. Выбираем масштаб скоростей (например, в 1 *см* 0,5 *м/сек*) и откладываем в этом масштабе от некоторого центра O вектор $\overline{Oa} = v_A$, направленный перпендикулярно к $O'A$ (рис. 190, *б*). Из того же центра проводим прямую Ob, параллельную v_B (скорость v_B направлена по линии BO'), а из точки a — прямую $ab \perp AB$ до пересечения с линией Ob. Тогда, согласно (58), точка b и даст конец вектора $\overline{Ob} = v_B$.

3) Определение v_C. Из точки a проводим прямую, перпендикулярную AC, а из точки b — прямую, перпендикулярную BC. Пересечение этих перпендикуляров дает, согласно (58), точку c. Соединяя точки O и c, находим вектор $\overline{Oc} = v_C$.

Рис. 190.

4) Определение v_D. Направление v_D известно ($v_D \perp O''D$). Проведя из центра O прямую Od, параллельную v_D, а из точки c — линию, перпендикулярную CD, найдем в пересечении точку d. Соединяя точки O и d, получаем вектор $\overline{Od} = v_D$.

5) Определение v_E. Точка E механизма лежит на прямой CDE; следовательно, по свойству подобия, точка e на плане скоростей также должна лежать на прямой cde. При этом согласно (58') должно быть $cd : de = CD : DE$. Так как $DE = CD$, то, откладывая на продолжении cd отрезок $de = cd$, найдем точку e. Соединяя точки O и e, получим вектор $\overline{Oe} = v_E$.

Примечание. Соотношения (58) справедливы *только* для данного твердого тела. Поэтому, например, отрезок be на плане скоростей не будет перпендикулярен к BE, так как точки B и E механизма принадлежат разным твердым телам.

Угловые скорости шатунов ABC и CE в данный момент времени вычисляются согласно равенству (58') по формулам (при вычислении всех величин следует учитывать масштабы):

$$\omega_{ABC} = \frac{ab}{AB}, \quad \omega_{CE} = \frac{cd}{CD}.$$

§ 84. Определение ускорений точек тела. Покажем, что ускорение любой точки M тела при плоскопараллельном движении (так же, как и скорость) складывается из ускорений, которые она получает в поступательном и во вращательном движениях этого тела. Положение точки M по отношению к осям Oxy (см. рис. 173) определяется радиусом-вектором $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{r}'$, где $\boldsymbol{r}' = \overline{AM}$. Тогда

$$\boldsymbol{w}_M = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \frac{d^2\boldsymbol{r}_A}{dt^2} + \frac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt^2}.$$

В полученном равенстве величина $\frac{d^2\boldsymbol{r}_A}{dt^2} = \boldsymbol{w}_A$ равна ускорению полюса A, а величина $\frac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt^2} = \boldsymbol{w}_{MA}$ определяет ускорение, получаемое точкой M при ее вращении вместе с телом вокруг полюса A (см. § 79). Следовательно,

$$\boldsymbol{w}_M = \boldsymbol{w}_A + \boldsymbol{w}_{MA}. \tag{59}$$

При этом для ускорения $\boldsymbol{w}_{MA}$ точки M во вращательном движении вокруг полюса A по формулам (46) и (47) (см. § 76) будет:

$$w_{MA} = MA\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad \operatorname{tg}\mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}, \tag{60}$$

где ω и ε — угловая скорость и угловое ускорение тела [1]), а μ — угол между направлением $\boldsymbol{w}_{MA}$ и отрезком MA.

Таким образом, *ускорение любой точки M тела геометрически складывается из ускорения какой-нибудь другой точки, принятой за полюс, и ускорения точки M в ее вращении вместе с телом вокруг этого полюса.* Модуль и направление ускорения $\boldsymbol{w}_M$ находятся построением соответствующего параллелограмма (рис. 191).

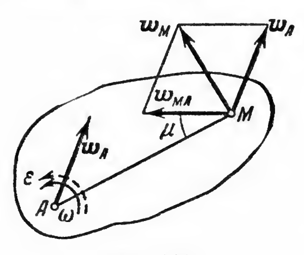


Рис. 191.

Однако вычисление величины $\boldsymbol{w}_M$ с помощью изображенного на рис. 191 параллелограмма несколько усложняет расчет, так как предварительно надо будет вычислять угол μ, а затем угол между векторами $\boldsymbol{w}_{MA}$ и $\boldsymbol{w}_A$. Поэтому при решении задач удобнее вектор $\boldsymbol{w}_{MA}$ заменять его касательной ($\boldsymbol{w}_{MA}^{\tau}$) и нормальной ($\boldsymbol{w}_{MA}^{n}$) составляющими, где

$$w_{MA}^{\tau} = AM\cdot\varepsilon, \quad w_{MA}^{n} = AM\cdot\omega^2. \tag{61}$$

[1]) На чертеже сплошная дуговая стрелка показывает направление ω (направление вращения), а пунктирная — направление (знак) ε. При ускоренном вращении обе стрелки будут направлены в одну сторону, при замедленном — в разные.

Вектор w_{MA}^{τ} направлен перпендикулярно AM в сторону вращения, если оно ускоренное, и против вращения, если оно замедленное; вектор w_{MA}^{n} всегда направлен от точки M к полюсу A (рис. 192).

Тогда вместо равенства (59) получим:

$$w_M = w_A + w_{MA}^{\tau} + w_{MA}^{n}. \qquad (62)$$

Если полюс A движется не прямолинейно, то его ускорение будет также слагаться из касательного и нормального и тогда

$$w_M = w_{A\tau} + w_{An} + w_{MA}^{\tau} + w_{MA}^{n}, \qquad (62')$$

причем модули двух последних слагаемых находятся по формулам (61). Формулами (61), (62) и пользуются при решении задач, вычисляя векторы, стоящие в правой части равенства, а затем определяя их геометрическую сумму или производя соответствующие графические построения.

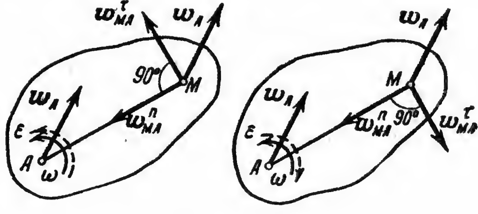


Рис. 192.

Решение задач. Ускорение любой точки тела в данный момент времени можно найти, если известны: 1) векторы скорости v_A и ускорения w_A какой-нибудь точки A тела в этот момент; 2) траектория какой-нибудь другой точки B тела. В ряде случаев вместо траектории второй точки тела достаточно знать положение мгновенного центра скоростей.

Тело (или механизм) при решении задач надо изображать в том положении, для которого требуется определить ускорение соответствующей точки. Расчет начинается с определения по данным задачи скорости и ускорения точки, принимаемой за полюс. Дальнейшие особенности расчета подробно рассматриваются в решенных ниже задачах. Там же даются необходимые дополнительные указания.

В задаче 77 показан графический метод расчета.

Задача 75. Центр O колеса, катящегося по прямолинейному рельсу (рис. 193), имеет в данный момент времени скорость $v_O = 1$ *м/сек* и ускорение $w_O = 2$*м/сек*². Радиус колеса $R = 0,2$ *м*. Определить ускорение точки B — конца перпендикулярного к OP диаметра AB и ускорение точки P, совпадающей с мгновенным центром скоростей.

Решение. 1) Так как v_O и w_O известны, принимаем точку O за полюс.

2) Определение ω. Точка касания P является мгновенным центром скоростей; следовательно, угловая скорость колеса

$$\omega = \frac{v_O}{PO} = \frac{v_O}{R}. \qquad (а)$$

Направление ω определяется направлением v_O и показано на чертеже сплошной стрелкой.

3) Определение ε. Так как в равенстве (а) величина $PO=R$ остается постоянной при любом положении колеса, то, дифференцируя это равенство по времени, получим

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{1}{R}\frac{dv_O}{dt} \text{ или } \varepsilon=\frac{w_O}{R}. \qquad (б)$$

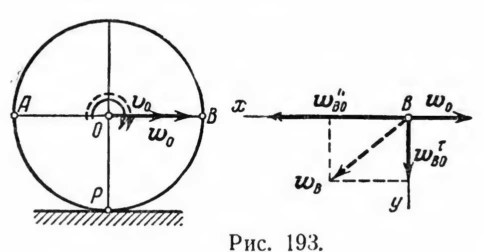


Рис. 193.

Знаки ε и ω совпадают, следовательно, вращение колеса ускоренное.

Важно помнить, что *величина* ε *определяется равенством* (б) *только в том случае, когда расстояние PO в формуле* (а) *постоянно.*

Примечания. а) Не следует думать, что если по условиям задачи $v_O=1$ *м/сек*, то величина v_O постоянна. Значение v_O в задаче указано *в данный момент времени*; с течением времени величина v_O меняется, так как $w_O \neq 0$.

б) В данном случае $\frac{dv_O}{dt}=w_O$, так как движение точки O является прямолинейным. В общем случае $\frac{dv_O}{dt}=w_{O\tau}$.

4) Определение w_{BO}^τ и w_{BO}^n. Так как за полюс взята точка O, то по формуле (62)

$$w_B=w_O+w_{BO}^\tau+w_{BO}^n. \qquad (в)$$

Используя равенства (а) и (б) и учитывая, что в нашем случае $BO=R$, находим:

$$w_{BO}^\tau=BO\cdot\varepsilon=w_O=2 \text{ м/сек}^2, \qquad w_{BO}^n=BO\cdot\omega^2=\frac{v_O^2}{R}=5 \text{ м/сек}^2. \qquad (г)$$

Показав на чертеже точку B отдельно, изображаем (без соблюдения масштаба) векторы, из которых слагается ускорение w_B, а именно: вектор w_O (переносим из точки O), вектор w_{BO}^τ (в сторону вращения, так как оно ускоренное) и вектор w_{BO}^n (всегда от B к полюсу O).

5) Вычисление w_B. Проведя оси Bx и By, находим, что

$$w_{Bx}=w_{BO}^n-w_O=3 \text{ м/сек}^2, \quad w_{By}=w_{BO}^\tau=2 \text{ м/сек}^2,$$

откуда

$$w_B=\sqrt{w_{Bx}^2+w_{By}^2}=\sqrt{13}\approx 3{,}6 \text{ м/сек}^2.$$

Аналогичным путем легко найти, что ускорение точки P $w_P=w_{PO}^n=5$ *м/сек*² и направлено вдоль PO. Таким образом, ускорение точки P, скорость которой в данный момент равна нулю, нулю не равно.

Задача 76. По неподвижной шестерне *1* радиуса $r_1 = 0{,}3$ *м* обкатывается шестерня *2* радиуса $r_2 = 0{,}2$ *м*, насаженная на кривошип *OA* (рис. 194, *а*). Кривошип, вращающийся вокруг оси *O*, имеет в данный момент угловую скорость $\omega = 1$ *1/сек* и угловое ускорение $\varepsilon = -4$ *1/сек²*. Определить в этот момент ускорение точки *D*, лежащей на ободе подвижной шестерни (радиус *AD* перпендикулярен кривошипу).

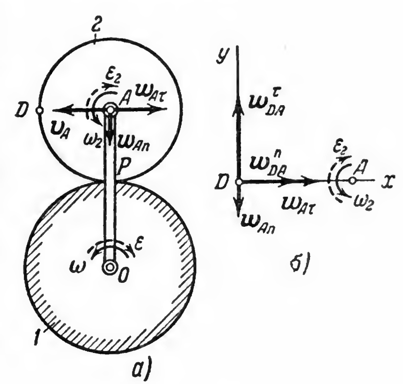


Рис. 194.

Решение. 1) Для решения задачи надо рассмотреть движение шестерни *2*. По данным задачи легко найти скорость $\boldsymbol{v}_A$ и ускорение $\boldsymbol{w}_A$ точки *A* этой шестерни, которую и выбираем за полюс.

2) Определение $\boldsymbol{v}_A$ и $\boldsymbol{w}_A$. Зная ω и ε кривошипа, находим:

$$v_A = OA \cdot \omega = 0{,}5 \text{ м/сек};$$
$$w_{A\tau} = OA \cdot \varepsilon = -2 \text{ м/сек}^2; \qquad \text{(а)}$$
$$w_{An} = OA \cdot \omega^2 = 0{,}5 \text{ м/сек}^2.$$

Так как знаки v_A и $w_{A\tau}$ разные, то движение точки *A* из данного положения является замедленным. Векторы $\boldsymbol{w}_{A\tau}$ и $\boldsymbol{w}_{An}$ имеют направления, показанные на чертеже.

3) Определение ω_2. Точка касания *P* является мгновенным центром скоростей для шестерни *2*; следовательно, угловая скорость ω_2 шестерни *2* равна

$$\omega_2 = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_A}{r_2}; \quad \omega_2 = 2{,}5 \text{ 1/сек}. \qquad \text{(б)}$$

Направление ω_2 (направление вращения шестерни) определяется направлением $\boldsymbol{v}_A$ и показано сплошной стрелкой.

4) Определение ε_2. Как и в предыдущей задаче, величина $AP = r_2$ во все время движения постоянна. Поэтому

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{1}{r_2}\frac{dv_A}{dt} = \frac{w_{A\tau}}{r_2}; \quad \varepsilon_2 = -10 \text{ 1/сек}^2. \qquad \text{(в)}$$

Так как знаки ω_2 и ε_2 разные, то вращение шестерни *2* является замедленным.

5) Определение $\boldsymbol{w}_{DA}^{\tau}$ и $\boldsymbol{w}_{DA}^{n}$. Ускорение точки *D* найдем по формуле (62′)

$$\boldsymbol{w}_D = \boldsymbol{w}_{A\tau} + \boldsymbol{w}_{An} + \boldsymbol{w}_{DA}^{\tau} + \boldsymbol{w}_{DA}^{n}.$$

В нашем случае $DA = r_2$ и

$$w_{DA}^{\tau} = DA \cdot \varepsilon_2 = -2 \text{ м/сек}^2; \quad w_{DA}^{n} = DA \cdot \omega_2^2 = 1{,}25 \text{ м/сек}^2.$$

Изображаем на чертеже (рис. 194, *б*) векторы, из которых слагается ускорение $\boldsymbol{w}_D$, а именно: $\boldsymbol{w}_{A\tau}$, $\boldsymbol{w}_{An}$ (переносим из точки *A*); $\boldsymbol{w}_{DA}^{\tau}$ (против вращения, так как оно замедленное); $\boldsymbol{w}_{DA}^{n}$ (от *D* к полюсу *A*).

6) Вычисление w_D. Проводя оси Dx и Dy, находим, что

$$w_{Dx} = |w_{A\tau}| + w_{DA}^n = 3{,}25 \text{ м/сек}^2; \quad w_{Dy} = |w_{DA}^\tau| - w_{An} = 1{,}5 \text{ м/сек}^2,$$

откуда

$$w_D = \sqrt{w_{Dx}^2 + w_{Dy}^2} \approx 3{,}58 \text{ м/сек}^2.$$

Величину w_D можно также найти графически, строя в выбранном масштабе векторный многоугольник из векторов $w_{A\tau}$, w_{An}, w_{DA}^τ, w_{DA}^n.

Задача 77. К кривошипу OA, равномерно вращающемуся вокруг оси O с угловой скоростью $\omega_{OA} = 4$ 1/сек (рис. 195), прикреплен шатун AB, соединенный с коромыслом BC. Даны размеры: $OA = r = 0{,}5$ м, $AB = 2r = BC = r\sqrt{2}$. В положении, изображенном на чертеже, $\angle OAB = 90°$, а $\angle ABC = 45°$. Определить для этого положения ускорение точки B шатуна, а также угловую скорость и угловое ускорение коромысла BC и шатуна AB.

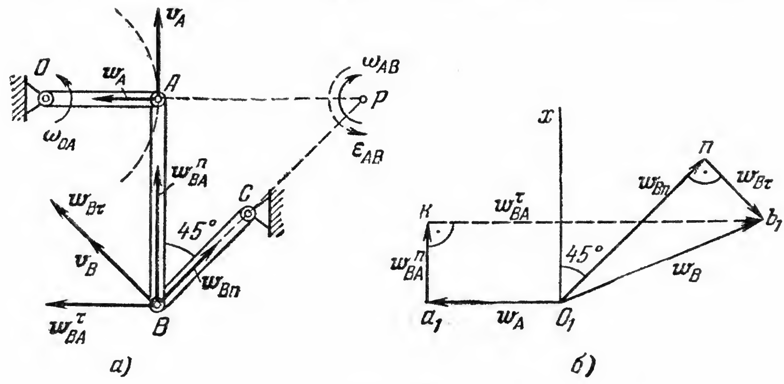


Рис. 195.

Решение. Задачу можно решить аналитически и графически.

А. Аналитическое решение. 1) Рассматривая движение шатуна AB, выберем в качестве полюса точку A. Для нее, так как $\omega_{OA} = \text{const}$:

$$v_A = r\omega_{OA} = 2 \text{ м/сек}; \quad w_A = w_{An} = r\omega_{OA}^2 = 8 \text{ м/сек}^2. \qquad \text{(а)}$$

Изображаем векторы v_A и w_A на чертеже.

2) Определение ω_{AB}. Нам известна траектория точки B шатуна (окружность радиуса BC). Зная поэтому направление v_B ($v_B \perp BC$), строим мгновенный центр скоростей P шатуна AB. Легко видеть, что $AP = AB = 2r$. Тогда

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP} \text{ или } \omega_{AB} = \frac{\omega_{OA}}{2} = 2 \text{ 1/сек}. \qquad \text{(б)}$$

Направление поворота показано на чертеже.

В этом случае расстояние AP при движении механизма не остается постоянным и для определения ε_{AB} нельзя воспользоваться приемом, примененным в двух предыдущих задачах. Рассмотрим поэтому другой метод решения.

3) Анализ векторного уравнения (62). Учитывая, что $\boldsymbol{w}_B = \boldsymbol{w}_{B\tau} + \boldsymbol{w}_{Bn}$, представим уравнение (62) в виде

$$\underline{\boldsymbol{w}_{B\tau}} + \boldsymbol{w}_{Bn} = \boldsymbol{w}_A + \underline{\boldsymbol{w}_{BA}^{\tau}} + \boldsymbol{w}_{BA}^{n}. \qquad (в)$$

Изобразим все векторы на рис. 195, *а* ($\boldsymbol{w}_{B\tau}$ и $\boldsymbol{w}_{BA}^{\tau}$ направляем так, как если бы соответствующие вращения были ускоренными). Рассмотрим, какие из входящих в уравнение (в) величин известны численно или могут быть по данным задачи вычислены. Мы знаем ускорение w_A полюса A. Кроме того, зная ω_{AB}, можно найти w_{BA}^n, а зная v_A, можно определить v_B и вычислить w_{Bn}. Таким образом, в векторном уравнении (в) неизвестны только численные значения двух подчеркнутых величин: $w_{B\tau}$ и w_{BA}^{τ}. Но в проекциях на оси равенство (в) дает два скалярных уравнения, из которых эти неизвестные и определяются.

Произведем предварительно подсчет w_{BA}^n и w_{Bn}.

4) Определение $\boldsymbol{w}_{BA}^n$. Зная ω_{AB}, по формуле (61) находим

$$w_{BA}^n = AB \cdot \omega_{AB}^2 = 4 \text{ м/сек}^2. \qquad (г)$$

5) Определение $\boldsymbol{w}_{Bn}$. Зная траекторию точки B, мы можем определить нормальное ускорение $\boldsymbol{w}_{Bn}$ этой точки. Для этого найдем сначала по теореме проекций (или с помощью мгновенного центра P) скорость v_B. Получим $v_B \cos 45° = v_A$, откуда $v_B = v_A \sqrt{2}$. Тогда

$$w_{Bn} = \frac{v_B^2}{BC} = \frac{2v_A^2}{r\sqrt{2}} = 8\sqrt{2} \text{ м/сек}^2. \qquad (д)$$

6) Определение $w_{B\tau}$ и w_B. Для определения $w_{B\tau}$ спроектируем обе части равенства (в) на ось BA, перпендикулярную к другому неизвестному вектору $\boldsymbol{w}_{BA}^{\tau}$. Получим:

$$w_{B\tau} \cos 45° + w_{Bn} \cos 45° = w_{BA}^n.$$

Подставляя сюда вычисленные значения w_{Bn} и w_{BA}^n, будем иметь

$$w_{B\tau} = w_{BA}^n \sqrt{2} - w_{Bn} = -4\sqrt{2}. \qquad (е)$$

Знак минус показывает, что вектор $\boldsymbol{w}_{B\tau}$ имеет направление, противоположное $\boldsymbol{v}_B$ (вращение коромысла CB из данного положения замедленное).

Теперь находим

$$w_B = \sqrt{w_{B\tau}^2 + w_{Bn}^2} = 4\sqrt{10} = 12{,}65 \text{ м/сек}^2.$$

7) Определение ω_{BC} и ε_{BC}. Зная $v_B = v_A\sqrt{2}$ и $w_{B\tau}$, находим

$$\omega_{BC} = \frac{v_B}{BC} = 4 \text{ 1/сек}, \quad \varepsilon_{BC} = \frac{w_{B\tau}}{BC} = -8 \text{ 1/сек}^2.$$

8) Определение ε_{AB}. Чтобы найти ε_{AB}, надо вычислить $\boldsymbol{w}_{BA}^{\tau}$. Для этого спроектируем обе части равенства (в) на ось BP, перпендикулярную к $\boldsymbol{w}_{B\tau}$. Получим

$$w_{Bn} = -w_A \cos 45° - w_{BA}^{\tau} \cos 45° + w_{BA}^n \cos 45°.$$

Отсюда

$$w_{BA}^{\tau} = -w_{Bn}\sqrt{2} - w_A + w_{BA}^{n} = -20\ м/сек^2$$

и по формуле (61)

$$\varepsilon_{AB} = \frac{w_{BA}^{\tau}}{AB} = -20\ 1/сек^2.$$

Знак минус в обоих случаях указывает, что вращение шатуна AB из рассматриваемого положения является замедленным.

Б. Графическое решение. Сначала производим все расчеты, проделанные в пп. 1, 2, 4, 5, и находим величины w_A, ω_{AB}, w_{BA}^n, w_{Bn}.

Примечания. Если для механизма построен план скоростей, то:

а) Величину ω_{AB} можно найти по формуле (58′): $\omega_{AB} = \frac{ab}{AB}$. Тогда расчеты пп. 2 и 4 можно опустить и сразу найти w_{BA}^n из равенства

$$w_{BA}^n = AB \cdot \omega_{AB}^2 = \frac{(ab)^2}{AB}.$$

б) Величину v_B при определении w_{Bn} можно также взять с плана скоростей.

Определение $\boldsymbol{w}_B$. Представим, как и при аналитическом решении, равенство (62) в виде

$$\boldsymbol{w}_A + \boldsymbol{w}_{BA}^n + \boldsymbol{w}_{BA}^{\tau} = \boldsymbol{w}_{Bn} + \boldsymbol{w}_{B\tau}.$$

Выразим это равенство графически. От произвольного центра O_1 (рис. 195, *б*) в выбранном масштабе откладываем вектор $\overline{O_1a_1} = \boldsymbol{w}_A$; затем от точки a_1 откладываем вектор $\overline{a_1k} = \boldsymbol{w}_{BA}^n$ ($\boldsymbol{w}_{BA}^n \uparrow\uparrow \overline{BA}$) и от точки k проводим прямую kb_1, перпендикулярную a_1k. Эта прямая дает направление $\boldsymbol{w}_{BA}^{\tau}$ и где-то на ней должен лежать конец искомого вектора $\boldsymbol{w}_B$.

Теперь от точки O_1 откладываем вектор $\overline{O_1n} = \boldsymbol{w}_{Bn}$($\boldsymbol{w}_{Bn} \uparrow\uparrow \overline{BC}$) и проводим перпендикулярную к нему прямую nb_1, дающую направление $\boldsymbol{w}_{B\tau}$. Конец вектора $\boldsymbol{w}_B$ должен также лежать и на этой прямой. Следовательно, точка b_1 пересечения линий kb_1 и nb_1 и дает конец вектора $\boldsymbol{w}_B$ [1]). Таким образом, $\boldsymbol{w}_B = \overline{O_1b_1}$. Измерив длину O_1b_1 и учитывая масштаб, найдем в нашем случае, что $w_B \approx 13\ м/сек^2$.

Одновременно из построения следует, что $\overline{kb_1} = \boldsymbol{w}_{BA}^{\tau}$ и $\overline{nb_1} = \boldsymbol{w}_{B\tau}$.

Строя таким путем (от того же центра O) ускорения других точек механизма, получим диаграмму, называемую *планом ускорений*.

Определение ε_{AB}. Измерив длину kb_1, найдем по формуле (61)

$$|\varepsilon_{AB}| = \frac{|w_{BA}^{\tau}|}{AB} = \frac{kb_1}{AB}.$$

Подсчет, с учетом масштаба, дает $|\varepsilon_{AB}| = 20\ 1/сек$. Из чертежа видно, что вектор $\boldsymbol{v}_{BA} = \boldsymbol{v}_B - \boldsymbol{v}_A$ будет направлен противоположно $\boldsymbol{w}_{BA}^{\tau}$; следовательно, вращение стержня AB из рассматриваемого положения является замедленным и $\varepsilon_{AB} = -20\ 1/сек^2$.

---

[1]) Если в задаче было бы заранее известно направление $\boldsymbol{w}_B$, то вектор $\boldsymbol{w}_B = \overline{O_1b_1}$ нашелся бы сразу, как пересечение линии kb_1 и линии $O_1b_1 \parallel \boldsymbol{w}_B$.

§ 85*. Мгновенный центр ускорений. При непоступательном движении твердого тела в его сечении S в каждый момент времени имеется точка Q, ускорение которой равно нулю. Эта точка называется *мгновенным центром ускорений*. Определяется положение центра Q, если известны ускорение w_A какой-нибудь точки A тела и величины ω и ε, следующим путем:

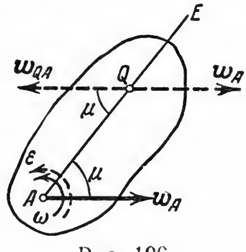


Рис. 196.

1) Вычисляем величину угла μ из формулы $\operatorname{tg}\mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$.

2) От точки A под углом μ к вектору w_A проводим прямую AE (рис. 196); при этом прямая AE должна быть отклонена от w_A в *сторону вращения тела, если вращение является ускоренным, и против вращения, если оно является замедленным,* т. е. *в сторону направления углового ускорения* ε.

3) Откладываем вдоль линии AE отрезок AQ, равный

$$AQ = \frac{w_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}. \tag{63}$$

Построенная таким путем точка Q и будет мгновенным центром ускорений. В самом деле, по формулам (59) и (60)

$$w_Q = w_A + w_{QA},$$

где $w_{QA} = QA\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$. Подставляя сюда значение QA из равенства (63), находим, что $w_{QA} = w_A$. Кроме того, вектор w_{QA} должен образовывать с линией QA угол μ, следовательно, вектор w_{QA} параллелен w_A, но направлен в противоположную сторону. Поэтому $w_{QA} = -w_A$ и $w_Q = 0$.

Если точку Q выбрать за полюс, то, так как $w_Q = 0$, ускорение любой точки M тела, согласно формулам (59) и (60), будет равно:

$$w_M = w_Q + w_{MQ} = w_{MQ} \quad \text{и} \quad w_M = QM\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \tag{64}$$

Следовательно, *ускорение любой точки тела равно ее ускорению во вращательном движении вокруг мгновенного центра ускорений* Q. При этом, как следует из (64),

$$\frac{w_M}{QM} = \frac{w_A}{QA} = \ldots \quad \text{и т. д.,} \tag{64'}$$

т. е. *ускорения точек тела пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра ускорений.* Картина распределения ускорений показана на рис. 197.

Следует иметь в виду, что положения мгновенного центра скоростей P и мгновенного центра ускорений Q в данный момент времени не совпадают. Например, если колесо катится по прямолинейному рельсу (см. рис. 198), причем скорость его центра C постоянна ($v_C = \text{const}$), то мгновенный центр скоростей находится в точке P ($v_P = 0$), но при этом, как было показано в задаче 75, $w_P \neq 0$; следовательно, точка P не является одновременно мгновенным центром ускорений. Мгновенный центр ускорений в этом случае находится, очевидно, в точке C, так как она движется равномерно и прямолинейно и $w_C = 0$.

Центры скоростей и ускорений совпадают тогда, когда тело вращается вокруг неподвижной оси.

Понятием о мгновенном центре ускорений удобно пользоваться при решении некоторых задач.

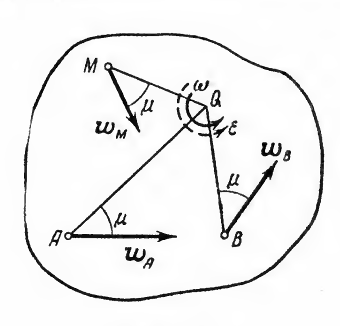


Рис. 197.

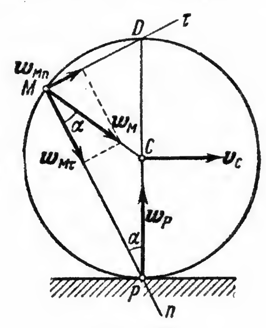


Рис. 198.

Задача 78. Колесо катится по прямолинейному рельсу так, что скорость v_C его центра C постоянна. Определить ускорение точки M обода колеса (рис. 198).

Решение. Так как $v_C = \text{const}$, то, как было указано выше, точка C является мгновенным центром ускорений. Мгновенный центр скоростей находится в точке P. Следовательно, для колеса

$$\omega = \frac{v_C}{PC} = \frac{v_C}{R} = \text{const}, \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0, \quad \operatorname{tg}\mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = 0, \quad \mu = 0.$$

В результате по формуле (64) находим

$$w_M = CM \cdot \omega^2 = \frac{v_C^2}{R}.$$

Таким образом, ускорение любой точки M обода (в том числе и точки P) равно v_C^2/R и направлено к центру C колеса, так как угол $\mu = 0$. Заметим, что это ускорение для точки M не будет нормальным ускорением. В самом деле, скорость точки M направлена перпендикулярно PM (см. задачу 69). Следовательно, касательная $M\tau$ к траектории точки M направлена вдоль линии MD, а главная нормаль Mn — вдоль MP. Поэтому $w_{Mn} = w_M \cos\alpha$, $w_{M\tau} = w_M \sin\alpha$.

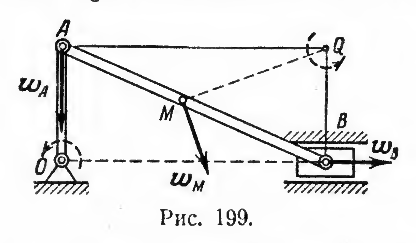


Рис. 199.

Задача 79. Кривошип OA вращается с постоянной угловой скоростью ω_{OA} (рис. 199). Найти ускорение ползуна B и угловое ускорение шатуна AB в момент, когда $\angle BOA = 90°$, если $OA = r$, $AB = l$.

Решение. В рассматриваемый момент времени скорости всех точек шатуна AB равны v_A (см. задачу 71, рис. 186, *б*), мгновенный центр скоростей находится в бесконечности и $\omega_{AB} = 0$. Тогда $\operatorname{tg}\mu = \frac{\varepsilon_{AB}}{\omega_{AB}^2} = \infty$ и $\mu = 90°$

($\varepsilon_{AB} \neq 0$, так как в противном случае по формулам (60) и (59) $w_{BA}=0$ и $w_B=w_A$, что невозможно, поскольку эти два вектора взаимно перпендикулярны).

Ускорение точки A равно $w_A = w_{An} = r\omega_{OA}^2$ и направлено вдоль AO. Ускорение точки B, так как она движется прямолинейно, направлено вдоль OB. Из рис. 197 видно, что ускорение любой точки M тела направлено под углом μ к линии QM. В данном случае $\mu = 90°$; следовательно, линии QA и QB должны быть перпендикулярны к w_A и w_B. Восстанавливая эти перпендикуляры, находим положение точки Q. Составляя теперь пропорцию (64′)

$$\frac{w_B}{QB} = \frac{w_A}{QA},$$

где $QB = r$, $QA = \sqrt{l^2 - r^2}$, получаем:

$$w_B = \frac{r^2}{\sqrt{l^2 - r^2}}\,\omega_{OA}^2.$$

Ускорение w_M любой другой точки M шатуна AB будет перпендикулярно к QM ($\mu = 90°$); модуль w_M находится из пропорции (64′).

Угловое ускорение ε_{AB} шатуна найдем из равенства $w_A = QA \cdot \varepsilon_{AB}$, которое дает формула (64) при $\omega_{AB} = 0$. Следовательно,

$$\varepsilon_{AB} = \frac{r}{\sqrt{l^2 - r^2}}\,\omega_{OA}^2.$$

ГЛАВА XIII

ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ И ДВИЖЕНИЕ СВОБОДНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 86. Движение твердого тела, имеющего одну неподвижную точку. Рассмотрим движение по отношению к системе отсчета $Ox_1y_1z_1$ твердого тела, закрепленного так, что одна его точка O остается во все время движения неподвижной. Такое движение совершает, например, волчок, у которого неподвижна точка его опоры о плоскость, или любое другое тело, закрепленное в точке O шаровым шарниром.

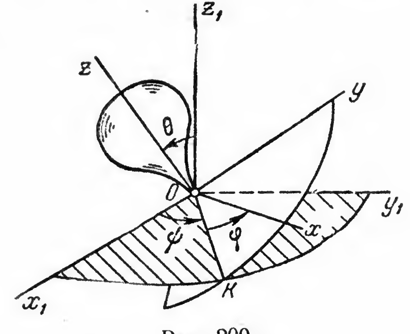


Рис. 200.

Найдем, какими параметрами определяется положение тела, имеющего неподвижную точку. Для этого свяжем жестко с телом трехгранник $Oxyz$, по положению которого можно судить о положении тела (рис. 200). Линия OK, вдоль которой пересекаются плоскости Oxy и Ox_1y_1, называется *линией*

узлов. Тогда положение по отношению к осям $Ox_1y_1z_1$ трехгранника $Oxyz$, а с ним и самого тела, можно определить углами:

$$\varphi = \angle KOx, \quad \psi = \angle x_1OK, \quad \theta = \angle z_1Oz.$$

Эти углы называемые *углами Эйлера*, имеют следующие, взятые из небесной механики, наименования: φ — *угол собственного вращения*, ψ — *угол прецессии*, θ — *угол нутации*. Положительные направления отсчета углов показаны на рис. 200 стрелками. При изменении угла φ тело совершает поворот вокруг оси Oz (собственное вращение), при изменении угла ψ — поворот вокруг оси Oz_1 (прецессия) и при изменении угла θ — поворот вокруг линии узлов OK (нутация).

Чтобы знать движение тела, надо знать его положение по отношению к осям $Ox_1y_1z_1$ в любой момент времени, т. е. знать зависимости:

$$\varphi = f_1(t), \qquad \psi = f_2(t), \qquad \theta = f_3(t). \tag{65}$$

Уравнения (65), определяющие закон происходящего движения, называются *уравнениями движения твердого тела вокруг неподвижной точки.*

Чтобы установить картину рассматриваемого движения, докажем следующую *теорему Эйлера — Даламбера*: *всякое элементарное перемещение тела, имеющего неподвижную точку, представляет собою элементарный поворот вокруг некоторой мгновенной оси вращения, проходящей через эту точку.*

Пусть положение тела определяется углами φ, ψ, θ. Тогда его перемещение за элементарный промежуток времени dt представится как совокупность поворотов на углы $d\varphi$, $d\psi$, $d\theta$ вокруг осей Oz, Oz_1 и OK соответственно. Слагаясь, эти три поворота дадут истинное элементарное перемещение тела. Рассмотрим сначала, каким будет результат сложения поворотов вокруг осей Oz и Oz_1 (рис. 201). При повороте на угол $d\varphi$ вокруг оси Oz любая точка тела, лежащая в плоскости zOz_1 (внутри угла zOz_1), получит элементарное перемещение, перпендикулярное к этой плоскости и численно равное $h_1\,d\varphi$, где h_1 — расстояние точки от оси Oz. Одновременно при повороте вокруг оси Oz_1 та же точка получит противоположно направленное перемещение, численно равное $h_2\,d\psi$. Тогда внутри угла zOz_1 найдется такая точка B, для которой $h_1\,d\varphi = h_2\,d\psi$ и перемещение которой равно нулю (если направление одного из вращений противоположно показанному на рис. 201, то такая точка лежит вне угла zOz_1). Отсюда заключаем, что элемен-

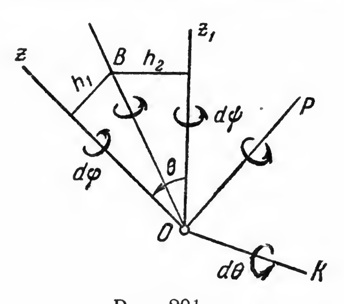


Рис. 201.

тарное перемещение, получаемое телом в результате поворотов вокруг осей Oz и Oz_1, будет таким же, как у тела, имеющего две неподвижные точки O и B, т. е. представляет собою элементарный поворот вокруг оси OB, проходящей через точку O. Рассуждая таким же образом, придем к выводу, что элементарные повороты вокруг осей OB и OK будут в свою очередь эквивалентны одному элементарному повороту вокруг некоторой, проходящей через точку O, оси OP (рис. 201). Тем самым теорема доказана.

Ось OP, элементарным поворотом вокруг которой тело перемещается из данного положения в положение соседнее, бесконечно близкое к данному, называется *мгновенной осью вращения*; скорости всех точек тела, лежащих на мгновенной оси вращения, равны в данный момент времени нулю. От неподвижной оси мгновенная ось вращения отличается тем, что ее направление и в пространстве и в самом теле все время меняется. Переместившись поворотом вокруг оси OP в соседнее положение, тело из этого положения в последующее перемещается поворотом вокруг новой мгновенной оси вращения OP_1 и т. д. Таким образом, *движение твердого тела вокруг неподвижной точки слагается из серии последовательных элементарных поворотов вокруг мгновенных осей вращения, проходящих через эту неподвижную точку* (рис. 202). Рассмотрим кинематические характеристики этого движения.

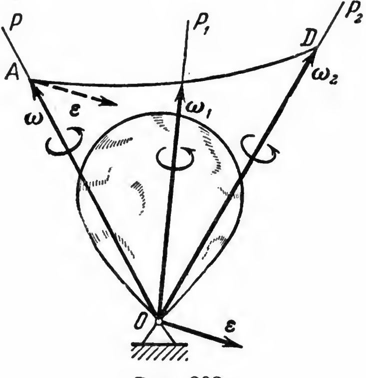


Рис. 202.

1. Угловая скорость ω, с которой тело совершает элементарный поворот вокруг мгновенной оси вращения, называется *угловой скоростью тела в данный момент времени* или *мгновенной угловой скоростью тела*. Мгновенную угловую скорость можно изобразить в виде соответствующего вектора $\boldsymbol{\omega}$, направленного вдоль оси OP (см. § 74). Поскольку направление оси OP непрерывно изменяется, то вектор $\boldsymbol{\omega}$ будет со временем изменяться не только по численной величине, но и по направлению, а его конец A будет описывать в пространстве некоторую кривую AD, являющуюся годографом вектора $\boldsymbol{\omega}$ (рис. 202).

2*. *Угловое ускорение тела в данный момент времени* или *мгновенное угловое ускорение* $\boldsymbol{\varepsilon}$, определяющее в данном случае изменение угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ и по модулю и по направлению, будет векторной величиной, равной

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}.$$

Сравнивая это выражение с равенством $\boldsymbol{v}=d\boldsymbol{r}/dt$ (§ 61), заключаем что угловое ускорение $\boldsymbol{\varepsilon}$ можно вычислять как скорость, с которой конец вектора $\boldsymbol{\omega}$ перемещается вдоль кривой AD (см. рис. 202). В частности, направление $\boldsymbol{\varepsilon}$ совпадает с направлением касательной к кривой AD в соответствующей точке. Следовательно, в данном случае, в отличие от случая вращения вокруг неподвижной оси, направление вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$ не совпадает с направлением вектора $\boldsymbol{\omega}$.

Векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ являются основными кинематическими характеристиками движения тела, имеющего неподвижную точку. Их можно вычислить, зная уравнения движения (65). Пример такого расчета (определение вектора $\boldsymbol{\omega}$) рассмотрен в § 97.

§ 87*. Скорости и ускорения точек тела. Так как при движении около неподвижной точки тело имеет в каждый момент времени мгновенную ось вращения OP, то модуль скорости какой-нибудь его точки M (рис. 203) будет в этот момент (по аналогии с § 76) определяться равенством

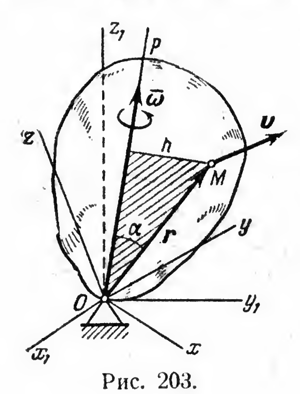


Рис. 203.

$$v=\omega h, \tag{66}$$

где ω — угловая скорость тела, h — расстояние точки M до мгновенной оси вращения. Направлен вектор скорости $\boldsymbol{v}$ перпендикулярно плоскости MOP, проходящей через мгновенную ось и точку M, в сторону поворота тела.

Формулой (66) не всегда удобно пользоваться для определения v, так как (в отличие от § 76) входящая в нее величина h с течением времени изменяется. По этой же причине мы из формулы (66) не сумеем получить выражение для ускорения точки M так, как это было сделано в § 76 при постоянном h.

Найдем поэтому другую формулу, позволяющую непосредственно определить вектор скорости $\boldsymbol{v}$ точки M. Если рассмотреть векторное произведение $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$, где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор, проведенный из неподвижной точки O в точку M, то по модулю

$$|\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}|=\omega r\sin\alpha=\omega h.$$

По направлению же (о направлении векторного произведения говорилось в § 42) и по размерности, как легко видеть, векторы $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{v}$ также совпадают. Следовательно,

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}, \tag{67}$$

т. е. *вектор скорости любой точки M тела равен векторному произведению угловой скорости тела на радиус-вектор этой точки.*

Аналитически вектор $\boldsymbol{v}$ вычисляется по его проекциям на какие-нибудь оси координат. Найдем проекции $\boldsymbol{v}$ на оси $Oxyz$, жестко связанные с телом и движущиеся вместе с ним (см. рис. 203); эти оси имеют то преимущество, что в них координаты x, y, z точки M будут величинами постоянными. Учитывая, что $r_x = x$, $r_y = y$, $r_z = z$, будем по известной формуле векторной алгебры иметь

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

Отсюда, рассуждая так же, как при выводе формул (50) в § 42, получим:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \omega_y z - \omega_z y, \\ v_y &= \omega_z x - \omega_x z, \\ v_z &= \omega_x y - \omega_y x. \end{aligned}\right\} \qquad (67')$$

Формулы (67) и (67′) называют *формулами Эйлера.*

Найдем теперь ускорение точки M. Из равенства (67), дифференцируя его по времени, будем иметь

$$\boldsymbol{w} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r}\right) + \left(\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right).$$

Так как $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \boldsymbol{\varepsilon}$, а $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{v}$, то окончательно

$$\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}) + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}). \qquad (68)$$

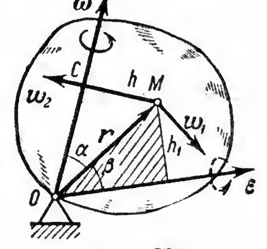


Рис. 204.

Ускорение $\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}$ называется *вращательным*, а ускорение $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$ — *осестремительным* ускорением точки M. Вектор $\boldsymbol{w}_1$ направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через точку M и вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$ (рис. 204), а по модулю $w_1 = \varepsilon r \sin\beta = \varepsilon h_1$, где h_1 — расстояние от точки M до вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$. Вектор же $\boldsymbol{w}_2$, перпендикулярный одновременно к $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{\omega}$, будет направлен вдоль MC (см. рис. 203 и 204), причем по модулю $w_2 = \omega v \sin 90^\circ = \omega^2 h$, так как $v = \omega h$. Формулы (67) и (68) справедливы, конечно, и при вращении тела вокруг неподвижной оси, при этом лишь оба вектора $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ будут направлены вдоль оси вращения.

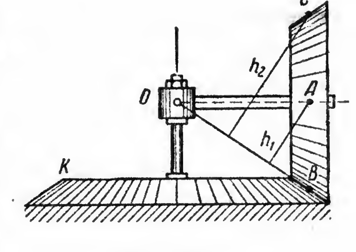


Рис. 205.

Задача 80. Найти скорости точек B и C конического катка (бегуна) (рис. 205), если скорость v_A движения центра A катка по его траектории известна. Каток при движении катится без скольжения по неподвижной конической поверхности K.

Решение. Каток движется вокруг неподвижной точки O. Точки катка, лежащие на линии OB, должны иметь такие же скорости, как точки поверхности K, так как по ней каток катится без скольжения; следовательно, скорости этих точек равны нулю и линия OB является мгновенной осью враще-

ния катка. Тогда $v_A = \omega h_1$, где ω — угловая скорость катка при его повороте вокруг оси OB, а h_1 — расстояние точки A от этой оси. Отсюда $\omega = v_A/h_1$.

Скорость v_C точки C будет равна ωh_2, где h_2 — расстояние точки C от оси OB. Так как в данном случае $h_2 = 2h_1$, то $v_C = 2v_A$. Для точки B, лежащей на мгновенной оси вращения, будет $v_B = 0$.

Производные от единичных векторов подвижных осей. При решении задач механики в ряде случаев пользуются подвижными осями $Oxyz$ (см., например, гл. XIV). Когда такие оси движутся поступательно, то их орты $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ остаются величинами постоянными. Но если трехгранник $Oxyz$ (рис. 206) совершает вращение вокруг какой-нибудь оси OP, то орты уже не будут величинами постоянными, так как их направления со временем будут изменяться. В этом случае для вычисления производной от какого-нибудь заданного в осях $Oxyz$ вектора $\boldsymbol{u} = u_x\boldsymbol{i} + u_y\boldsymbol{j} + u_z\boldsymbol{k}$ надо знать значения производных от ортов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Орт $\boldsymbol{i}$ можно рассматривать как радиус-вектор $\boldsymbol{r}_A = \boldsymbol{i}$ точки A, лежащей на оси Ox на расстоянии единицы длины от начала O. Тогда

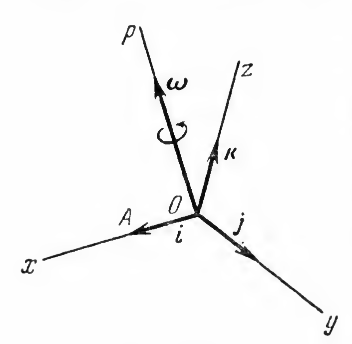


Рис. 206.

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}_A}{dt} = \boldsymbol{v}_A.$$

Но по формуле (67) $\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_A = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{i}$, где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость поворота вокруг оси OP. Аналогичные соотношения получаются и для производных от $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$. В результате находим:

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{i}, \quad \frac{d\boldsymbol{j}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{j}, \quad \frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{k}. \quad (69)$$

Равенства (69) называют формулами Пуассона.

§ 88. Общий случай движения свободного твердого тела.

Рассмотрим наиболее общий случай движения твердого тела, когда оно является свободным и может перемещаться как угодно по отношению к системе отсчета $Ox_1y_1z_1$ (рис. 207). Установим вид уравнений, определяющих закон рассматриваемого движения. Выберем произвольную точку A тела в качестве полюса и проведем через нее оси $Ax_1'y_1'z_1'$, которые при движении тела будут перемещаться вместе с полюсом поступательно. Тогда положение тела в системе отсчета $Ox_1y_1z_1$ будет известно, если мы будем знать положение полюса A, т. е. его координаты x_{1A}, y_{1A}, z_{1A}, и положение тела по отношению к осям $Ax_1'y_1'z_1'$, определяемое, как и в случае, рассмотренном в § 86, углами Эйлера φ, ψ, θ (см. рис. 200; на рис. 207 углы Эйлера не

показаны, чтобы не затемнять чертеж). Следовательно, уравнения движения свободного твердого тела, позволяющие найти его положение по отношению к системе отсчета $Ox_1y_1z_1$ в любой момент времени, имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} x_{1A}&=f_1(t), & y_{1A}&=f_2(t), & z_{1A}&=f_3(t);\\ \varphi&=f_4(t), & \psi&=f_5(t), & \theta&=f_6(t). \end{aligned}\right\} \quad (70)$$

Установим теперь геометрическую картину рассматриваемого движения. Нетрудно видеть, что элементарное перемещение свободного твердого тела слагается из поступательного перемещения вместе с полюсом A, при котором полюс приходит в соседнее положение A_1, и из некоторого перемещения по отношению к осям $Ax_1'y_1'z_1'$, т. е. вокруг точки A, как вокруг неподвижной. Но последнее перемещение согласно теореме Эйлера—Даламбера (§ 86) представляет собой поворот вокруг мгновенной оси вращения AP, проходящей через точку A. Следовательно, любое элементарное перемещение свободного твердого тела слагается из элементарного поступательного перемещения вместе с полюсом A и элементарного поворота вокруг мгновенной оси вращения AP, проходящей через этот полюс. Поскольку движение тела представляет собою совокупность элементарных перемещений, то окончательно приходим к выводу, что *движение свободного твердого тела слагается в общем случае из поступательного движения, при котором все точки тела движутся как произвольно выбранный полюс A со скоростью v_A, и из серии элементарных поворотов с угловой скоростью ω вокруг мгновенных осей вращения, проходящих через полюс A* (рис. 208). Такой будет, например, картина движения любого непоступательно перемещающегося в воздухе тела: брошенного камня, самолета, проделывающего фигуры высшего пилотажа, артиллерийского снаряда и т. д. Наконец, аналогичной может быть картина движения и несвободного твердого тела при наличии соответствующих связей (см., например, § 98, рис. 235).

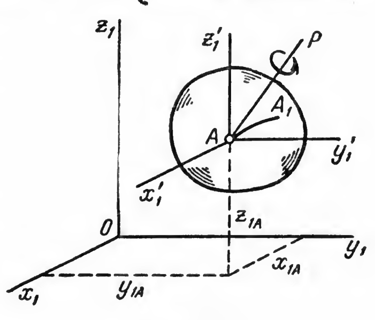


Рис. 207.

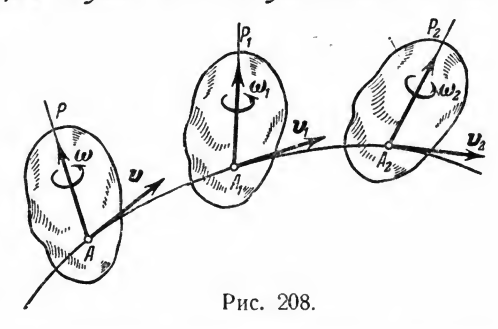


Рис. 208.

Поступательная часть движения свободного твердого тела описывается первыми тремя из уравнений (70), а вращение вокруг полюса — последними тремя из этих уравнений. Основными кинематическими характеристиками движения являются скорость $\boldsymbol{v}_A$ и ускорение $\boldsymbol{w}_A$ полюса, определяющие скорость и ускорение поступательной части движения, а также угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ и угловое ускорение $\boldsymbol{\varepsilon}$ вращения вокруг полюса. Значения этих величин в любой момент времени можно найти по уравнениям (70).

В частном случае движение свободного тела может быть плоскопараллельным (глава XII); при этом вектор $\boldsymbol{\omega}$ будет все время перпендикулярен плоскости движения. Заметим, что в общем случае, как и в случае плоскопараллельного движения, вращательная часть движения (в частности и значение $\boldsymbol{\omega}$) от выбора полюса не зависит.

Перейдем к вычислению скоростей и ускорений точек тела в рассматриваемом случае движения, используя результаты § 87*.

Скорость $\boldsymbol{v}_M$ любой точки M тела, как и в случае плоскопараллельного движения (см. § 79, рис. 174), складывается из скорости $\boldsymbol{v}_A$ полюса A и скорости $\boldsymbol{v}_{MA}$, которую получает точка M при движении вместе с телом вокруг полюса A, т. е.

$$\boldsymbol{v}_M = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{MA}. \tag{71}$$

Правильность этого результата доказывается так же, как в § 79. При этом согласно формуле (67) $\boldsymbol{v}_{MA} = \boldsymbol{\omega} \times \overline{AM}$. Поэтому окончательно

$$\boldsymbol{v}_M = \boldsymbol{v}_A + (\boldsymbol{\omega} \times \overline{AM}). \tag{71'}$$

Аналогично для ускорения любой точки M тела найдем (см. § 84)

$$\boldsymbol{w}_M = \boldsymbol{w}_A + \boldsymbol{w}_{MA}. \tag{72}$$

При этом величина $\boldsymbol{w}_{MA}$ определяется равенством (68), в котором надо считать $\boldsymbol{r} = \overline{AM}$ и $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{MA} = \boldsymbol{\omega} \times \overline{AM}$.

ГЛАВА XIV

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

§ 89. Относительное, переносное и абсолютное движения. До сих пор мы изучили движение точки или тела по отношению к одной заданной системе отсчета. Однако в ряде случаев при решении задач механики оказывается целесообразным (а иногда и необходимым) рассматривать движение точки (или тела) одновременно по отношению к двум системам отсчета, из которых одна считается условно неподвижной, а другая определенным образом движется по отношению к первой. Движение, совершаемое при этом точкой (или телом), называется составным или сложным.

Например, шар, катящийся по палубе движущегося парохода, можно считать совершающим по отношению к берегу сложное движение, состоящее из качения по отношению к палубе (подвижная система отсчета) и движения вместе с палубой по отношению к берегу (неподвижная система отсчета). Таким путем сложное движение шара разлагается на два более простых и более легко исследуемых. Возможность разложить путем введения дополнительной (подвижной) системы отсчета более сложное движение точки или тела на более простые широко используется при кинематических расчетах и определяет практическую ценность теории сложного движения, рассматриваемой в этой и следующей главах. Кроме того, результаты этой теории используются в динамике для изучения относительного равновесия и относительного движения тел под действием сил.

Рассмотрим сложное движение точки M, перемещающейся по отношению к подвижной системе отсчета $Oxyz$, которая в свою очередь как-то движется относительно другой системы отсчета $O_1x_1y_1z_1$, условно названной нами неподвижной (рис. 209). Каждая из этих систем отсчета связана, конечно, с определенным телом, на чертеже не показанным. Введем следующие определения:

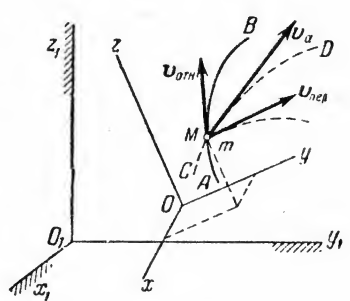


Рис. 209.

1. Движение, совершаемое точкой M по отношению к подвижным осям координат, называется *относительным движением* (такое движение будет видеть наблюдатель, связанный с подвижными осями $Oxyz$ и перемещающийся вместе с ними). Траектория AB, описываемая точкой в относительном движении, называется *относительной траекторией*. Скорость движения точки M по отношению к осям $Oxyz$ (т. е. вдоль этой кривой AB) называется *относительной скоростью* (обозначается $\boldsymbol{v}_{отн}$), а ускорение точки в этом движении — *относительным ускорением* (обозначается $\boldsymbol{w}_{отн}$). Из определения следует, что при вычислении $\boldsymbol{v}_{отн}$ и $\boldsymbol{w}_{отн}$ оси $Oxyz$ можно считать неподвижными.

2. Движение, совершаемое подвижной системой отсчета $Oxyz$ и всеми неизменно связанными с ней точками пространства по отношению к неподвижной системе $O_1x_1y_1z_1$, является для точки M *переносным движением*.

Скорость той неизменно связанной с подвижными осями $Oxyz$ точки m, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка M, называется *переносной скоростью* точки M в этот момент (обозначается $\boldsymbol{v}_{пер}$), а ускорение этой точки — *переносным ускорением* точки M (обозначается $\boldsymbol{w}_{пер}$). Таким образом,

$$\boldsymbol{v}_{пер} = \boldsymbol{v}_m, \qquad \boldsymbol{w}_{пер} = \boldsymbol{w}_m. \tag{73}$$

где m — неподвижная по отношению к осям $Oxyz$ точка, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка M. Если представить себе, что относительное движение точки M происходит по поверхности (или внутри) твердого тела, с которым жестко связаны подвижные оси $Oxyz$, то переносной скоростью (или ускорением) точки M в данный момент будет скорость (или ускорение) той точки m тела, с которой в этот момент совпадает точка M.

3. Движение, совершаемое точкой по отношению к неподвижной системе отсчета $O_1x_1y_1z_1$, называется *абсолютным* или *сложным*. Траектория CD этого движения называется *абсолютной траекторией*, скорость — *абсолютной скоростью* (обозначается $\boldsymbol{v}_a$) и ускорение — *абсолютным ускорением* (обозначается $\boldsymbol{w}_a$).

В приведенном выше примере движение шара относительно палубы парохода будет относительным, а скорость этого движения — относительной скоростью шара; движение парохода по отношению к берегу будет для шара переносным движением, а скорость той точки палубы, которой в данный момент касается шар, будет в этот момент его переносной скоростью; наконец, движение шара по отношению к берегу будет его абсолютным движением, а скорость этого движения — абсолютной скоростью шара.

Для решения соответствующих задач кинематики необходимо установить зависимости между относительными, переносными и абсолютными скоростями и ускорениями точки.

§ 90. Сложение скоростей. Рассмотрим сложное движение точки M. Пусть эта точка совершает за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ вдоль своей относительной траектории AB относительное перемещение, определяемое вектором $\overline{MM'}$ (рис. 210, *а*). Сама кривая AB, двигаясь вместе с подвижными осями $Oxyz$ (на рис. 210, *а* не показаны), перейдет за тот же промежуток времени в какое-то новое

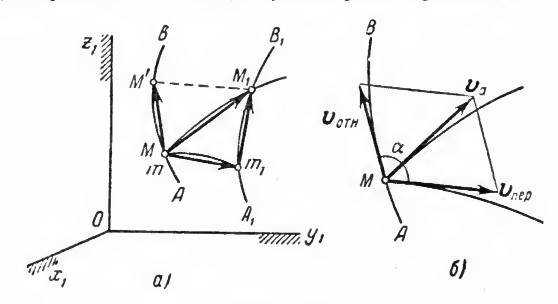


Рис. 210.

положение A_1B_1. Одновременно та точка m кривой AB, с которой в момент t совпадает точка M, совершит переносное перемещение

$\overline{mm_1} = \overline{Mm_1}$. В результате этих движений точка M придет в положение M_1 и совершит за время Δt абсолютное перемещение $\overline{MM_1}$.

Из векторного треугольника Mm_1M_1 имеем:

$$\overline{MM_1} = \overline{Mm_1} + \overline{m_1M_1}.$$

Деля обе части этого равенства на Δt и переходя к пределу, получим:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{Mm_1}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{m_1M_1}}{\Delta t}.$$

Но по определению:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \boldsymbol{v}_{\text{а}}, \qquad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{Mm_1}}{\Delta t} = \boldsymbol{v}_{\text{пер}}.$$

Что касается последнего слагаемого, то так как при $\Delta t \to 0$ кривая A_1B_1 стремится к совпадению с кривой AB, то в пределе будем иметь

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{m_1M_1}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{MM'}}{\Delta t} = \boldsymbol{v}_{\text{отн}}.$$

В результате находим, что

$$\boldsymbol{v}_{\text{а}} = \boldsymbol{v}_{\text{отн}} + \boldsymbol{v}_{\text{пер}}. \tag{74}$$

Направлены векторы $\boldsymbol{v}_{\text{а}}$, $\boldsymbol{v}_{\text{отн}}$, $\boldsymbol{v}_{\text{пер}}$ по касательным к соответствующим траекториям (рис. 210, *б*).

Таким образом, мы доказали следующую теорему о сложении скоростей: *при сложном движении абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей.* Построенная на рис. 210, *б* фигура называется *параллелограммом скоростей.*

Если угол между направлениями векторов $\boldsymbol{v}_{\text{отн}}$ и $\boldsymbol{v}_{\text{пер}}$ равен α, то по модулю

$$v_{\text{а}} = \sqrt{v_{\text{отн}}^2 + v_{\text{пер}}^2 + 2v_{\text{отн}}v_{\text{пер}} \cos \alpha}. \tag{74'}$$

С помощью параллелограмма скоростей решается ряд задач кинематики точки, а именно: а) зная скорости $\boldsymbol{v}_{\text{отн}}$ и $\boldsymbol{v}_{\text{пер}}$, можно найти абсолютную скорость точки $\boldsymbol{v}_{\text{а}}$; б) зная $\boldsymbol{v}_{\text{а}}$ и направления скоростей $\boldsymbol{v}_{\text{отн}}$ и $\boldsymbol{v}_{\text{пер}}$, можно найти модули этих скоростей; в) зная скорости $\boldsymbol{v}_{\text{а}}$ и $\boldsymbol{v}_{\text{пер}}$, можно найти относительную скорость точки $\boldsymbol{v}_{\text{отн}}$ из равенства

$$\boldsymbol{v}_{\text{отн}} = \boldsymbol{v}_{\text{а}} + (-\boldsymbol{v}_{\text{пер}}),$$

т. е. сложив геометрически вектор $\boldsymbol{v}_{\text{а}}$ с вектором, равным по модулю и противоположным по направлению вектору $\boldsymbol{v}_{\text{пер}}$ (см. задачу 83).

Задача 81. Точка M движется вдоль прямой OA со скоростью u (рис. 211), а сама прямая вращается в плоскости Ox_1y_1 вокруг центра O с угловой скоростью ω. Определить скорость точки M относительно осей Ox_1y_1 в зависимости от расстояния $OM = r$.

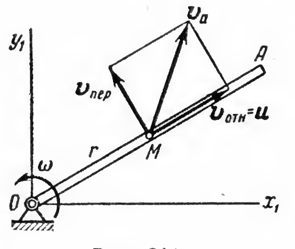


Рис. 211.

Решение. Рассмотрим движение точки M как сложное, состоящее из относительного движения вдоль прямой OA и движения вместе с этой прямой. Тогда скорость $\boldsymbol{u}$, направленная вдоль OA, будет относительной скоростью точки. Вращательное движение прямой OA вокруг центра O является для точки M переносным движением, а скорость той точки прямой OA, с которой в данный момент совпадает точка M, будет ее переносной скоростью $\boldsymbol{v}_{пер}$. Так как эта точка прямой движется по окружности радиуса $OM = r$, то по модулю скорость $v_{пер} = \omega r$ и направлена перпендикулярно к OM. Строя на векторах $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}_{пер}$ параллелограмм, найдем абсолютную скорость $\boldsymbol{v}_a$ движения точки M по отношению к осям Ox_1y_1. Так как $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ взаимно перпендикулярны, то по модулю

$$v_a = \sqrt{u^2 + \omega^2 r^2}.$$

Задача 82. Течение реки, шириною h, происходит с постоянной скоростью v. Гребец может сообщить лодке относительно неподвижной воды скорость, равную u. Определить, по какому направлению надо переезжать реку, чтобы достигнуть противоположного берега в кратчайшее время. Куда при этом причалит лодка?

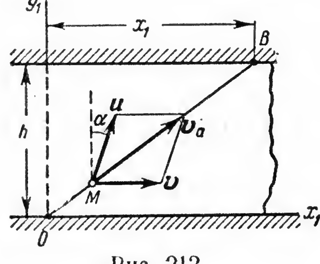


Рис. 212.

Решение. Пусть движение лодки начинается из точки O (рис. 212). Проведем оси координат Ox_1y_1 и изобразим лодку в произвольном положении M. Предположим, что гребец направляет движение лодки под постоянным углом α к оси Oy_1. Тогда абсолютная скорость лодки $\boldsymbol{v}_a$ складывается из относительной скорости $\boldsymbol{v}_{отн}$, равной той скорости, которую ей сообщает гребец $(\boldsymbol{v}_{отн} = \boldsymbol{u})$, и из переносной скорости $\boldsymbol{v}_{пер}$, равной скорости течения реки $(\boldsymbol{v}_{пер} = \boldsymbol{v})$

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_{отн} + \boldsymbol{v}_{пер} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}.$$

Проекции абсолютной скорости на оси координат (по теореме о проекции суммы векторов) равны:

$$v_{ax_1} = u \sin\alpha + v; \qquad v_{ay_1} = u \cos\alpha.$$

Так как обе проекции постоянны, то перемещения лодки вдоль осей координат равны:

$$x_1 = (u \sin\alpha + v)\, t; \qquad y_1 = (u \cos\alpha)\, t.$$

Когда лодка достигает противоположного берега, $y_1 = h$. Отсюда находим время переправы

$$t_1 = \frac{h}{u \cos\alpha}.$$

Очевидно, t_1 будет наименьшим, когда $\cos\alpha = 1$, т. е. $\alpha = 0$. Таким образом, гребец переправится через реку в кратчайшее время, если будет направлять лодку перпендикулярно к берегу. При этом

$$t_{\min} = \frac{h}{u}.$$

Полагая в выражении для x_1 угол $\alpha = 0$ и $t = t_{\min}$, получим

$$x_1 = \frac{v}{u} h.$$

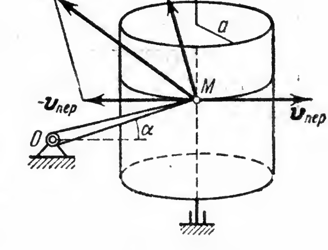


Рис. 213.

Следовательно, лодка пристанет в точке B, смещенной по течению на расстояние x_1 от оси Oy_1. Это смещение тем меньше, чем меньше v и h и чем больше u.

Задача 83. Рычажок OM самопишущего прибора образует в данный момент угол α с горизонтом, а перо M имеет скорость $\boldsymbol{v}$, направленную перпендикулярно к OM (рис. 213). Барабан с бумагой вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω. Определить скорость $\boldsymbol{u}$ перемещения пера вдоль бумаги, если радиус барабана равен a.

Решение. Нам известна абсолютная скорость пера $\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}$. Скорость $\boldsymbol{v}$ можно рассматривать как геометрическую сумму скорости движения пера относительно бумаги (это искомая скорость $\boldsymbol{u}$) и переносной скорости $\boldsymbol{v}_{пер}$, равной скорости той точки бумаги, которой в данный момент касается перо; по модулю $v_{пер} = \omega a$.

На основании теоремы о сложении скоростей $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}_{пер}$, откуда $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v}_{пер})$. Строя на векторах $\boldsymbol{v}$ и $(-\boldsymbol{v}_{пер})$ параллелограмм, найдем искомую скорость $\boldsymbol{u}$. Так как угол между $\boldsymbol{v}$ и $(-\boldsymbol{v}_{пер})$ равен $90° - \alpha$, то по модулю

$$u = \sqrt{v^2 + \omega^2 a^2 + 2v\omega a \sin\alpha}.$$

Угол, который скорость $\boldsymbol{u}$ образует с направлением $\boldsymbol{v}_{пер}$, можно теперь найти по теореме синусов.

Задача 84. Конец B горизонтального стержня AB шарнирно соединен с ползуном, скользящим вдоль прорези кулисы OC и заставляющим последнюю вращаться вокруг оси O (рис. 214). Расстояние оси O от стержня AB равно h. Определить угловую скорость кулисы в зависимости от скорости v стержня и угла φ.

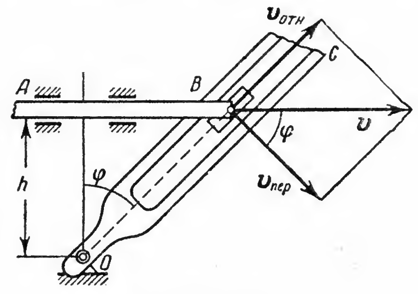


Рис. 214.

Решение. Нам известна абсолютная скорость ползуна, равная скорости $\boldsymbol{v}$ стержня. Эту скорость ползуна можно рассматривать как слагающуюся из относительной скорости $\boldsymbol{v}_{отн}$ скольжения ползуна вдоль прорези кулисы и переносной скорости $\boldsymbol{v}_{пер}$, равной скорости той точки кулисы, с которой в данный момент совпадает ползун. Направления этих скоростей известны: скорость $\boldsymbol{v}_{отн}$ направлена вдоль OB, скорость $\boldsymbol{v}_{пер}$ — перпендикулярно к OB. Тогда, разлагая заданную скорость $\boldsymbol{v}$ по направлениям $\boldsymbol{v}_{отн}$ и $\boldsymbol{v}_{пер}$, найдем эти скорости. Из параллелограмма видно, что по модулю $v_{пер} = v\cos\varphi$.

Но, с другой стороны, переносная скорость $v_{\text{пер}} = \omega \cdot OB = \omega \dfrac{h}{\cos\varphi}$, где ω — угловая скорость кулисы. Сравнивая эти два значения $v_{\text{пер}}$, найдем угловую скорость кулисы:

$$\omega = \frac{v}{h}\cos^2\varphi.$$

§ 91 *. Сложение ускорений. Найдем зависимость между абсолютным, относительным и переносным ускорениями точки. Для этого воспользуемся равенством (74). Из него получаем

$$\boldsymbol{w}_a = \frac{d\boldsymbol{v}_a}{dt} = \frac{d\boldsymbol{v}_{\text{отн}}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{v}_{\text{пер}}}{dt}. \qquad (75)$$

Вычислим стоящие справа производные, которые, как мы увидим, в общем случае не равны $\boldsymbol{w}_{\text{отн}}$ и $\boldsymbol{w}_{\text{пер}}$ соответственно. Для этого нам понадобятся выражения векторов $\boldsymbol{v}_{\text{отн}}$, $\boldsymbol{w}_{\text{отн}}$, $\boldsymbol{v}_{\text{пер}}$, $\boldsymbol{w}_{\text{пер}}$.

Пусть положение движущейся точки M в подвижных осях $Oxyz$ определяется ее координатами x, y, z (рис. 215). Тогда, поскольку

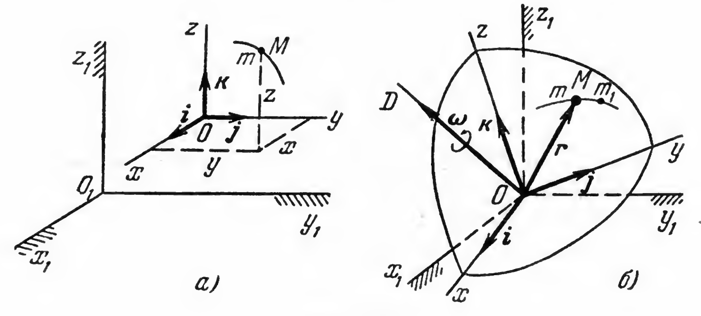


Рис. 215.

при вычислении $\boldsymbol{v}_{\text{отн}}$ и $\boldsymbol{w}_{\text{отн}}$ движение подвижных осей во внимание не принимается (их можно рассматривать как неподвижные), то проекции векторов $\boldsymbol{v}_{\text{отн}}$ и $\boldsymbol{w}_{\text{отн}}$ на оси $Oxyz$ при любом переносном движении определяются формулами (15′) и (17′) из § 64. Следовательно,

$$\boldsymbol{v}_{\text{отн}} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{w}_{\text{отн}} = \ddot{x}\boldsymbol{i} + \ddot{y}\boldsymbol{j} + \ddot{z}\boldsymbol{k}, \qquad (76)$$

где $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — единичные векторы (орты) осей $Oxyz$.

Дальнейший расчет зависит от характера переносного движения. Рассмотрим сначала случай, когда оно является поступательным.

Сложение ускорений при поступательном переносном движении. Если подвижная система отсчета $Oxyz$ перемещается по отношению к неподвижной $O_1x_1y_1z_1$ поступательно

(рис. 215, *а*), то очевидно, что при любом положении точки M будет

$$\boldsymbol{v}_{\text{пер}} = \boldsymbol{v}_O, \qquad \boldsymbol{w}_{\text{пер}} = \boldsymbol{w}_O, \tag{77}$$

где $\boldsymbol{v}_O$ и $\boldsymbol{w}_O$ — скорость и ускорение начала O.

Кроме того, при поступательном движении осей $Oxyz$ их орты, перемещаясь параллельно самим себе, остаются постоянными. Тогда из равенств (76) и (77) получим

$$\frac{d\boldsymbol{v}_{\text{отн}}}{dt} = \ddot{x}\boldsymbol{i} + \ddot{y}\boldsymbol{j} + \ddot{z}\boldsymbol{k} = \boldsymbol{w}_{\text{отн}}; \qquad \frac{d\boldsymbol{v}_{\text{пер}}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{v}_O}{dt} = \boldsymbol{w}_O = \boldsymbol{w}_{\text{пер}}.$$

В результате формула (75) дает

$$\boldsymbol{w}_{\text{а}} = \boldsymbol{w}_{\text{отн}} + \boldsymbol{w}_{\text{пер}}. \tag{78}$$

Следовательно, *при поступательном переносном движении абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме относительного и переносного ускорений*. Результат здесь аналогичен тому, который дает теорема о сложении скоростей.

Сложение ускорений при непоступательном переносном движении. Теорема Кориолиса. Допустим сначала, что переносное движение (т. е. движение подвижной системы отсчета $Oxyz$) является вращательным с угловой скоростью ω (рис. 215, *б*). При этом ось OD может быть или неподвижной (§ 74) или же мгновенной осью вращения (когда неподвижна точка O, см. § 86). В обоих случаях орты $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ уже не являются постоянными, так как, поворачиваясь вместе с осями $Oxyz$, они изменяют свои направления, что при вычислении $\boldsymbol{w}_{\text{отн}}$ не учитывалось. Поэтому получим из равенств (76), справедливых при любом переносном движении,

$$\frac{d\boldsymbol{v}_{\text{отн}}}{dt} = (\ddot{x}\boldsymbol{i} + \ddot{y}\boldsymbol{j} + \ddot{z}\boldsymbol{k}) + \left(\dot{x}\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} + \dot{y}\frac{d\boldsymbol{j}}{dt} + \dot{z}\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}\right) = \boldsymbol{w}_{\text{отн}} + \boldsymbol{w}_1,$$

где через $\boldsymbol{w}_1$ обозначена вторая скобка в правой части равенства. Вычисляя $\boldsymbol{w}_1$ с помощью формул Пуассона (69), найдем

$$\boldsymbol{w}_1 = \dot{x}(\omega \times \boldsymbol{i}) + \dot{y}(\omega \times \boldsymbol{j}) + \dot{z}(\omega \times \boldsymbol{k}) = \\ = \omega \times (\dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k}) = \omega \times \boldsymbol{v}_{\text{отн}}$$

и окончательно будем иметь

$$\frac{d\boldsymbol{v}_{\text{отн}}}{dt} = \boldsymbol{w}_{\text{отн}} + \boldsymbol{w}_1, \quad \text{где} \quad \boldsymbol{w}_1 = \omega \times \boldsymbol{v}_{\text{отн}}. \tag{79}$$

В этом равенстве величина $\boldsymbol{w}_{\text{отн}}$ учитывает изменение вектора $\boldsymbol{v}_{\text{отн}}$ только при относительном движении точки M, а добавочный член $\boldsymbol{w}_1$ учитывает то изменение вектора $\boldsymbol{v}_{\text{отн}}$, которое происходит при его повороте вместе с трехгранником $Oxyz$ вокруг оси OD, т. е. в переносном движении (см. еще рис. 221, *а*).

Далее, при вращательном движении скорость и ускорение любой неизменной связанной с осями $Oxyz$ точки m определяются по

формулам (67) и (68), как и для точек твердого тела. Но согласно равенствам (73) $\boldsymbol{v}_{\text{пер}}=\boldsymbol{v}_m$, $\boldsymbol{w}_{\text{пер}}=\boldsymbol{w}_m$; следовательно, формулы (67) и (68) дают

$$\boldsymbol{v}_{\text{пер}}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r},\qquad \boldsymbol{w}_{\text{пер}}=(\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r})+(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{\text{пер}}),\tag{80}$$

где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки m, совпадающий в данный момент времени с радиусом-вектором движущейся точки M. Тогда

$$\frac{d\boldsymbol{v}_{\text{пер}}}{dt}=\left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r}\right)+\left(\boldsymbol{\omega}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right).$$

Поскольку стоящая слева производная входит в правую часть равенства (75), определяющего абсолютное ускорение точки M, т. е. ее ускорение в осях $Ox_1y_1z_1$, то и входящая в правую часть производная от радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ даст скорость точки M в тех же осях, т. е. ее абсолютную скорость. Следовательно, здесь $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{v}_{\text{a}}=\boldsymbol{v}_{\text{отн}}+\boldsymbol{v}_{\text{пер}}$ и, кроме того, $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}=\boldsymbol{\varepsilon}$. Поэтому

$$\frac{d\boldsymbol{v}_{\text{пер}}}{dt}=(\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r})+(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{\text{пер}})+(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{\text{отн}}).$$

Отсюда, учитывая второе из равенств (80), получим

$$\frac{d\boldsymbol{v}_{\text{пер}}}{dt}=\boldsymbol{w}_{\text{пер}}+\boldsymbol{w}_2,\qquad \text{где}\quad \boldsymbol{w}_2=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{\text{отн}}.\tag{81}$$

Здесь величина $\boldsymbol{w}_{\text{пер}}$ учитывает изменение вектора $\boldsymbol{v}_{\text{пер}}$ только в переносном движении, поскольку она вычисляется как ускорение точки m, неизменно связанной с осями $Ox_1y_1z_1$. Добавочный же член $\boldsymbol{w}_2$ учитывает то изменение вектора $\boldsymbol{v}_{\text{пер}}$, которое происходит при относительном движении точки M, поскольку в результате этого движения точка M приходит из положения m в новое положение m_1, где значение $\boldsymbol{v}_{\text{пер}}$ будет уже другим (см. еще рис. 221, *б*).

Мы рассмотрели случай вращательного переносного движения. Но и в общем случае, когда переносное движение, как и движение свободного твердого тела (см. § 88), слагается из поступательного и вращательного, равенства (79) и (81) сохраняют свой вид, с той лишь разницей, что в равенстве (81) величина $\boldsymbol{w}_{\text{пер}}$, вместо формулы (80), будет вычисляться по формуле (72).

Подставляя теперь величины (79) и (81) в равенство (75), получим

$$\boldsymbol{w}_{\text{a}}=\boldsymbol{w}_{\text{отн}}+\boldsymbol{w}_{\text{пер}}+\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2.\tag{82}$$

Введем обозначение

$$\boldsymbol{w}_{\text{кор}}=\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2=2\,(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{\text{отн}}).\tag{83}$$

Величина $\boldsymbol{w}_{\text{кор}}$, характеризующая изменение вектора относительной скорости $\boldsymbol{v}_{\text{отн}}$ в переносном движении и вектора переносной

скорости $\boldsymbol{v}_{пер}$ в относительном движении, называется *поворотным* или *кориолисовым ускорением точки*. Тогда из равенства (82) окончательно получим

$$\boldsymbol{w}_{а} = \boldsymbol{w}_{отн} + \boldsymbol{w}_{пер} + \boldsymbol{w}_{кор}. \qquad (84)$$

Формула (84) выражает следующую теорему Кориолиса[1]): *абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме трех ускорений: относительного, характеризующего изменение относительной скорости точки в относительном движении, переносного, характеризующего изменение переносной скорости точки в переносном движении, и кориолисова, характеризующего изменение относительной скорости точки в переносном движении и переносной скорости точки в относительном движении.*

Если переносное движение является поступательным, то $\boldsymbol{\omega} = 0$ и $\boldsymbol{w}_{кор} = 0$, и равенство (84) переходит в (78).

Вычисление относительного, переносного и кориолисова ускорений. Вопрос о вычислении относительного и переносного ускорений точки был уже рассмотрен при доказательстве теоремы; определяются эти величины по известным нам формулам кинематики. В самом деле, так как при вычислении $\boldsymbol{w}_{отн}$ движение подвижных осей учитывать не надо, то $\boldsymbol{w}_{отн}$ вычисляется обычными методами кинематики точки (§§ 64, 67). При вычислении же $\boldsymbol{w}_{пер}$ не надо учитывать относительное движение точки; следовательно, $\boldsymbol{w}_{пер}$ вычисляется как ускорение точки некоторого твердого тела, неизменно связанного с осями $Oxyz$ и движущегося вместе с ними, т. е. методами кинематики твердого тела (§§ 76, 84, 87, 88). Кориолисово ускорение вычисляется по формуле (83):

$$\boldsymbol{w}_{кор} = 2(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_{отн}), \qquad (85)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость переносного движения.

Таким образом, *кориолисово ускорение точки равно удвоенному векторному произведению угловой скорости переносного движения на относительную скорость точки*. Если угол между векторами $\boldsymbol{v}_{отн}$ и $\boldsymbol{\omega}$ обозначить через α, то по модулю

$$w_{кор} = 2\,|\,\omega v_{отн}\,|\,\sin\alpha. \qquad (86)$$

Направлен вектор $\boldsymbol{w}_{кор}$ так же, как вектор $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_{отн}$, т. е. перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{v}_{отн}$ в ту сторону, откуда кратчайшее совмещение $\boldsymbol{\omega}$ с $\boldsymbol{v}_{отн}$ видно происходящим против хода часовой стрелки (рис. 216, *а*).

---

[1]) Гюстав Кориолис (1792—1843) — французский ученый, известный своими трудами по теоретической и прикладной механике.

Из рис. 216, *а* видно также, что направление вектора $\boldsymbol{w}_{\text{кор}}$ можно получить, спроектировав вектор $\boldsymbol{v}_{\text{отн}}$ на плоскость П, перпендикулярную $\boldsymbol{\omega}$, и повернув эту проекцию $\boldsymbol{v}_{\text{отн}}^{\text{П}}$ на 90° в сторону переносного вращения.

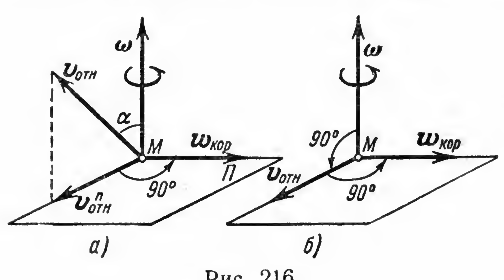


Рис. 216.

Если относительная траектория — плоская кривая и перемещается все время в своей плоскости, то угол $\alpha = 90°$ (рис. 216, *б*), и в этом случае по модулю

$$w_{\text{кор}} = 2\,|\,\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_{\text{отн}}\,|. \quad (86')$$

Кроме того, в этом случае, как видно из рис. 216, *б*, *направление* $\boldsymbol{w}_{\text{кор}}$ *можно найти, повернув вектор относительной скорости* $\boldsymbol{v}_{\text{отн}}$ *на* 90° *в сторону переносного вращения* (т. е. по ходу или против хода часовой стрелки, в зависимости от направления вращения).

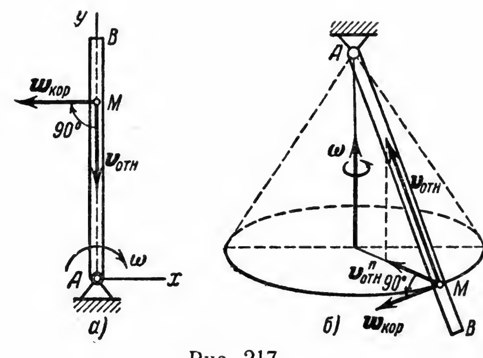


Рис. 217.

На рис. 217 для иллюстрации приведенных правил показано направление кориолисова ускорения шарика *M*, движущегося вдоль трубки *AB* в случаях, когда трубка вращается в плоскости чертежа (рис. 217, *а*) и когда она при вращении описывает конус (рис. 217, *б*).

Из формулы (86) видно, что кориолисово ускорение может обращаться в нуль в следующих случаях:

1) Когда $\omega = 0$, т. е. когда *переносное движение является поступательным* (формула 78) или если угловая скорость переносного вращения в данный момент времени обращается в нуль.

2) Когда $v_{\text{отн}} = 0$, т. е. когда относительная скорость в данный момент времени обращается в нуль.

3) Когда $\alpha = 0$, или $\alpha = 180°$, т. е. когда относительное движение происходит по направлению, параллельному оси переносного вращения или если в данный момент времени вектор $\boldsymbol{v}_{\text{отн}}$ параллелен этой оси.

§ 92. Решение задач. А. Переносное движение поступательное. В случае, когда переносное движение является поступательным, характер задач и методы их решения аналогичны задачам на сложение скоростей (§ 90).

Задача 85. Клин, движущийся горизонтально с ускорением w_1, перемещает вдоль вертикальных направляющих стержень AB (рис. 218). Определить ускорение стержня, если угол клина равен α.

Решение. Абсолютное ускорение $\boldsymbol{w}_A$ точки A стержня направлено по вертикали вверх. Его можно рассматривать как слагающееся из относительного ускорения $\boldsymbol{w}_{\text{отн}}$, направленного вдоль щеки клина, и переносного ускорения $\boldsymbol{w}_{\text{пер}}$, равного ускорению клина $\boldsymbol{w}_1$ (так как переносное движение, т. е. движение клина, является при этом поступательным). Строя на основании равенства (78) соответствующий параллелограмм и учитывая, что $w_{\text{пер}} = w_1$, найдем:

$$w_A = w_1 \operatorname{tg} \alpha.$$

Величина w_A и определяет ускорение стержня.

Б. Переносное движение вращательное. Рассмотрим в общем виде, как вычисляется $\boldsymbol{w}_a$, если переносное движение является вращением вокруг некоторой неподвижной оси.

Пусть точка M движется по некоторой кривой AMB вдоль тела (например, шара), вращающегося замедленно вокруг оси BA (рис. 219). Чтобы найти абсолютное ускорение точки в некоторый момент времени t_1, надо в этот момент знать: 1) положение движущейся точки на кривой AB; 2) относительную скорость точки $\boldsymbol{v}_{\text{отн}}$; 3) угловую скорость ω и угловое ускорение ε тела (т. е. ω и ε переносного движения). Если эти величины не заданы, их следует предварительно найти из условий задачи.

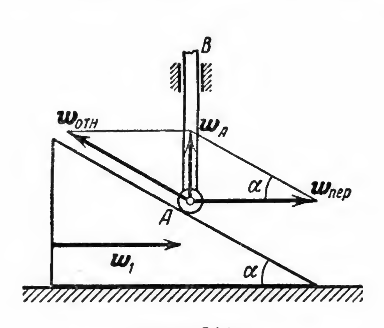


Рис. 218.

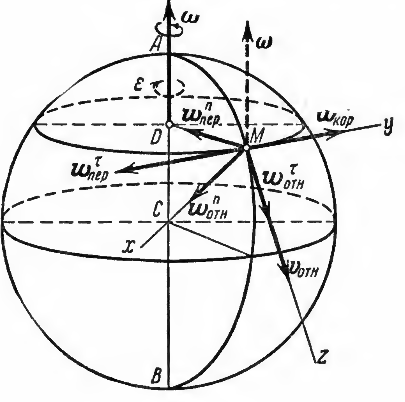


Рис. 219.

После этого надо *изобразить положение движущейся точки в момент* t_1 и показать на чертеже векторы $\boldsymbol{v}_{\text{отн}}$ и $\boldsymbol{\omega}$. Дальнейший расчет сводится к следующему.

1) Определение $\boldsymbol{w}_{\text{отн}}$. Мысленно останавливаем вращение тела и вычисляем ускорение точки в ее движении вдоль AB по формулам кинематики точки. Если кривая AB задана, то будет (§ 67):

$$w_{\text{отн}}^{\tau} = \frac{dv_{\text{отн}}}{dt}, \quad w_{\text{отн}}^{n} = \frac{v_{\text{отн}}^2}{\rho_{\text{отн}}},$$

где $\rho_{\text{отн}}$ — радиус кривизны кривой AB в точке M. Если относительное движение задано координатным способом, то $v_{\text{отн}}$ и $w_{\text{отн}}$ вычисляются по формулам § 64.

2) Определение $w_{пер}$. Вычисляя ускорение той точки тела, с которой в данный момент совпадает точка M, находим переносное ускорение по формулам кинематики твердого тела (§ 76):

$$w^{\tau}_{пер} = h\varepsilon, \quad w^{n}_{пер} = h\omega^2,$$

где $h = MD$ — расстояние точки M от оси вращения в момент t_1.

3) Определение $w_{кор}$. Эти расчеты производятся по правилам, указанным в конце § 91.

4) Определение $w_{а}$. Изображаем все вычисленные векторы на чертеже (с учетом их направлений) и по теореме Кориолиса находим:

$$\boldsymbol{w}_{а} = \boldsymbol{w}^{\tau}_{отн} + \boldsymbol{w}^{n}_{отн} + \boldsymbol{w}^{\tau}_{пер} + \boldsymbol{w}^{n}_{пер} + \boldsymbol{w}_{кор}.$$

Если сумму стоящих справа векторов трудно найти геометрически, то, проводя какие-нибудь оси координат $Mxyz$ (см. рис. 219), вычисляем проекции всех слагаемых векторов на эти оси. Тогда по теореме о проекции суммы векторов на ось будет

$$w_{аx} = \sum w_{ix}, \quad w_{аy} = \sum w_{iy}, \quad w_{аz} = \sum w_{iz}.$$

После этого находим:

$$w_{а} = \sqrt{w^2_{аx} + w^2_{аy} + w^2_{аz}}.$$

Примечание. При подсчете $w_{а}$ *нельзя считать*

$$w_{а} = \sqrt{w^2_{отн} + w^2_{пер} + w^2_{кор}},$$

так как в общем случае векторы $\boldsymbol{w}_{отн}$, $\boldsymbol{w}_{пер}$, $\boldsymbol{w}_{кор}$ не будут взаимно перпендикулярными.

Задача 86. Кулиса OA вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси O (рис. 220). По прорези кулисы скользит ползун B с постоянной относительной скоростью u. Определить абсолютное ускорение ползуна в зависимости от его расстояния x до оси O.

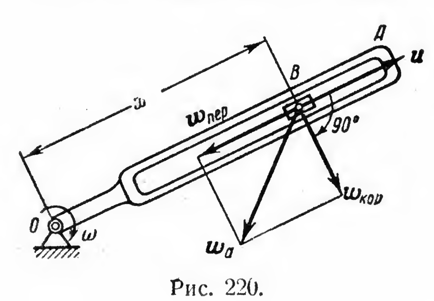


Рис. 220.

Решение. Остановив в момент t_1 кулису, мы находим, что относительное движение ползуна вдоль кулисы является равномерным и прямолинейным; следовательно, $w_{отн} = 0$.

Движение кулисы OA будет для ползуна B переносным. Следовательно, переносное ускорение $\boldsymbol{w}_{пер}$ ползуна равно ускорению той точки кулисы, с которой в данный момент совпадает ползун. Так как эта точка кулисы движется по окружности радиуса $OB = x$ и $\omega = \text{const}$, то вектор $\boldsymbol{w}_{пер} = \boldsymbol{w}^{n}_{пер}$ и направлен вдоль BO, а по модулю $w_{пер} = w^{n}_{пер} = \omega^2 x$.

Кориолисово ускорение $w_{кор} = 2\omega u$, так как движение плоское. Повернув вектор относительной скорости $\boldsymbol{u}$ вокруг точки B на 90° в сторону переносного вращения (т. е. по ходу часовой стрелки), находим направление $\boldsymbol{w}_{кор}$.

По теореме Кориолиса

$$\boldsymbol{w}_{а} = \boldsymbol{w}_{отн} + \boldsymbol{w}_{пер} + \boldsymbol{w}_{кор}.$$

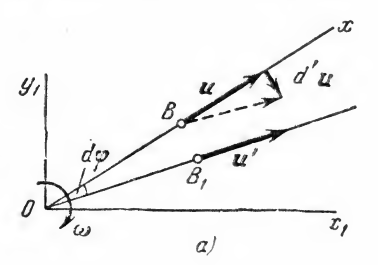
В данном случае $w_{отн}=0$, а $w_{кор}$ перпендикулярно к $w_{пер}$. Следовательно,

$$w_a = \sqrt{w_{пер}^2 + w_{кор}^2} = \omega \sqrt{\omega^2 x^2 + 4u^2}.$$

Пользуясь данными этой задачи, покажем на частном примере, как появляются величины w_1 и w_2, составляющие $w_{кор}$ (равенство 83).

Направим вдоль прорези кулисы подвижную ось Ox и изобразим на ней ползун в виде точки B (рис. 221, *а*); ось Ox вращается вокруг центра O, совершая по отношению к неподвижным осям Ox_1y_1 переносное движение. Так как в данном случае вектор относительной скорости u при относительном перемещении точки B вдоль оси Ox не изменяется, то $w_{отн}=0$. Но при переносном движении вектор u повернется за время dt вместе с осью Ox на угол $d\varphi = \omega\, dt$ и получит приращение $d'u$ (штрих при d означает, что это — добавочное приращение). Поскольку при этом повороте модуль вектора u не изменяется, то вектор $d'u$ перпендикулярен к u, а $|d'u| = u \cdot d\varphi = u\omega\, dt$. В результате точка B получит добавочное ускорение w_1, направленное так же, как вектор $d'u$, т. е. перпендикулярно к оси Ox, и численно равное

$$w_1 = \frac{|d'u|}{dt} = u\omega. \qquad \text{(а)}$$



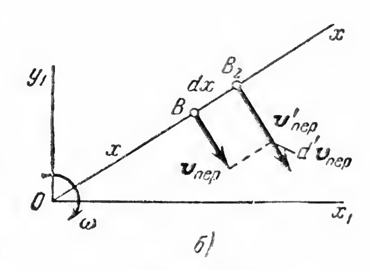


Рис. 221.

Скорость $v_{пер}$ точки B при переносном движении (повороте оси Ox) изменяется в данном случае по направлению, в результате чего точка получает вычисленное выше переносное ускорение, показанное на рис. 220. Но вектор $v_{пер}$ получит приращение и при относительном перемещении точки B в положение B_2 (рис. 221, *б*), так как в положении B величина $v_{пер} = \omega x$, а в положении B_2 будет $v'_{пер} = \omega(x + dx)$. Следовательно, поскольку $dx = u\, dt$, то $|d'v_{пер}| = \omega\, dx = \omega u\, dt$. В результате точка B получит еще одно добавочное ускорение w_2, направленное так же, как вектор $v_{пер}$, т. е. как w_1, и численно равное

$$w_2 = \frac{|d'v_{пер}|}{dt} = \omega u. \qquad \text{(б)}$$

Поскольку векторы w_1 и w_2 имеют одинаковые направления, то, сложив их, мы найдем полное добавочное ускорение, которое точка B получает вследствие изменения вектора $v_{отн}$ в переносном движении и вектора $v_{пер}$ в относительном движении. Это ускорение, численно равное $w_1 + w_2$, т. е. $2\omega u$, и будет кориолисовым ускорением точки B.

Задача 87. Эксцентрик, представляющий собою круглый диск радиуса R, вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси O, проходящей через край диска (рис. 222). По окружности диска с постоянной относительной скоростью u скользит штифт M, начиная свое движение из точки A. Определить абсолютное ускорение штифта в произвольный момент времени t. Направления движений показаны на чертеже.

Решение. В момент времени t штифт находится от точки A на расстоянии $s = \breve{AM} = ut$. Следовательно, в этот момент времени $\angle AOM = \alpha$ будет равен

$$\alpha = \frac{s}{2R} = \frac{u}{2R}t, \tag{а}$$

так как угол α равен половине центрального угла ACM.

Остановив в момент t диск, найдем, что относительное движение штифта M происходит по окружности радиуса R. Так как $v_{\text{отн}} = u = \text{const}$, то

$$w_{\text{отн}}^{\tau} = \frac{du}{dt} = 0; \qquad w_{\text{отн}}^{n} = \frac{u^2}{R}. \tag{б}$$

Направлен вектор $\boldsymbol{w}_{\text{отн}} = \boldsymbol{w}_{\text{отн}}^n$ по радиусу MC.

Движение диска будет для штифта M переносным. Следовательно, переносное ускорение $\boldsymbol{w}_{\text{пер}}$ штифта равно ускорению той точки диска, с которой в данный момент совпадает штифт. Эта точка диска движется по окружности радиуса $OM = 2R\cos\alpha$. Так как для диска $\omega = \text{const}$, то $\varepsilon = 0$ и

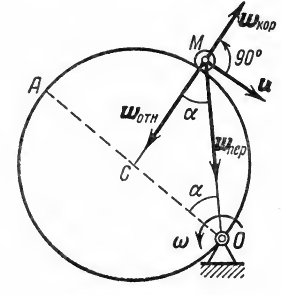


Рис. 222.

$$w_{\text{пер}}^{\tau} = OM \cdot \varepsilon = 0;$$
$$w_{\text{пер}}^{n} = OM \cdot \omega^2 = 2R\omega^2 \cos\alpha. \tag{в}$$

Направлен вектор $\boldsymbol{w}_{\text{пер}} = \boldsymbol{w}_{\text{пер}}^n$ вдоль линии MO.

Поскольку движение происходит в одной плоскости, то и в данном случае

$$w_{\text{кор}} = 2\omega u. \tag{г}$$

Направление $\boldsymbol{w}_{\text{кор}}$ получаем, повернув вектор $\boldsymbol{v}_{\text{отн}} = \boldsymbol{u}$ вокруг точки M на 90° в сторону переносного движения (т. е. против хода часовой стрелки).

Абсолютное ускорение штифта M равно

$$\boldsymbol{w}_{\text{а}} = \boldsymbol{w}_{\text{отн}} + \boldsymbol{w}_{\text{пер}} + \boldsymbol{w}_{\text{кор}}.$$

В данном случае векторы $\boldsymbol{w}_{\text{отн}}$ и $\boldsymbol{w}_{\text{кор}}$ направлены вдоль одной прямой и могут быть заменены одним вектором $\boldsymbol{w}_1$, направленным вдоль той же прямой, причем численно $w_1 = w_{\text{отн}} - w_{\text{кор}}$.

Складывая затем векторы $\boldsymbol{w}_1$ и $\boldsymbol{w}_{\text{пер}}$ по правилу параллелограмма, найдем окончательно:

$$w_{\text{а}} = \sqrt{w_{\text{пер}}^2 + (w_{\text{отн}} - w_{\text{кор}})^2 + 2w_{\text{пер}}(w_{\text{отн}} - w_{\text{кор}})\cos\alpha},$$

где значения α, $w_{\text{отн}}$, $w_{\text{пер}}$, $w_{\text{кор}}$ определяются равенствами (а), (б), (в), (г).

Задача 88. Тело движется в северном полушарии вдоль меридиана с севера на юг поступательно (рис. 223) со скоростью $v_{\text{отн}} = \boldsymbol{u}$ *м/сек*. Найти величину и направление кориолисова ускорения тела, когда оно находится на широте λ.

Решение. Пренебрегая размерами тела, рассматриваем его как точку. Относительная скорость $\boldsymbol{u}$ тела образует с земной осью угол λ. Следовательно,

$$w_{\text{кор}} = 2\omega u \sin\lambda,$$

где ω — угловая скорость вращения Земли.

Таким образом, наибольшее кориолисово ускорение тело имеет на полюсе при $\lambda = 90°$. По мере приближения к экватору величина $w_{кор}$ убывает и на экваторе при $\lambda = 0$ обращается в нуль (на экваторе вектор $v_{отн} = u$ параллелен оси вращения Земли).

Направление $w_{кор}$ находим по правилу векторного произведения. Так как $w_{кор} = 2(\omega \times u)$, получаем, что вектор $w_{кор}$ направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы u и ω, т. е. перпендикулярно плоскости меридионального сечения, на восток, откуда кратчайшее совмещение вектора ω с вектором u видно против хода часовой стрелки.

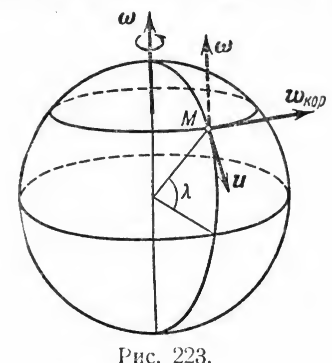


Рис. 223.

Вопрос о том, как изменяется движение тел на земной поверхности вследствие наличия кориолисова ускорения,

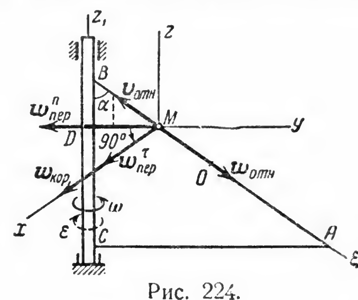


Рис. 224.

рассматривается в динамике. Однако из полученной формулы видно, что величина $w_{кор}$ обычно мала, так как угловая скорость вращения Земли:

$$\omega \approx \frac{2\pi}{24 \cdot 3600}\ 1/сек.$$

Поэтому, очевидно, для движений по земной поверхности, происходящих не с очень большими скоростями u, кориолисовым ускорением практически можно пренебречь.

Задача 89. Прямоугольный треугольник ABC, гипотенуза которого $AB = 2a = 20$ *см*, а $\angle CBA = \alpha = 60°$, вращается вокруг оси Cz_1 (рис. 224) по закону $\varphi = 10t - 2t^2$. Вдоль гипотенузы AB около ее середины O колеблется точка M по закону $\xi = a\cos(\pi t/3)$ (ось $O\xi$ направлена вдоль OA). Найти абсолютное ускорение точки M в момент $t_1 = 2$ *сек*.

Решение. 1) Определяем положение точки M на ее относительной траектории AB в момент времени t_1. Из уравнения движения находим:

$$\xi_1 = a\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{a}{2}.$$

Следовательно, точка M находится в момент t_1 на середине отрезка OB. Изображаем это положение на чертеже.

2) Определение $v_{отн}$. Так как относительное движение является прямолинейным, то

$$v_{отн} = \frac{d\xi}{dt} = -\frac{\pi}{3} a \sin\left(\frac{\pi}{3} t\right).$$

В момент $t_1 = 2$ *сек*

$$v_{отн\,1} = -\frac{\pi}{6} a\sqrt{3}; \qquad |v_{отн\,1}| = \frac{5}{3}\pi\sqrt{3}\ см/сек.$$

Знак минус указывает, что вектор $\boldsymbol{v}_{\text{отн}}$ направлен в момент t_1 от M к B.

3) Определение ω и ε. Беря производные, находим:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 10 - 4t, \quad \omega_1 = 2 \ 1/сек,$$

где ω_1 — значение ω в момент $t_1 = 2$ *сек*;

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = -4 \ 1/сек^2.$$

Знаки указывают, что с момента t_1 вращение направлено против хода часовой стрелки (если смотреть с конца оси Cz_1) и является замедленным.

4) Определение $\boldsymbol{w}_{\text{отн}}$. Так как относительное движение является прямолинейным, то

$$w_{\text{отн}} = \frac{dv_{\text{отн}}}{dt} = -\frac{\pi^2}{9} a \cos\left(\frac{\pi}{3} t\right).$$

В момент $t_1 = 2$ *сек*

$$w_{\text{отн }1} = \frac{\pi^2}{18} a = \frac{5}{9} \pi^2 \ см/сек^2.$$

5) Определение $\boldsymbol{w}_{\text{пер}}$. Движение треугольника будет для точки M переносным. Следовательно, переносное ускорение $\boldsymbol{w}_{\text{пер}}$ точки M равно ускорению той точки треугольника, с которой в данный момент совпадает точка M. Эта точка треугольника движется по окружности радиуса $MD = h$, причем в момент $t_1 = 2$ *сек*

$$h = \frac{a}{2} \sin\alpha = 5\frac{\sqrt{3}}{2} \ см.$$

Таким образом, в этот момент

$$w_{\text{пер}}^{\tau} = \varepsilon h = -10\sqrt{3} \ см/сек^2; \quad w_{\text{пер}}^{n} = \omega^2 h = 10\sqrt{3} \ см/сек^2.$$

Вектор $\boldsymbol{w}_{\text{пер}}^{\tau}$ направлен перпендикулярно плоскости ABC в сторону, противоположную направлению вращения треугольника. Вектор $\boldsymbol{w}_{\text{пер}}^{n}$ направлен вдоль линии MD к оси вращения Cz_1.

6) Определение $\boldsymbol{w}_{\text{кор}}$. По модулю $w_{\text{кор}}$ в момент $t_1 = 2$ *сек* равняется

$$w_{\text{кор}} = 2\,|\,\omega v_{\text{отн}}\,|\, \sin\alpha = 10\pi \ см/сек^2,$$

так как угол между $v_{\text{отн}}$ и осью Cz_1 равен в данном случае α.

Проектируя вектор $\boldsymbol{v}_{\text{отн}}$ на плоскость, перпендикулярную оси Cz_1 (проекция направлена вдоль линии MD), и повернув эту проекцию на 90° в сторону переносного вращения, т. е. против хода часовой стрелки, найдем направление $\boldsymbol{w}_{\text{кор}}$ (оно в данном случае совпадает с направлением $\boldsymbol{w}_{\text{пер}}^{\tau}$).

7) Определение $\boldsymbol{w}_{\text{а}}$. Абсолютное ускорение точки M в момент t_1 равно:

$$\boldsymbol{w}_{\text{а}} = \boldsymbol{w}_{\text{отн}} + \boldsymbol{w}_{\text{пер}}^{\tau} + \boldsymbol{w}_{\text{пер}}^{n} + \boldsymbol{w}_{\text{кор}}.$$

Для нахождения модуля w_a проводим оси $Oxyz$ (см. рис. 224) и вычисляем проекции всех векторов на эти оси. Получаем

$$w_{ax} = w_{кор} + |w_{пер}^{\tau}| = 10\pi + 10\sqrt{3} \approx 48,7 \ см/сек^2,$$

$$w_{ay} = w_{отн} \sin\alpha - w_{пер}^{n} = \frac{5\pi^2}{18}\sqrt{3} - 10\sqrt{3} \approx -12,6 \ см/сек^2,$$

$$w_{az} = -w_{отн}\cos\alpha = -\frac{5}{18}\pi^2 \approx -2,7 \ см/сек^2.$$

После этого находим:

$$w_a = \sqrt{w_{ax}^2 + w_{ay}^2 + w_{az}^2} \approx 50,4 \ см/сек^2.$$

Вектор w_a можно построить по его составляющим вдоль осей $Oxyz$.

ГЛАВА XV

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 93. Сложение поступательных движений. Если тело движется относительно подвижных осей $Oxyz$ (см. рис. 209), а эти оси совершают одновременно переносное движение по отношению к неподвижным осям $Ox_1y_1z_1$, то результирующее (абсолютное) движение тела называется сложным (см. § 89).

Задачей кинематики в этом случае является нахождение зависимостей между характеристиками относительного, переносного и абсолютного движений. Основными кинематическими характеристиками движения тела, как мы знаем, являются его поступательные и угловые скорости и ускорения. Мы ограничимся в дальнейшем определением зависимостей только между поступательными и угловыми скоростями движений.

Рассмотрим сначала случай, когда относительное движение тела является поступательным со скоростью $\boldsymbol{v}_1$, а переносное движение — тоже поступательное со скоростью $\boldsymbol{v}_2$. Тогда все точки тела в относительном движении будут иметь скорость $\boldsymbol{v}_1$, а в переносном — скорость $\boldsymbol{v}_2$. Следовательно, по теореме сложения скоростей, все точки тела в абсолютном движении будут иметь одну и ту же скорость $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, т. е. абсолютное движение тела будет поступательным.

Итак, *при сложении двух поступательных движений со скоростями $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ результирующее движение тела также является поступательным со скоростью $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$.*

Задача сложения скоростей в этом случае сводится к задаче кинематики точки (§ 90).

§ 94. Сложение вращений вокруг двух параллельных осей. Рассмотрим случай, когда относительное движение тела является вращением с угловой скоростью ω_1 вокруг оси aa', укрепленной на кривошипе ba (рис. 225, *а*), а переносное — вращением кривошипа ba вокруг оси bb', параллельной aa', с угловой скоростью ω_2. Тогда движение тела будет плоскопараллельным по отношению к плоскости, перпендикулярной к осям. Здесь возможны три частных случая.

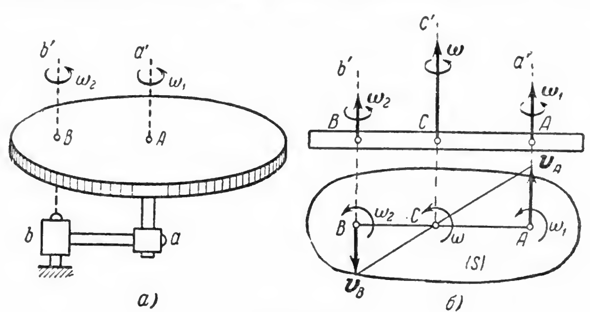


Рис. 225.

1) Вращения направлены в одну сторону. Изобразим сечение (S) тела плоскостью, перпендикулярной осям (рис. 225, *б*). Следы осей в сечении (S) обозначим буквами A и B. Легко видеть, что точка A, как лежащая на оси Aa', получает скорость только от вращения вокруг оси Bb', следовательно, $v_A = \omega_2 \cdot AB$. Точно так же $v_B = \omega_1 \cdot AB$. При этом векторы $\boldsymbol{v}_A$ и $\boldsymbol{v}_B$ параллельны друг другу (оба перпендикулярны AB) и направлены в разные стороны. Тогда точка C (см. § 81, рис. 180, *б*) является мгновенным центром скоростей ($v_C = 0$), а следовательно, ось Cc', параллельная осям Aa' и Bb', является ***мгновенной осью вращения*** тела.

Для определения угловой скорости ω абсолютного вращения тела вокруг оси Cc' и положения самой оси, т. е. точки C, воспользуемся равенством (§ 81, формула 55)

$$\omega = \frac{v_B}{BC} = \frac{v_A}{AC}.$$

Из свойств пропорции получим:

$$\omega = \frac{v_A + v_B}{AC + BC} = \frac{v_A + v_B}{AB}.$$

Подставляя в это и предыдущее равенства $v_A = \omega_2 \cdot AB$, $v_B = \omega_1 \cdot AB$, найдем окончательно:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2, \tag{87}$$

$$\frac{\omega_1}{BC} = \frac{\omega_2}{AC} = \frac{\omega}{AB}. \tag{88}$$

Итак, *если тело участвует одновременно в двух направленных в одну сторону вращениях вокруг параллельных осей, то его результирующее движение будет мгновенным вращением с абсолютной угловой скоростью* $\omega = \omega_1 + \omega_2$ *вокруг мгновенной оси, параллельной данным*; положение этой оси определяется пропорцией (88).

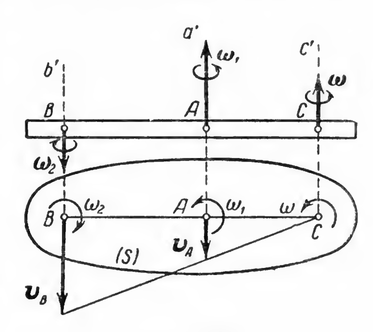


Рис. 226.

С течением времени мгновенная ось вращения Cc' будет менять свое положение, описывая цилиндрическую поверхность.

2) Вращения направлены в разные стороны. Изобразим опять сечение (S) тела (рис. 226) и допустим для определенности, что $\omega_1 > \omega_2$. Тогда, рассуждая, как в предыдущем случае, найдем, что скорости точек A и B будут численно равны: $v_A = \omega_2 \cdot AB$, $v_B = \omega_1 \cdot AB$; при этом $\boldsymbol{v}_A$ и $\boldsymbol{v}_B$ параллельны друг другу и направлены в одну сторону. Тогда мгновенная ось вращения проходит через точку C (рис. 226), причем

$$\omega = \frac{v_B}{BC} = \frac{v_A}{AC}$$

или по свойствам пропорций

$$\omega = \frac{v_B - v_A}{BC - AC} = \frac{v_B - v_A}{AB}.$$

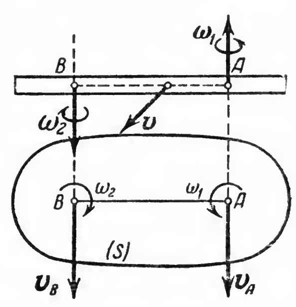


Рис. 227.

Подставляя в эти равенства значения v_A и v_B, найдем окончательно

$$\omega = \omega_1 - \omega_2, \tag{89}$$

$$\frac{\omega_1}{BC} = \frac{\omega_2}{AC} = \frac{\omega}{AB}. \tag{90}$$

Итак, в этом случае результирующее движение также является мгновенным вращением с абсолютной угловой скоростью $\omega = \omega_1 - \omega_2$ вокруг оси Cc', положение которой определяется пропорцией (90).

Полученные результаты показывают, что векторы угловых скоростей при вращении вокруг параллельных осей складываются так же, как векторы параллельных сил (§ 17).

3) Пара вращений. Рассмотрим частный случай, когда вращения вокруг параллельных осей направлены в разные стороны (рис. 227), но по модулю $\omega_1 = \omega_2$. Такая совокупность вращений называется *парой вращений*, а векторы ω_1 и ω_2 образуют *пару угловых скоростей*. В этом случае получаем, что $v_A = \omega_2 \cdot AB$ и $v_B = \omega_1 \cdot AB$, т. е. $\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_B$. Тогда (см. § 81, рис. 180, *а*) мгновенный

центр скоростей будет находиться в бесконечности и все точки тела в данный момент будут иметь одинаковые скорости $v = \omega_1 \cdot AB$.

Следовательно, результирующее движение тела будет *поступательным* (или *мгновенно поступательным*) движением со скоростью $\boldsymbol{v}$, численно равной $\omega_1 \cdot AB$ и направленной перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$; направление вектора $\boldsymbol{v}$ определяется так же, как в статике определялось направление момента $\boldsymbol{m}$ пары сил (§ 45). Иначе говоря, *пара вращений эквивалентна поступательному (или мгновенно поступательному) движению со скоростью* $\boldsymbol{v}$, *равной моменту пары угловых скоростей этих вращений.*

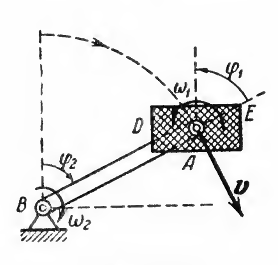


Рис. 228.

Примером такого движения является поступательное движение велосипедной педали DE относительно рамы велосипеда (рис. 228), являющееся результатом относительного вращения педали вокруг оси A, укрепленной на кривошипе BA, и переносного вращения кривошипа BA вокруг оси B. Угловые скорости $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ этих вращений по модулю равны, так как в любой момент времени угол поворота φ_1 педали относительно кривошипа BA равен углу поворота φ_2 кривошипа. Скорость поступательного движения педали $v = \omega_2 \cdot AB$.

§ 95*. Цилиндрические зубчатые передачи. Полученные в предыдущем параграфе результаты могут быть использованы для кинематического расчета зубчатых передач, образованных цилиндрическими зубчатыми колесами (шестернями). Рассмотрим основные виды этих передач.

1) *Рядовой* называется передача, в которой все оси колес, находящихся в последовательном зацеплении, неподвижны. При этом одно из колес (например, колесо *1* на рис. 229) является ведущим, а остальные ведомыми. В случае внешнего (рис. 229, *а*) или внутреннего (рис. 229, *б*) зацепления двух колес имеем $|\omega_1| r_1 = |\omega_2| r_2$, так как скорость точки сцепления A у обоих колес одинакова. Учитывая, что число z зубцов сцепленных колес пропорционально их радиусам, а вращения колес происходят при внутреннем зацеплении в одну сторону, а при внешнем в разные, получаем [1]):

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)_{\text{внешн}} = -\frac{r_2}{r_1} = -\frac{z_2}{z_1}; \quad \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)_{\text{внутр}} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1}.$$

При внешнем зацеплении трех колес (рис. 229, *в*) находим, что

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{r_2}{r_1}; \quad \frac{\omega_2}{\omega_3} = -\frac{r_3}{r_2},$$

[1]) Во всех формулах этого параграфа ω — алгебраическая (численная) величина угловой скорости, имеющая знак плюс при вращении против хода часовой стрелки и знак минус, когда вращение происходит по ходу часовой стрелки.

откуда

$$\frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{r_3}{r_1} = \frac{z_3}{z_1}.$$

Следовательно, отношение угловых скоростей крайних шестерен в рядовой передаче обратно пропорционально их радиусам (числу зубцов) и не зависит от радиусов промежуточных (паразитных) шестерен.

Из полученных результатов следует, что при рядовом сцеплении n шестерен будет

$$\frac{\omega_1}{\omega_n} = (-1)^k \frac{r_n}{r_1} = (-1)^k \frac{z_n}{z_1}, \tag{91}$$

где k — число *внешних* зацеплений (в случае, изображенном на рис. 229, *а*, имеется одно внешнее зацепление; на рис. 229, *в* — два внешних зацепления, на рис. 229, *б* внешних зацеплений нет).

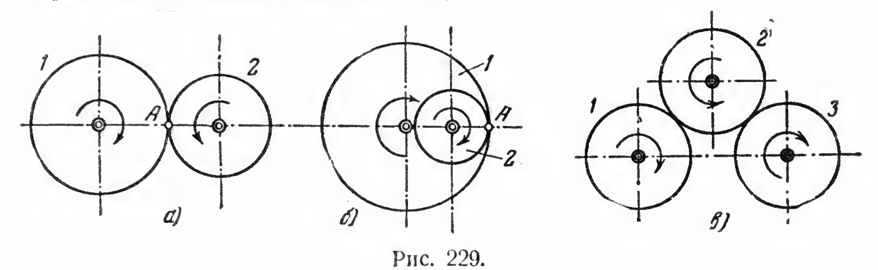


Рис. 229.

Передаточным числом данной зубчатой передачи называется величина i_{1n}, дающая отношение угловой скорости ведущего колеса к угловой скорости ведомого:

$$i_{1n} = \frac{\omega_1}{\omega_n}. \tag{92}$$

Для рядовой передачи значение i_{1n} дает правая часть формулы (91).

2) *Планетарной* называется передача (см. ниже рис. 230), в которой шестерня *1* неподвижна, а оси остальных шестерен, находящихся в последовательном зацеплении, укреплены на кривошипе AB, вращающемся вокруг оси неподвижной шестерни.

3) *Дифференциальной* называется передача, изображенная на рис. 230, если в ней шестерня *1* не является неподвижной и может вращаться вокруг своей оси A независимо от кривошипа AB.

Расчет планетарных и дифференциальных передач можно производить, сообщив мысленно всей неподвижной плоскости Ax_1y_1 вращение с угловой скоростью $-\omega_{AB}$, равной по модулю и противоположной по направлению угловой скорости кривошипа AB (*метод остановки* или *метод Виллиса*).

Тогда, на основании результатов параграфа 94, кривошип в этом сложном движении будет неподвижен, а любая шестерня радиуса r_k будет иметь угловую скорость

$$\tilde{\omega}_k = \omega_k - \omega_{AB},$$

где ω_k — абсолютная угловая скорость этой шестерни по отношению к осям Ax_1y_1. При этом оси всех шестерен будут неподвижны и зависимость между $\tilde{\omega}_k$ можно будет определить или приравнивая скорости точек сцепления, или непосредственно по формуле (91).

Расчет планетарных и дифференциальных передач можно также производить с помощью мгновенных центров скоростей (§ 81).

Задача 90. В планетарном механизме (рис. 230) шестерня *1* радиуса r_1 неподвижна, а кривошип AB вращается с угловой скоростью ω_{AB}. Найти угловую скорость шестерни *3* радиуса r_3.

Решение. Абсолютные угловые скорости шестерен по отношению к осям Ax_1y_1 обозначим через ω_1 ($\omega_1=0$), ω_2 и ω_3. Сообщив всей плоскости Ax_1y_1 вращение с угловой скоростью $-\omega_{AB}$, получим в этом движении:

$$\tilde{\omega}_1 = 0 - \omega_{AB}, \quad \tilde{\omega}_2 = \omega_2 - \omega_{AB},$$
$$\tilde{\omega}_3 = \omega_3 - \omega_{AB}, \quad \tilde{\omega}_{AB} = 0.$$

В получившейся рядовой передаче число внешних зацеплений $k=2$. Тогда по формуле (91)

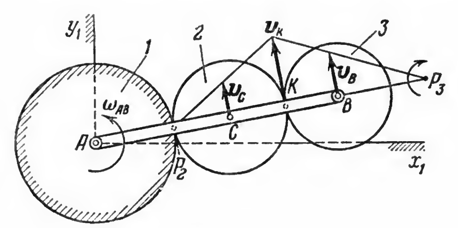


Рис. 230.

$$\frac{\tilde{\omega}_1}{\tilde{\omega}_3} = \frac{r_3}{r_1} \quad \text{или} \quad \frac{-\omega_{AB}}{\omega_3 - \omega_{AB}} = \frac{r_3}{r_1}.$$

Отсюда находим абсолютную угловую скорость шестерни *3*:

$$\omega_3 = \left(1 - \frac{r_1}{r_3}\right)\omega_{AB}.$$

Если $r_3 > r_1$, то направление вращения шестерни *3* совпадает с направлением вращения кривошипа, при $r_3 < r_1$ — не совпадает. В случае, когда $r_1 = r_3$, получаем $\omega_3 = 0$. Шестерня *3* в этом случае движется поступательно.

Относительную (по отношению к кривошипу AB) угловую скорость шестерни *3* найдем по формуле (87). Так как абсолютная скорость $\omega_3 = \omega_3^{\text{отн}} + \omega_{AB}$ (угловая скорость ω_{AB} кривошипа является для шестерни *3* переносной), то

$$\omega_3^{\text{отн}} = \omega_3 - \omega_{AB} = -\frac{r_3}{r_1}\omega_{AB}.$$

При $r_3 = r_1$ получаем $\omega_3^{\text{отн}} = -\omega_{AB}$. Относительная $\omega_3^{\text{отн}}$ и переносная ω_{AB} угловые скорости образуют при этом пару, и мы другим путем приходим к выводу, что результирующее движение шестерни *3* является в этом случае поступательным со скоростью $v = \omega_{AB} \cdot AB$.

Другое решение[1]. Скорость точки B шестерни *3* будет равна $v_B = (r_1 + 2r_2 + r_3)\,\omega_{AB}$. Найдем еще скорость точки K этой шестерни, как точки сцепления шестерен *2* и *3*. Для шестерни *2* скорость $v_C = (r_1 + r_2)\,\omega_{AB}$. Мгновенный центр скоростей этой шестерни находится в точке P_2 касания с шестерней *1*. Следовательно, $v_K = 2v_C = 2(r_1 + r_2)\,\omega_{AB}$.

---

[1]) Другое решение приводится, чтобы показать возможность применения здесь методов § 81. Таким же путем могут быть решены задачи 91, 92. Обычно эти решения будут несколько сложнее (особенно в задаче 92).

Тогда по формуле (56) (см. § 81)

$$\omega_3 = \frac{|v_B - v_K|}{BK} = \frac{r_3 - r_1}{r_3} \omega_{AB}.$$

Этот же результат можно получить, построив мгновенный центр скоростей P_3 шестерни 3.

Задача 91. Редуктор скоростей (рис. 231) состоит из: а) неподвижной шестерни 1; б) двух спаренных шестерен 2 и 3, насаженных на кривошип, связанный с ведущим валом AC (зацепление шестерен 2 и 1 внутреннее); в) шестерни 4, сидящей на ведомом валу B. Числа зубцов шестерен равны: $z_1 = 120$, $z_2 = 40$, $z_3 = 30$, $z_4 = 50$. Ведущий вал делает $n_A = 1500$ *об/мин*. Найти число оборотов в минуту ведомого вала B.

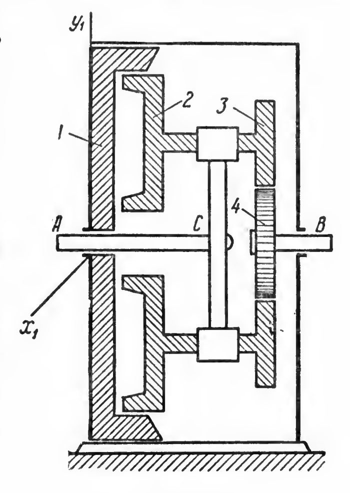


Рис. 231.

Решение. Обозначим абсолютные угловые скорости: вала AC вместе с кривошипом через ω_A, шестерни 4 вместе с валом B через ω_B, шестерен 2 и 3 через ω_{23} (эти шестерни вращаются как одно тело). Шестерня 1 имеет угловую скорость $\omega_1 = 0$. Сообщив плоскости x_1y_1, параллельно которой движется механизм, вращение с угловой скоростью $-\omega_A$, получим, что кривошип в этом движении будет неподвижен ($\tilde{\omega}_A = 0$), а шестерни будут иметь скорости:

$$\tilde{\omega}_1 = 0 - \omega_A, \quad \tilde{\omega}_{23} = \omega_{23} - \omega_A,$$
$$\tilde{\omega}_4 = \omega_B - \omega_A.$$

Составляя теперь для шестерен 1 и 2 и шестерен 3 и 4 зависимости (91), получим:

$$\frac{\tilde{\omega}_1}{\tilde{\omega}_{23}} = \frac{z_2}{z_1}; \quad \frac{\tilde{\omega}_{23}}{\tilde{\omega}_4} = -\frac{z_4}{z_3}.$$

Перемножая эти равенства, будем иметь:

$$\frac{\tilde{\omega}_1}{\tilde{\omega}_4} = -\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} \text{ или } \frac{-\omega_A}{\omega_B - \omega_A} = -\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}.$$

Отсюда, учитывая, что величина *n об/мин* пропорциональна ω, находим:

$$n_B = \left(1 + \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4}\right) n_A = 4200 \text{ об/мин}.$$

Задача 92. Решить предыдущую задачу при условии, что шестерня 1 вращается в ту же сторону, что и ведущий вал AC, делая $n_1 = 1\,100$ *об/мин* (редуктор с дифференциальной передачей).

Решение. Ход решения остается таким же, как в задаче 91, с той лишь разницей, что теперь $\omega_1 \neq 0$ (причем, по условиям задачи знаки ω_1 и ω_A совпадают) и, следовательно, $\tilde{\omega}_1 = \omega_1 - \omega_A$.

В результате полученная в задаче 91 пропорция

$$\frac{\tilde{\omega}_1}{\tilde{\omega}_4} = -\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} \quad \text{дает} \quad \frac{\omega_1 - \omega_A}{\omega_B - \omega_A} = -\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}.$$

Отсюда, переходя к оборотам в минуту, находим

$$n_B = n_A + \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4}(n_A - n_1) = 2\,220 \text{ об/мин}.$$

Если шестерня *1* вращается в сторону, противоположную направлению вращения вала *AC*, то в полученном результате надо изменить знак при n_1.

§ 96*. Сложение вращений вокруг пересекающихся осей. Пусть относительное движение тела *1* (рис. 232, *а*) представляет собою вращение с угловой скоростью ω_1 вокруг оси a_1a, укрепленной на кривошипе *2*, а переносным является вращение кривошипа с угловой скоростью ω_2 вокруг оси b_1b, которая с осью a_1a пересекается в точке *O*. Схематически такой случай сложения вращений вокруг пересекающихся осей показан на рис. 232, *б*.

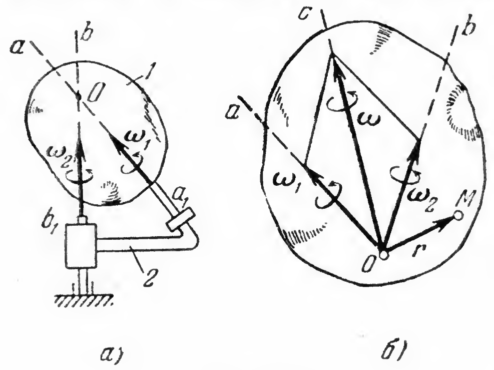


Рис. 232.

Очевидно, в этом случае скорость точки *O*, как лежащей одновременно на обеих осях, будет равна нулю. Следовательно, результирующее движение тела является движением вокруг неподвижной точки *O* и для каждого элементарного промежутка времени представляет собой элементарный поворот с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вокруг мгновенной оси, проходящей через точку *O* (§ 86).

Чтобы определить вектор $\boldsymbol{\omega}$, вычислим скорость какой-нибудь точки *M* тела, радиус-вектор которой $\overline{OM} = \boldsymbol{r}$. В относительном движении вокруг оси *Oa* точка *M*, согласно формуле (67), получает скорость $\boldsymbol{v}_{\text{отн}} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{r}$; в переносном же движении вокруг оси *Ob* точка получает скорость $\boldsymbol{v}_{\text{пер}} = \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{r}$. Следовательно, абсолютная скорость точки *M* равна

$$\boldsymbol{v}_{\text{а}} = \boldsymbol{v}_{\text{отн}} + \boldsymbol{v}_{\text{пер}} = (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times \boldsymbol{r}.$$

Но так как результирующее движение тела является мгновенным вращением с некоторой угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, то должно быть

$$\boldsymbol{v}_{\text{а}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}.$$

Такие результаты будут получаться для всех точек тела (т. е. при

любых $\boldsymbol{r}$). Отсюда заключаем, что

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2. \tag{93}$$

Следовательно, *при сложении вращений вокруг двух осей, пересекающихся в точке O, результирующее движение тела будет мгновенным вращением вокруг оси Oc, проходящей через точку O, причем угловая скорость* $\boldsymbol{\omega}$ *этого вращения равна геометрической сумме относительной и переносной угловых скоростей.* Мгновенная ось вращения Oc направлена вдоль вектора $\boldsymbol{\omega}$, т. е. по диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$.

С течением времени ось Oc меняет свое положение, описывая коническую поверхность, вершина которой находится в точке O.

Если тело участвует одновременно в мгновенных вращениях вокруг нескольких осей, пересекающихся в точке O, то, последовательно применяя равенство (93), придем к выводу, что результирующее движение является мгновенным вращением вокруг оси, проходящей через точку O, а угловая скорость этого движения

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 + \ldots + \boldsymbol{\omega}_n. \tag{94}$$

Задача 93. Определить абсолютную угловую скорость ω конического катка (см. задачу 80, § 87), если радиус катка $AC = R$, расстояние $OA = l$ и скорость v_A точки A известна (рис. 233).

Решение. Абсолютное движение катка является результатом его относительного вращения вокруг оси OA с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_1$ и переносного вращения кривошипа OA вокруг оси OB с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_2$; при этом

$$\omega_2 = \frac{v_A}{l}.$$

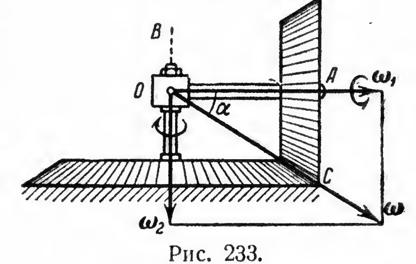


Рис. 233.

Мгновенная ось вращения, а следовательно и вектор абсолютной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, направлены по линии OC, так как скорость точки C равна нулю (см. задачу 80). Строя соответствующий параллелограмм, находим, что $\omega = \dfrac{\omega_2}{\sin\alpha}$.

Так как $\sin\alpha = \dfrac{R}{\sqrt{l^2 + R^2}}$, то окончательно $\omega = \dfrac{v_A}{R}\sqrt{1 + \dfrac{R^2}{l^2}}$.

Другим путем этот результат можно получить (учитывая, что OC — мгновенная ось вращения) из равенства $v_A = \omega h$, где $h = l\sin\alpha$.

Движение катка представляет собою серию элементарных поворотов с угловой скоростью ω вокруг оси OC, которая непрерывно меняет свое положение, описывает круглый конус с вершиной в точке O.

§ 97*. Кинематические уравнения Эйлера. Пользуясь результатами предыдущего параграфа, найдем угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ тела, движущегося вокруг неподвижной точки O (§ 86), если это движение задано уравнениями (65).

Проведем неподвижные оси $Ox_1y_1z_1$ и оси $Oxyz$, жестко связанные с телом и движущиеся вместе с ним (рис. 234), и покажем на чертеже углы Эйлера φ, ψ и θ. При изменении со временем углов φ, ψ и θ тело будет

совершать вращения вокруг осей Oz, Oz_1 и OK (см. § 86); обозначим угловые скорости этих вращений через $\boldsymbol{\omega}_1$, $\boldsymbol{\omega}_2$, $\boldsymbol{\omega}_3$ и изобразим их в виде векторов, направленных вдоль соответствующих осей. При этом численно:

$$\omega_1 = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}, \quad \omega_2 = \frac{d\psi}{dt} = \dot{\psi}, \quad \omega_3 = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}. \tag{95}$$

Тогда по формуле (94) угловая скорость тела в данный момент времени будет

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 + \boldsymbol{\omega}_3. \tag{96}$$

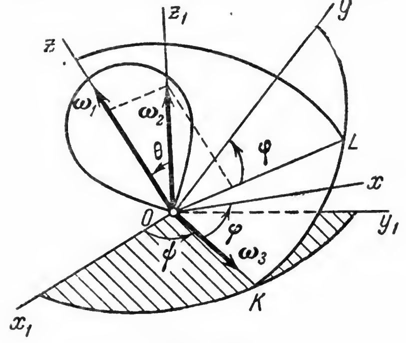


Рис. 234.

Чтобы вычислить вектор $\boldsymbol{\omega}$, найдем его проекции на подвижные оси $Oxyz$. Из равенства (96) имеем:

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= \omega_{1x} + \omega_{2x} + \omega_{3x}, \\ \omega_y &= \omega_{1y} + \omega_{2y} + \omega_{3y}, \\ \omega_z &= \omega_{1z} + \omega_{2z} + \omega_{3z}. \end{aligned}\right\} \tag{97}$$

Проекции векторов $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_3$ находим сразу [см. рис. 234 и обозначения (95)]:

$$\omega_{1x} = \omega_{1y} = 0, \quad \omega_{1z} = \dot{\varphi},$$
$$\omega_{3x} = \dot{\theta}\cos\varphi, \quad \omega_{3y} = -\dot{\theta}\sin\varphi, \quad \omega_{3z} = 0.$$

Для определения проекций $\boldsymbol{\omega}_2$ проведем через оси Oz_1 и Oz плоскость, которая пересечется с плоскостью Oxy вдоль линии OL. Так как линия OK перпендикулярна к плоскости zOz_1, то она перпендикулярна и к линии OL ($\angle KOL = 90°$, а $\angle LOy = \varphi$). Тогда, проектируя вектор $\boldsymbol{\omega}_2$ на линию OL, а эту проекцию в свою очередь на оси Ox и Oy, получим [см. равенства (5) в § 8]:

$$\omega_{2x} = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi, \quad \omega_{2y} = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi, \quad \omega_{2z} = \dot{\psi}\cos\theta.$$

Подставляя все вычисленные проекции в правые части равенств (97), найдем окончательно

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi, \\ \omega_y &= \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi, \\ \omega_z &= \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta. \end{aligned}\right\} \tag{98}$$

Уравнения (98) называются *кинематическими уравнениями Эйлера*. Они определяют проекции вектора угловой скорости тела $\boldsymbol{\omega}$ на подвижные оси $Oxyz$ через углы Эйлера. Из равенств (98) действительно видно, что, зная уравнения движения (65), можно найти ω_x, ω_y, ω_z, т. е. вектор $\boldsymbol{\omega}$, на что и указывалось в § 86.

§ 98*. Сложение поступательного и вращательного движений. Винтовое движение. Рассмотрим сложное движение твердого тела, слагающееся из поступательного и вращательного движений. Соответствующий пример показан на рис. 235. Здесь относительным движением тела *1* является вращение с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вокруг оси Aa, укрепленной на платформе *2*, а переносным поступательное движение платформы со скоростью $\boldsymbol{v}$. Одновременно в двух таких движениях участвует и колесо *3*, для которого относительным

движением является вращение вокруг его оси, а переносным — движение той же платформы. В зависимости от значения угла α между векторами $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{v}$ (для колеса этот угол равен 90°) здесь возможны три случая.

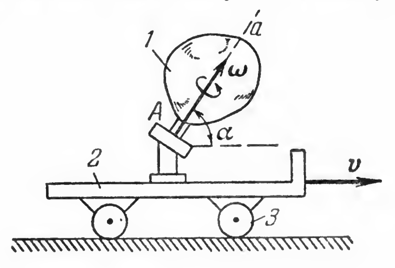


Рис. 235.

1) Скорость поступательного движения перпендикулярна к оси вращения ($\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{\omega}$). Пусть сложное движение тела слагается из вращательного движения вокруг оси Aa с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ и поступательного движения со скоростью $\boldsymbol{v}$, перпендикулярной к $\boldsymbol{\omega}$ (рис. 236). Легко видеть, что это движение представляет собою (по отношению к плоскости П, перпендикулярной к оси Aa) плоскопараллельное движение, подробно изученное в главе XII. Если считать точку A полюсом, то рассматриваемое движение, как и всякое плоскопараллельное, будет действительно слагаться из поступательного со скоростью $\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}$, т. е. со скоростью полюса, и из вращательного вокруг оси Aa, проходящей через полюс.

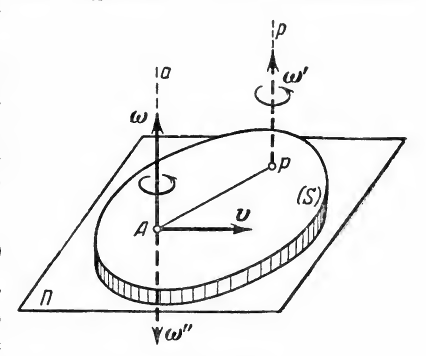


Рис. 236.

Вектор $\boldsymbol{v}$ можно заменить парой угловых скоростей $\boldsymbol{\omega}'$, $\boldsymbol{\omega}''$ (§ 94), беря $\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega}$, а $\boldsymbol{\omega}'' = -\boldsymbol{\omega}$. При этом расстояние AP найдется из равенства $v = \omega' \cdot AP$, откуда (учитывая, что $\omega' = \omega$)

$$AP = \frac{v}{\omega}. \qquad (99)$$

Векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\omega}''$ дают при сложении нуль, и мы получаем, что движение тела в этом случае можно рассматривать как мгновенное вращение вокруг оси Pp с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega}$. Этот результат был раньше получен другим путем (§ 81). Сравнивая равенства (53) и (99), легко видеть, что точка P для сечения (S) тела является мгновенным центром скоростей ($v_P = 0$). Здесь мы еще раз убеждаемся, что поворот тела вокруг осей Aa и Pp происходит с одной и той же угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, т. е. что вращательная часть движения не зависит от выбора полюса (§ 77).

2) Винтовое движение ($\boldsymbol{v} \parallel \boldsymbol{\omega}$). Если сложное движение тела слагается из вращательного вокруг оси Aa с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ и поступательного со скоростью $\boldsymbol{v}$, направленной параллельно оси Aa (рис. 237), то такое движение тела называется *винтовым*.

Ось Aa называется *осью винта*. Когда векторы $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{\omega}$ направлены в одну сторону, то при принятом нами правиле изображения $\boldsymbol{\omega}$ винт будет правым; если в разные стороны — левым.

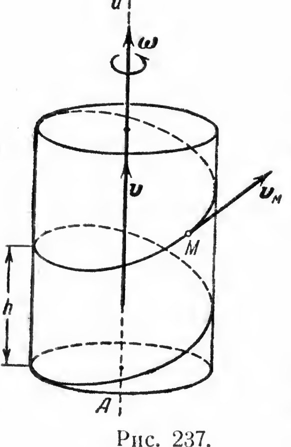


Рис. 237.

Расстояние, проходимое за время одного оборота любой точкой тела, лежащей на оси винта, называется *шагом* h винта. Если величины v и ω постоянны, то шаг винта также будет постоянным. Обозначая время одного оборота через T, получаем в этом случае $vT = h$ и $\omega T = 2\pi$, откуда

$$h = 2\pi \frac{v}{\omega}.$$

При постоянном шаге любая точка M тела, не лежащая на оси винта, описывает винтовую линию. Скорость точки M, находящейся от оси винта на расстоянии r, складывается из поступательной скорости $\boldsymbol{v}$ и перпендикулярной к ней скорости ωr, получаемой во вращательном движении. Следовательно,

$$v_M = \sqrt{v^2 + \omega^2 r^2}.$$

Направлена скорость $\boldsymbol{v}_M$ по касательной к винтовой линии. Если цилиндрическую поверхность, по которой движется точка M, разрезать вдоль образующей и развернуть, то винтовые линии обратятся, очевидно, в прямые, наклоненные к основанию цилиндра под углом α ($\operatorname{tg}\alpha = h/2\pi r$).

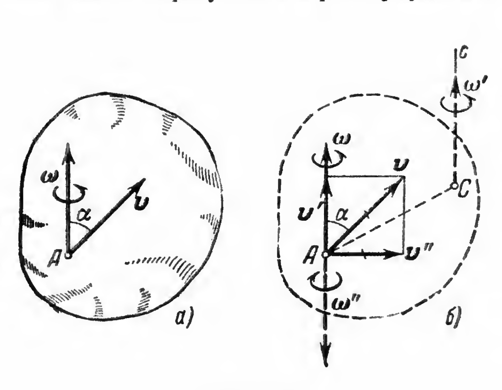


Рис. 238.

3) Скорость поступательного движения образует произвольный угол с осью вращения. Сложное движение, совершаемое телом в этом случае (рис. 238, *а*), представляет собою движение, рассмотренное в параграфе 88 (общий случай движения свободного твердого тела).

Разложим вектор $\boldsymbol{v}$ (рис. 238, *б*) на составляющие: 1) $\boldsymbol{v}'$, направленную вдоль $\boldsymbol{\omega}$ ($v' = v\cos\alpha$) и 2) $\boldsymbol{v}''$, перпендикулярную к $\boldsymbol{\omega}$ ($v'' = v\sin\alpha$). Скорость $\boldsymbol{v}''$ можно заменить парой угловых скоростей $\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\omega}'' = -\boldsymbol{\omega}$ (как на рис. 236) после чего век-

торы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\omega}''$ можно отбросить. Расстояние AC найдем по формуле (99):

$$AC = \frac{v''}{\omega} = \frac{v \sin \alpha}{\omega}.$$

Тогда у тела остается вращение с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}'$ и поступательное движение со скоростью $\boldsymbol{v}'$. Следовательно, распределение скоростей точек тела в данный момент времени будет таким же, как при винтовом движении вокруг оси Cc с угловой скоростью $\omega' = \omega$ и поступательной скоростью $v' = v \cos \alpha$.

Проделанными операциями (рис. 238, *б*) мы перешли от полюса A к полюсу C. Результат показывает, что и в общем случае движения угловая скорость тела при перемене полюса не изменяется ($\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega}$), а меняется только поступательная скорость ($\boldsymbol{v}' \neq \boldsymbol{v}$).

Поскольку при движении свободного твердого тела величины $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{\omega}$, α будут вообще все время изменяться, то будет непрерывно меняться и положение оси Cc, которую поэтому называют *мгновенной винтовой осью*. Таким образом, движение свободного твердого тела можно еще рассматривать как слагающееся из серии мгновенных винтовых движений вокруг непрерывно изменяющихся винтовых осей.

РАЗДЕЛ ТРЕТИЙ
ДИНАМИКА ТОЧКИ

ГЛАВА XVI
ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ. ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ

§ 99. Основные понятия и определения. *Динамикой называется раздел механики, в котором изучаются законы движения материальных тел под действием сил.*

Движение тел с чисто геометрической точки зрения было изучено в кинематике. В динамике, в отличие от кинематики, при изучении движения тел принимают во внимание как действующие силы, так и инертность самих материальных тел.

Понятие о силе, как о величине, характеризующей меру механического взаимодействия материальных тел, было введено в статике. Но при этом в статике мы, по существу, считали все силы постоянными и не касались вопроса о возможных изменениях этих сил с течением времени. Между тем, на движущееся тело наряду с постоянными силами (постоянной, например, можно считать силу тяжести) действуют обычно силы переменные, модули и направления которых при движении тела изменяются. При этом переменными могут быть и заданные (активные) силы, и реакции связей.

Как показывает опыт, переменные силы могут определенным образом зависеть *от времени, от положения тела* и *от его скорости*. В частности, от времени зависит сила тяги электровоза при постепенном выключении или включении реостата или сила, вызывающая колебания фундамента при работе мотора с плохо центрированным валом; от положения тела зависит ньютонова сила тяготения или сила упругости пружины; от скорости движения зависят силы сопротивления среды (воды, воздуха). Такие именно силы, наряду с постоянными, и будут рассматриваться в динамике. Законы сложения или приведения переменных сил остаются теми же, что и для сил постоянных.

К понятию об инертности тел мы приходим, сравнивая результаты действия одной и той же силы на разные материальные тела. Опыт показывает, что если одну и ту же силу приложить к двум разным, свободным от других воздействий покоящимся телам, то в общем случае по истечении одного и того же промежутка времени эти тела пройдут разные расстояния и будут иметь разные скорости.

Инертность и представляет собой *свойство материальных тел быстрее или медленнее изменять скорость своего движения под действием приложенных сил.* Если, например, при действии одинаковых сил изменение скорости первого тела происходит медленнее, чем второго, то говорят, что первое тело является более инертным, и наоборот.

Количественной мерой инертности данного тела является физическая величина, называемая массой тела[1]). В механике масса m рассматривается как величина скалярная, положительная и постоянная для каждого данного тела. Вопрос об измерении массы будет рассмотрен в § 101.

В общем случае движение тела зависит не только от его суммарной массы и приложенных сил; характер движения может еще зависеть от формы тела, точнее от взаимного расположения образующих его частиц (т. е. от распределения масс).

Чтобы при первоначальном изучении динамики иметь возможность отвлечься от учета влияния формы тел (распределения масс), вводится понятие о материальной точке.

Материальной точкой называют материальное тело (*тело, имеющее массу*), *размерами которого при изучении его движения можно пренебречь.*

Практически данное тело можно рассматривать как материальную точку в тех случаях, когда расстояния, проходимые точками тела при его движении, очень велики по сравнению с размерами самого тела. Например, материальной точкой можно считать планету при изучении ее движения вокруг Солнца или артиллерийский снаряд при определении дальности его полета в воздухе и т. п. Кроме того, как будет показано в динамике системы *поступательно* движущееся тело можно всегда рассматривать как материальную точку с массой, равной массе всего тела.

Наконец, материальными точками можно считать частицы, на которые мы будем мысленно разбивать любое тело при определении тех или иных его динамических характеристик.

Естественно, что изучение движения одной материальной точки должно предшествовать изучению движения системы точек и, в частности, твердого тела. Поэтому курс динамики принято обычно разделять на динамику точки и динамику системы материальных точек.

§ 100. Законы динамики. В основе динамики лежат законы, установленные путем обобщения результатов целого ряда опытов и наблюдений над движением тел и проверенные обширной общественно-

---

[1]) Одновременно масса является мерой гравитационных свойств тела, так как по закону всемирного тяготения два тела притягиваются друг к другу с силами, прямо пропорциональными произведению их масс и обратно пропорциональными квадрату расстояния между ними.

исторической практикой человечества. Систематически эти законы были впервые изложены И. Ньютоном в его классическом сочинении «Математические начала натуральной философии», изданном в 1687 г.[1]).

Первый закон (закон инерции), открытый Галилеем (1638 г.), гласит: *изолированная от внешних воздействий материальная точка сохраняет свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока приложенные силы не заставят ее изменить это состояние.* Движение, совершаемое точкой при отсутствии сил, называется движением *по инерции.*

Закон инерции отражает одно из основных свойств материи — пребывать неизменно в движении и устанавливает для материальных тел эквивалентность состояний покоя и движения по инерции. Из него следует, что если $\boldsymbol{F}=0$, то точка покоится или движется с постоянной по модулю и направлению скоростью ($\boldsymbol{v}=\text{const}$); ускорение точки при этом равно нулю ($\boldsymbol{w}=0$); если же движение точки не является равномерным и прямолинейным, то на точку действует сила.

Система отсчета, по отношению к которой выполняется закон инерции, называется *инерциальной системой отсчета* (иногда ее условно называют неподвижной). По данным опыта для нашей Солнечной системы инерциальной является система отсчета, начало которой находится в центре Солнца, а оси направлены на так называемые неподвижные звезды. При решении большинства технических задач инерциальной, с достаточной для практики точностью, можно считать систему отсчета, жестко связанную с Землей. Справедливость этого утверждения будет обоснована в главе XX.

Второй закон (основной закон динамики) устанавливает, как изменяется скорость точки при действии на нее какой-нибудь силы. Он гласит: *произведение массы точки на ускорение, которое она получает под действием данной силы, равно по модулю этой силе, а направление ускорения совпадает с направлением силы.*

Математически этот закон выражается векторным равенством

$$m\boldsymbol{w}=\boldsymbol{F}. \tag{1}$$

При этом между модулями ускорения и силы имеет место зависимость

$$mw=F. \tag{2}$$

Второй закон динамики, как и первый, имеет место только по отношению к инерциальной системе отсчета. Из этого закона непосредственно видно, что мерой инертности материальной точки является ее масса, так как две разные точки при действии одной и той же силы получают одинаковые ускорения только тогда, когда будут

[1]) Есть прекрасный русский перевод, сделанный А. Н. Крыловым. См. Собрание трудов акад. А. Н. Крылова, т. VII, 1936 г.

равны их массы; если же массы будут разные, то точка, масса которой больше (т. е. более инертная), получит меньшее ускорение, и наоборот.

Если на точку действует одновременно несколько сил, то они, как известно, будут эквивалентны одной силе, т. е. равнодействующей $\boldsymbol{R}$, равной геометрической сумме этих сил. Уравнение, выражающее основной закон динамики, принимает в этом случае вид

$$m\boldsymbol{w} = \boldsymbol{R} \text{ или } m\boldsymbol{w} = \sum \boldsymbol{F}_k. \tag{3}$$

Этот же результат можно получить, используя вместо аксиомы параллелограмма *закон независимости действия сил*, согласно которому при одновременном действии на точку нескольких сил каждая из них сообщает точке такое же ускорение, какое она сообщила бы, действуя одна.

Вес тела и его масса. На все тела, находящиеся вблизи земной поверхности, действует сила тяжести $\boldsymbol{P}$, численно равная весу тела. Опытом установлено, что под действием силы $\boldsymbol{P}$ любое тело при свободном падении на Землю (с небольшой высоты и в безвоздушном пространстве) имеет одно и то же ускорение g. Это ускорение, сообщаемое телу силой тяжести, называют для краткости *ускорением силы тяжести*, или *ускорением свободного падения* [1]). Для свободного падения на основании уравнения (2) имеем:

$$P = mg \text{ или } m = \frac{P}{g}. \tag{4}$$

Равенство (4) позволяет, зная массу тела, определить его вес, и наоборот; оно устанавливает, что *вес тела равен его массе, умноженной на ускорение силы тяжести*, или *масса тела равна его весу, деленному на ускорение силы тяжести*. Вес тела, как и величина g, изменяется с изменением широты и высоты над уровнем моря; масса же является величиной, для данного тела (или материальной точки) неизменной.

Третий закон (закон равенства действия и противодействия) устанавливает характер механического взаимодействия между материальными телами. Для двух материальных точек он гласит: *две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по модулю и направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны.*

Заметим, что силы взаимодействия между свободными материальными точками (или телами), как приложенные к разным объектам, не образуют уравновешенной системы. Например, если на гладкой

---

[1]) Закон свободного падения тел был открыт Галилеем. Величина g в разных местах земной поверхности различна; она зависит от географической широты места и высоты его над уровнем моря. На широте Москвы (на уровне моря) $g = 9{,}8156$ *м/сек*^{2}.

горизонтальной плоскости поместить на некотором расстоянии друг от друга кусок железа и магнит, то при взаимодействии эти тела будут сближаться (а не находиться в покое). При этом, так как действующие на каждое из тел силы будут по модулю одинаковы, то ускорения тел, согласно второму закону динамики, будут обратно пропорциональны их массам.

Третий закон динамики, как устанавливающий характер взаимодействия материальных частиц, играет большую роль в динамике системы.

§ 101. Системы единиц. Для измерения всех механических величин достаточно ввести три основные единицы измерения. Двумя из них принято считать единицы длины и времени, уже введенные в кинематике (§ 58). В качестве третьей единицы удобнее всего выбрать единицу измерения массы или силы. Так как произвольными обе эти единицы при наличии равенства (2) быть не могут, то отсюда вытекает возможность введения в механике двух принципиально отличных систем единиц.

Первый тип систем единиц. В этих системах за основные принимаются единица длины, единица времени и единица массы, а сила измеряется производной единицей.

К системам такого рода относится *международная система единиц измерения физических величин* (*СИ*), в которой основными единицами измерения механических величин являются *метр* (*м*), *килограмм массы* (*кг*) и *секунда* (*сек*). Единицей же измерения силы является производная единица — 1 *ньютон* (*н*); 1 *н* — это сила, сообщающая массе в 1 *кг* ускорение 1 *м/сек*^{2} $\left(1\ н = 1\ \frac{кг \cdot м}{сек^2}\right)$.

Другой аналогичной системой является распространенная в физике система *СГС*, в которой основными единицами являются *сантиметр*, *грамм массы* и *секунда*, а сила измеряется производной единицей — *диной*.

Второй тип систем единиц. В этих системах за основные принимаются единица длины, единица времени и единица силы, а масса измеряется производной единицей.

К таким системам относится имеющая большое распространение в технике система *МкГС*, в которой основными единицами являются *метр* (*м*), *килограмм силы* (*кГ*) и *секунда* (*сек*). Единицей измерения массы в этой системе будет 1 $\frac{кГ \cdot сек^2}{м}$, т. е. масса, которой сила в 1 *кГ* сообщает ускорение 1 *м/сек*^{2}.

Соотношение между единицами силы в системах *СИ* и *МкГС* таково: 1 *кГ* $\approx$ 9,81 *н* или 1 *н* $\approx$ 0,102 *кГ*.

Принципиальное различие между названными системами единиц состоит в том, что в одних за основную динамическую единицу принимается единица массы, а в других — единица силы.

§ 102. Задачи динамики для свободной и несвободной материальной точки. Для свободной материальной точки задачами динамики являются следующие: 1) зная закон движения точки, определить действующую на нее силу (*первая задача динамики*); 2) зная действующие на точку силы, определить закон движения точки (*вторая* или *основная задача динамики*).

Решаются обе эти задачи с помощью уравнений (1) или (3), выражающих основной закон динамики, так как эти уравнения связывают ускорение $\boldsymbol{w}$, т. е. величину, характеризующую движение точки, и действующие на нее силы.

В технике часто приходится сталкиваться с изучением *несвободного* движения точки, т. е. со случаями, когда точка, благодаря наложенным на нее связям, вынуждена двигаться по заданной неподвижной поверхности или кривой.

В этих случаях, как и в статике, будем при решении задач исходить из аксиомы связей, согласно которой *всякую несвободную материальную точку можно рассматривать как свободную, отбросив связь и заменив ее действие реакцией этой связи* $\boldsymbol{N}$. Тогда основной закон динамики для несвободного движения точки примет вид:

$$m\boldsymbol{w} = \sum \boldsymbol{F}_k^{\text{a}} + \boldsymbol{N}, \qquad (5)$$

где $\boldsymbol{F}_k^{\text{a}}$ — действующие на точку активные силы.

Первая задача динамики для несвободного движения будет обычно сводиться к тому, чтобы, зная движение точки и действующие на нее активные силы, определить реакцию связи. Вторая (основная) задача динамики при несвободном движении распадается на две и состоит в том, чтобы, зная действующие на точку активные силы, определить: а) закон движения точки, б) реакцию наложенной связи.

§ 103. Решение первой задачи динамики (определение сил по заданному движению). Если ускорение движущейся точки задано, то действующая сила или реакция связи сразу находится по уравнениям (1) или (5). При этом для вычисления реакции надо дополнительно знать активные силы. Когда ускорение непосредственно не задано, но известен закон движения точки, то для определения силы (или реакции) надо предварительно вычислить ускорение по формулам кинематики (см. §§ 64, 67).

Задача 94. Воздушный шар весом P опускается с ускорением w. Какой груз Q (балласт) надо сбросить, чтобы шар стал подниматься с таким же ускорением.

Решение. На падающий шар действуют сила тяжести $\boldsymbol{P}$ и подъемная сила $\boldsymbol{F}$ (рис. 239, *а*). Составляя уравнение (5) в проекции на вертикаль, получим

$$\frac{P}{g} w = P - F.$$

Когда будет сброшен балласт (рис. 239, *б*), вес шара станет равен $P-Q$, а подъемная сила останется той же. Тогда, учитывая, что шар при этом движется вверх, будем иметь:

$$\frac{P-Q}{g}w=F-(P-Q).$$

Исключая из этих уравнений неизвестную силу F, найдем:

$$Q=\frac{2P}{1+\frac{g}{w}}.$$

Задача 95. Лифт весом P (рис. 240) начинает подниматься с ускорением w. Определить натяжение троса.

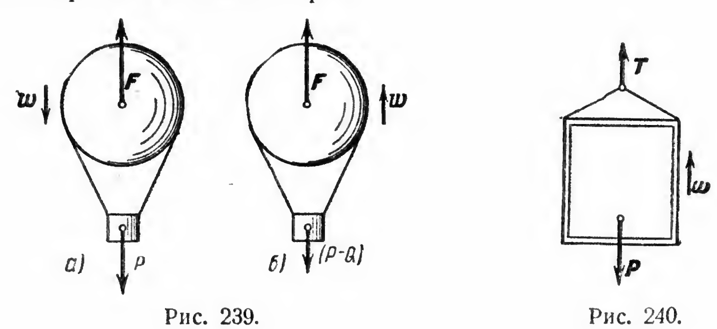


Рис. 239. Рис. 240.

Решение. Рассматривая лифт как свободный, заменяем действие связи (троса) реакцией $\boldsymbol{T}$ и, составляя уравнение (5) в проекции на вертикаль, получаем:

$$\frac{P}{g}w=T-P.$$

Отсюда находим:

$$T=P\left(1+\frac{w}{g}\right).$$

Если лифт начнет опускаться с таким же ускорением, то натяжение троса будет равно

$$T_1=P\left(1-\frac{w}{g}\right).$$

Задача 96. Радиус закругления в точке A моста равен R (рис. 241). Найти, какое давление на мост в точке A окажет автомобиль массы m, движущийся со скоростью v.

Решение. В точке A автомобиль имеет нормальное ускорение $w_n=\frac{v^2}{R}$. При этом на него действуют сила тяжести $\boldsymbol{P}=m\boldsymbol{g}$ и реакция $\boldsymbol{N}$. Тогда по уравнению (5), составленному в проекции на нормаль, будет:

$$m\frac{v^2}{R}=mg-N.$$

Отсюда

$$N = m\left(g - \frac{v^2}{R}\right).$$

Давление на мост равно по модулю N, но направлено вниз.

Задача 97. Кривошип OA длины l, вращаясь равномерно с угловой скоростью ω, перемещает кулису K, движущуюся поступательно вдоль направляющих $1,1$ (рис. 242). Найти, пренебрегая трением, чему при этом равно давление Q ползуна A на кулису, если вес кулисы равен P.

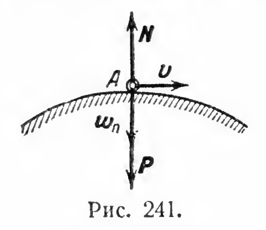


Рис. 241.

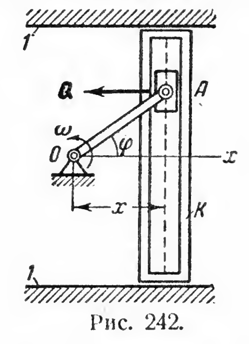


Рис. 242.

Решение. Положение кулисы определяется координатой $x = l\cos\varphi$. Так как $\varphi = \omega t$, то закон движения кулисы будет

$$x = l\cos\omega t.$$

Составляя для кулисы уравнение (5) в проекции на ось Ox, получим $mw_x = Q_x$. Но $w_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -l\omega^2\cos\omega t = -\omega^2 x$. Отсюда, так как $Q_x = -Q$, находим:

$$-\frac{P}{g}\omega^2 x = -Q, \quad Q = \frac{P}{g}\omega^2 x.$$

Следовательно, давление ползуна на кулису изменяется пропорционально ее расстоянию x от центра O.

Из рассмотренных примеров видно, что первая задача динамики решается довольно просто, причем, если ускорение движущейся точки непосредственно не задано, то его вычисление сводится к чисто кинематическим расчетам. Поэтому, а также в силу ее практической важности, главное место в динамике занимает решение второй задачи, которая и считается основной задачей динамики.

ГЛАВА XVII

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ И ИХ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

§ 104. Прямолинейное движение точки. Из кинематики известно, что при прямолинейном движении скорость и ускорение точки все время направлены вдоль одной и той же прямой. Так как направление ускорения совпадает с направлением действия силы, то отсюда

следует, что свободная материальная точка будет двигаться прямолинейно тогда, когда действующая на нее сила имеет постоянное направление, а скорость точки в начальный момент равна нулю или направлена вдоль силы.

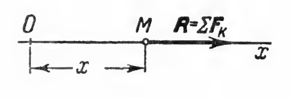


Рис. 243.

Рассмотрим материальную точку, движущуюся прямолинейно под действием приложенной к ней силы $\boldsymbol{R}=\sum \boldsymbol{F}_k$. Положение точки на траектории определяется ее координатой x (рис. 243). Основная задача динамики в этом случае состоит в том, чтобы, зная $\boldsymbol{R}$, найти закон движения точки, т. е. $x=f(t)$. Связь между x и R дает уравнение (3). Проектируя обе его части на ось Ox, получим

$$mw_x = R_x \equiv \sum F_{kx}$$

или, так как $w_x = \frac{d^2x}{dt^2}$,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{kx}. \tag{6}$$

Уравнение (6) называется *дифференциальным уравнением прямолинейного движения точки*[1]). Часто уравнение (6) бывает удобнее заменить двумя дифференциальными уравнениями, содержащими первые производные:

$$m\frac{dv_x}{dt} = \sum F_{kx}, \tag{7}$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x. \tag{7'}$$

В тех случаях, когда при решении задачи надо искать зависимость скорости от координаты x, а не от времени t (или когда сами силы зависят от x) уравнение (7) преобразуют к переменному x. Так как $\frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv_x}{dx}v_x$, то вместо (7) получим:

$$mv_x\frac{dv_x}{dx} = \sum F_{kx}. \tag{8}$$

Решение основной задачи динамики сводится к тому, чтобы из данных уравнений, зная силы, найти закон движения точки, т. е. $x=f(t)$. Для этого надо проинтегрировать соответствующее дифференциальное уравнение. Чтобы яснее было, к чему сводится эта мате-

[1]) Это уравнение является дифференциальным, так как подлежащая определению величина x входит в него под знаком производной. Уравнение (6) позволяет также решать первую задачу динамики, т. е., зная закон движения точки $x=f(t)$, найти действующую силу F_x.

матическая задача, напомним, что входящие в правую часть уравнения (6) силы могут зависеть от времени t, от положения точки, т. е. от x и от ее скорости, т. е. от $v_x = \frac{dx}{dt}$ (см. § 99). Следовательно, в общем случае уравнение (6) с математической точки зрения будет представлять собою дифференциальное уравнение 2-го порядка, имеющее вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \Phi\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right). \tag{9}$$

Решить это уравнение можно для каждой конкретной задачи в отдельности, установив, какой вид, в зависимости от действующих сил, будет иметь его правая часть. После того как с помощью тех или иных математических приемов уравнение (9) для данной задачи будет проинтегрировано, в полученное решение войдут две постоянные интегрирования C_1 и C_2, и *общее решение* уравнения (9) будет иметь вид:

$$x = f(t, C_1, C_2). \tag{10}$$

Чтобы довести решение каждой конкретной задачи до конца, надо определить значения постоянных C_1 и C_2. Для этого используются так называемые *начальные условия.*

Изучение всякого движения мы начинаем с некоторого определенного момента времени, называемого *начальным моментом.* От этого момента мы будем отсчитывать время движения, считая, что в начальный момент $t = 0$. Обычно за начальный принимают момент начала движения под действием заданных сил. Положение, которое точка занимает в начальный момент, называется *начальным положением*, а ее скорость в этот момент — *начальной скоростью* (начальную скорость точка может иметь или потому, что до момента $t = 0$ она двигалась по инерции, или в результате действия на нее до момента $t = 0$ каких-то других сил). Чтобы решить основную задачу динамики, надо, кроме действующих сил, знать еще *начальные условия*, т. е. положение и скорость точки в начальный момент.

В случае прямолинейного движения начальные условия задаются в виде

$$\text{при } t = 0 \quad x = x_0, \; v_x = v_0. \tag{11}$$

По начальным условиям можно определить конкретные значения постоянных C_1 и C_2 и найти *частное решение* уравнения (9), дающее закон движения точки, в виде:

$$x = f(t, x_0, v_0). \tag{12}$$

Поясним все сказанное на простейшем конкретном примере.

Пусть на точку действует *постоянная по модулю и направлению сила* $\boldsymbol{Q}$. Тогда уравнение (7) принимает вид

$$m\frac{dv_x}{dt}=Q_x.$$

Так как $Q_x=\text{const}$, то, умножая обе части уравнения на dt и беря от них интегралы, получим[1]):

$$v_x=\frac{Q_x}{m}t+C_1. \qquad (13)$$

Подставляя найденное значение v_x в уравнение (7′), будем иметь:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{Q_x}{m}t+C_1.$$

Умножая обе части этого уравнения на dt и снова интегрируя, найдем:

$$x=\frac{1}{2}\frac{Q_x}{m}t^2+C_1t+C_2. \qquad (14)$$

Полученный результат и представляет собою для данной задачи общее решение уравнения (9) в виде, соответствующем равенству (10).

Теперь определим постоянные интегрирования C_1 и C_2, считая, что в данной задаче имеют место начальные условия (11). Решения (13) и (14) должны быть справедливы в любой момент времени, в том числе и в момент $t=0$. Поэтому, подставляя в равенства (13) и (14) вместо t нуль, мы вместо v_x и x должны получить v_0 и x_0, т. е. должно быть

$$v_0=C_1, \qquad x_0=C_2.$$

Полученными равенствами определяются значения постоянных C_1 и C_2, удовлетворяющие начальным условиям данной задачи. Подставляя эти значения в уравнение (14), найдем окончательно закон происходящего движения в виде, соответствующем равенству (12):

$$x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}\frac{Q_x}{m}t^2. \qquad (15)$$

Как видно из уравнения (15), точка под действием постоянной силы совершает равнопеременное движение, что можно было предсказать заранее, так как если $\boldsymbol{Q}=\text{const}$, то и $\boldsymbol{w}=\text{const}$. В частности, таким является движение точки под действием силы тяжести. При этом в уравнении (15) будет $\frac{Q_x}{m}=g$, а ось Ox должна быть направлена по вертикали вниз.

---

[1]) Постоянную интегрирования слева мы не пишем, считая, что она перенесена вправо и включена в C_1.

§ 105. Решение задач. Решение задач динамики путем интегрирования соответствующих дифференциальных уравнений движения сводится к следующим операциям.

1. Составление дифференциального уравнения движения. Для составления уравнения движения надо:

а) Выбрать начало отсчета (как правило, совмещая его с начальным положением точки) и провести координатную ось вдоль линии движения, направляя ее, как правило, в сторону движения; если под действием приложенных сил точка может находиться в каком-нибудь положении в равновесии, то начало отсчета удобно помещать в положении статического равновесия.

б) Изобразить движущуюся точку в произвольном положении (но так, чтобы было $x > 0$ и $v_x > 0$; последнее существенно, когда среди сил есть силы, зависящие от скорости) и показать все действующие на точку силы.

в) Подсчитать сумму проекций всех сил на координатную ось и подставить эту сумму в правую часть дифференциального уравнения движения. При этом *надо обязательно все переменные силы выразить через те величины* (t, x или v), *от которых эти силы зависят.*

2. Интегрирование дифференциального уравнения движения. Интегрирование производится методами, известными из курса высшей математики и зависящими от вида полученного уравнения, т. е. от вида правой части в равенстве (9). В тех случаях, когда на точку, кроме постоянных сил, действует одна переменная сила, зависящая *только* от времени t или *только* от расстояния x или же *только* от скорости v, уравнение прямолинейного движения можно проинтегрировать методом разделения переменных (см. задачи 98—100). Если при этом в задаче требуется определить только скорость движения, то часто можно при решении ограничиться интегрированием одного из уравнений (7) или (8).

3. Определение постоянных интегрирования. Для определения постоянных интегрирования надо по данным задачи установить начальные условия в виде (11). Значения постоянных по начальным условиям находятся так, как это было показано в § 104. При этом постоянные можно определять непосредственно после каждого интегрирования.

Если дифференциальное уравнение движения является уравнением с разделяющимися переменными, то вместо введения постоянных интегрирования можно брать сразу от обеих частей равенства *определенные интегралы* в соответствующих пределах; пример такого расчета дан в задаче 100.

4. Нахождение искомых в задаче величин и исследование полученных результатов. Чтобы иметь возможность исследовать решение, а также произвести косвенную проверку

результата подсчетом размерностей, надо все решение проводить до конца в общем виде (в буквах), подставляя численные данные только в окончательные результаты.

Сделанные здесь общие указания относятся и к случаю криволинейного движения.

Рассмотрим три конкретные задачи, в которых сила зависит от времени, от расстояния и от скорости движения точки.

1. Сила зависит от времени

Задача 98. Груз весом P начинает двигаться из состояния покоя вдоль гладкой горизонтальной плоскости под действием силы $\boldsymbol{R}$, величина которой растет пропорционально времени по закону $R=kt$. Найти закон движения груза.

Решение. Выберем начало отсчета O в начальном положении груза и направим ось Ox в сторону движения (см. рис. 243). Тогда начальные условия будут: при $t=0$ $x=0$, $v_x=0$. Изображаем в произвольном положении груз и действующие на него силы. В данном случае $R_x=R=kt$ и уравнение (7) имеет вид

$$\frac{P}{g}\frac{dv_x}{dt}=kt.$$

Умножая обе части равенства на dt, мы сразу разделим переменные и, интегрируя, получим:

$$v_x=\frac{kg}{P}\frac{t^2}{2}+C_1.$$

Подставляя сюда начальные данные, найдем, что $C_1=0$. Тогда, заменяя в полученном результате v_x на $\frac{dx}{dt}$, будем иметь:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{kg}{2P}t^2.$$

Умножая обе части этого равенства на dt, мы опять разделим переменные и, интегрируя, найдем:

$$x=\frac{kg}{2P}\frac{t^3}{3}+C_2.$$

Подстановка начальных данных дает $C_2=0$, и мы окончательно получаем закон движения груза в виде

$$x=\frac{kg}{6P}t^3.$$

Таким образом, проходимый грузом путь будет расти пропорционально кубу времени.

2. Сила зависит от расстояния

Задача 99. Пренебрегая трением и сопротивлением воздуха, определить, в течение какого промежутка времени тело пройдет по прорытому сквозь Землю вдоль хорды AB каналу от его начала A до конца B (рис. 244). При подсчете считать радиус Земли $R=6370$ *км*.

Указание. В теории притяжения доказывается, что тело, находящееся внутри Земли, притягивается к ее центру с силой F, прямо пропорциональной расстоянию r до этого центра. Принимая во внимание, что при $r=R$ (т. е. на поверхности Земли) сила F равна весу тела ($F=mg$), мы получим, что внутри Земли

$$F=\frac{mg}{R}r,$$

где $r=MC$ — расстояние от точки M до центра Земли.

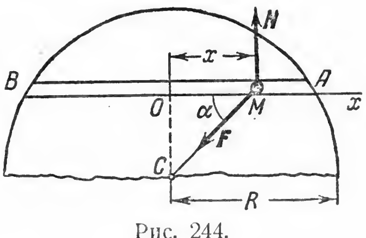


Рис. 244.

Решение. Поместим начало отсчета O в середине хорды AB (в этой точке тело, находящееся в канале, было бы в равновесии) и направим ось Ox вдоль линии OA. Если обозначить длину хорды AB через $2a$, то начальные условия задачи будут: при $t=0$ $x=a$, $v_x=0$.

В произвольном положении на тело действуют силы $\boldsymbol{F}$ и N. Следовательно,

$$\sum F_{kx}=-F\cos\alpha=-\frac{mg}{R}r\cos\alpha=-\frac{mg}{R}x,$$

так как из чертежа видно, что $r\cos\alpha=x$.

Действующая сила оказалась зависящей от координаты x точки M. Чтобы в этом случае в дифференциальном уравнении движения разделились переменные, составим его в виде (8). Тогда, сокращая на m и вводя обозначение

$$\frac{g}{R}=k^2,$$

получим:

$$v_x\frac{dv_x}{dx}=-k^2x.$$

Умножая обе части этого равенства на dx, мы сразу разделяем переменные и, интегрируя, находим:

$$\frac{v_x^2}{2}=-k^2\frac{x^2}{2}+C_1.$$

По начальным условиям при $x=a$ $v_x=0$, следовательно, $C_1=\frac{1}{2}k^2a^2$. Подставляя это значение C_1, найдем:

$$v_x=\pm k\sqrt{a^2-x^2}.$$

Считая, что в рассматриваемом положении скорость направлена от M к O, т. е., что $v_x<0$, берем перед корнем знак минус (легко, однако, проверить, что тот же окончательный результат получится и при знаке плюс). Тогда, заменяя v_x через $\frac{dx}{dt}$, будем иметь:

$$\frac{dx}{dt}=-k\sqrt{a^2-x^2}.$$

Разделяя переменные, приведем это уравнение к виду

$$k\,dt=-\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

и, интегрируя, получим:

$$kt = \arccos\frac{x}{a} + C_2.$$

Подставляя сюда начальные данные (при $t=0$ $x=a$), находим, что $C_2=0$. Окончательно закон движения тела в канале будет иметь вид

$$x = a\cos kt.$$

Следовательно, тело будет совершать в канале AB гармонические колебания с амплитудой a.

Найдем теперь время t_1 движения тела до конца B канала. В точке B координата $x=-a$. Подставляя это значение в уравнение движения, получим $\cos kt_1=-1$, откуда $kt_1=\pi$ и $t_1=\frac{\pi}{k}$. Но по введенному обозначению $k=\sqrt{\frac{g}{R}}$. Отсюда, произведя подсчет, находим, что время движения по каналу AB при условиях задачи не зависит от его длины и всегда равно

$$t_1 = \pi\sqrt{\frac{R}{g}} \approx 42 \text{ мин } 11 \text{ сек}.$$

Этот очень интересный результат породил ряд (пока еще фантастических) проектов прорытия такого канала.

Найдем дополнительно, чему будет равна при движении максимальная скорость тела. Из выражения для v_x видно, что $v=v_{max}$ при $x=0$, т. е. в точке O. По величине

$$v_{max} = ka = a\sqrt{\frac{g}{R}}.$$

Если, например, $2a = 0{,}1\,R = 637$ *км* (приблизительно расстояние от Москвы до Ленинграда), то $v_{max} \approx 395$ *м/сек* $= 1422$ *км/час*.

Колебания, совершаемые материальной точкой под действием силы, пропорциональной расстоянию, будут подробнее изучены в главе XXI. Там будет рассмотрен другой метод интегрирования получающихся в этом случае дифференциальных уравнений движения.

3. Сила зависит от скорости

Задача 100. Лодку, масса которой $m = 40$ *кг*, толкают, сообщая ей начальную скорость $v_0 = 0{,}5$ *м/сек*. Считая силу сопротивления воды при малых скоростях пропорциональной первой степени скорости и изменяющейся по закону $R = \mu v$, где коэффициент $\mu = 9{,}1$ *кг/сек*, определить, через сколько времени скорость лодки уменьшится вдвое и какой она за это время пройдет путь. Найти также, какой путь пройдет лодка до полной остановки.

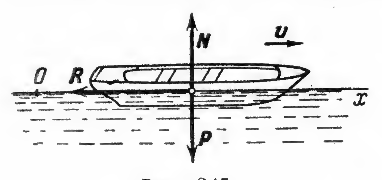


Рис. 245.

Решение. Совместим начало отсчета O с начальным положением лодки и направим ось Ox в сторону движения (рис. 245). Тогда начальные условия будут: при $t=0$ $x=0$, $v_x=v_0$.

Изображаем в произвольном положении лодку и действующие на нее силы $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{R}$.

Примечание. Никакие другие силы на лодку не действуют. Сила, сообщившая лодке толчок, действовала на лодку *до момента* $t=0$. Результат этого действия учитывается заданием начальной скорости v_0, которую сила за время толчка сообщила лодке (см. § 104). Чтобы правильно определять, какие силы действительно действуют на тело при его движении, надо помнить, что *сила есть результат взаимодействия данного тела с другими телами*. В данном случае сила тяжести $\boldsymbol{P}$ является результатом действия на лодку Земли, а силы $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{N}$ — результат действия на лодку воды. Никакие другие материальные тела на лодку при ее движении не действуют, значит, никаких других действующих сил нет. Мы обращаем внимание на этот вопрос, так как он часто является источником ошибок при решении задач.

Вычисляя проекции действующих сил, находим, что

$$\sum F_{kx} = -R = -\mu v.$$

Для определения времени движения составляем дифференциальное уравнение (7). Замечая, что в данном случае $v_x = v$, будем иметь:

$$m\frac{dv}{dt} = -\mu v.$$

Проинтегрируем это уравнение, беря от обеих его частей после разделения переменных соответствующие определенные интегралы. При этом нижним пределом каждого из интегралов будет значение переменного интегрирования в начальный момент, а верхним — значение того же переменного в произвольный момент времени.

Тогда, учитывая, что по условиям данной задачи при $t=0$ $v=v_0$, получим:

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -\frac{\mu}{m}\int_0^t dt \quad \text{или} \quad \ln v - \ln v_0 = -\frac{\mu}{m}t.$$

Отсюда окончательно

$$t = \frac{m}{\mu}\ln\frac{v_0}{v}. \tag{a}$$

Искомое время t_1 определим, полагая $v = 0{,}5\,v_0$. Это время, как видим, не зависит в данном случае от величины v_0. Так как $\ln 2 = 0{,}69$, то

$$t_1 = \frac{m}{\mu}\ln 2 \approx 3 \text{ сек}.$$

Для определения пройденного пути целесообразнее вновь составить дифференциальное уравнение движения в виде (8), так как это уравнение позволяет сразу установить зависимость между x и v [1]). Тогда получим:

$$mv\frac{dv}{dx} = -\mu v.$$

Отсюда, сокращая на v, разделяя переменные и учитывая, что при $x=0$ $v=v_0$, будем иметь:

$$\int_{v_0}^{v} dv = -\frac{\mu}{m}\int_0^x dx \quad \text{или} \quad v - v_0 = -\frac{\mu}{m}x.$$

---

[1]) Пройденный путь можно еще найти, определяя из равенства (а) зависимость v от t в виде $v = v_0 e^{-\frac{\mu}{m}t}$, а затем заменяя v на $\frac{dx}{dt}$ и интегрируя полученное уравнение, но такой путь решения будет несколько длиннее.

Следовательно,

$$x = \frac{m}{\mu}(v_0 - v). \qquad (б)$$

Полагая $v = 0{,}5\,v_0$, найдем искомый путь: $x_1 = \frac{mv_0}{2\mu} \approx 1{,}1$ *м*.

Чтобы найти путь, пройденный лодкой до остановки, следует в равенстве (б) положить $v = 0$. Тогда получим, что $x_2 = \frac{mv_0}{\mu} = 2{,}2$ *м*.

Определяя время движения до остановки, мы из равенства (а) найдем, что при $v = 0$ время $t_2 = \infty$. Это означает, что при принятом законе сопротивления ($R = \mu v$) лодка будет к своему конечному положению (определяемому координатой x_2) приближаться асимптотически. Фактически же время движения лодки до остановки будет конечным, так как с уменьшением скорости закон сопротивления становится другим и соответственно изменяется вид зависимости v от t (см., например, задачу 110 в § 118).

Другой важный пример движения под действием силы, зависящей от скорости, рассмотрен в следующем параграфе.

§ 106*. Падение тела в сопротивляющейся среде (в воздухе). При движении тела в какой-нибудь среде оно испытывает сопротивление, зависящее от формы и размеров тела и скорости его движения, а также от свойств самой среды.

Для скоростей движения, не очень малых и не близких к скорости звука, сила сопротивления, как показывает опыт, пропорциональна квадрату скорости v и может определяться по формуле[1])

$$R = \frac{1}{2} c_x \rho S v^2, \qquad (16)$$

где ρ — плотность среды (для воздуха при температуре 15° С и давлении 760 *мм* $\rho = \frac{1}{8}\,\frac{кГ\cdot сек^2}{м^4}$); S *м*^{2} — площадь проекции тела на плоскость, перпендикулярную направлению движения (площадь миделя); c_x — безразмерный коэффициент сопротивления, зависящий от формы тела. Например, для парашюта $c_x = 1{,}4$, для шара $c_x = 0{,}5$; у очень хорошо обтекаемых веретенообразных тел c_x меньше 0,03.

Рис. 246.

Рассмотрим задачу о падении тела в воздухе не с очень большой, по сравнению с радиусом Земли, высоты (высота мала настолько, что можно вес тела P и плотность воздуха ρ считать постоянными).

Направляя координатную ось Ox вертикально вниз (рис. 246), найдем, как будет изменяться скорость падения в зависимости от пройденного пути x, считая $v_0 = 0$.

[1]) При падении в воздухе формулу (16) можно считать справедливой для скоростей до 300 *м/сек*.

На падающее тело действуют силы $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{R}$; следовательно,

$$\sum F_{kx} = P - R = P - \frac{1}{2} c_x \rho S v^2.$$

Чтобы сразу получить зависимость v от x, составляем дифференциальное уравнение движения в виде (8). Тогда, учитывая, что $v_x = v$, получим:

$$\frac{P}{g} v \frac{dv}{dx} = P - \frac{1}{2} c_x \rho S v^2.$$

Если ввести обозначение

$$\frac{2P}{c_x \rho S} = a^2, \tag{17}$$

то предыдущее уравнение примет вид

$$v \frac{dv}{dx} = g\left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right)$$

или, после разделения переменных,

$$-\frac{v\,dv}{a^2 - v^2} = -\frac{g}{a^2}\,dx.$$

Беря от обеих частей равенства интегралы, будем иметь:

$$\ln(a^2 - v^2) = -2\frac{g}{a^2}x + C_1.$$

По начальным данным при $x = 0$ скорость $v = 0$, следовательно, $C_1 = \ln a^2$. Подставляя это значение C_1, получим:

$$\ln\frac{a^2 - v^2}{a^2} = -2\frac{g}{a^2}x$$

или

$$\frac{a^2 - v^2}{a^2} = e^{-2\frac{g}{a^2}x}.$$

Отсюда окончательно находим:

$$v = a\sqrt{\left(1 - e^{-2\frac{g}{a^2}x}\right)}. \tag{18}$$

Формула (18) дает закон изменения скорости падающего в воздухе тела в зависимости от пройденного пути.

С возрастанием x величина $e^{-2\frac{g}{a^2}x}$ убывает, стремясь при $x \to \infty$ к нулю. Отсюда следует, что скорость падения v с возрастанием x возрастает, стремясь в пределе к постоянной величине a. Эта величина называется *предельной скоростью падения* $v_{пр}$. Из равенства (17) находим, что

$$v_{пр} = \sqrt{\frac{2P}{c_x \rho S}}. \tag{19}$$

Таблица 1

$\frac{g}{v_{пр}^2}x$	$\frac{v}{v_{пр}}$
0	0
0,5	0,80
1,0	0,93
1,2	0,95
1,5	0,97
2,0	0,99

Следовательно, *при* $v_0 = 0$ ***падающее в воздухе тело не может получить скорости, большей чем*** $v_{пр}$. Предельная скорость падения возрастает с увеличением веса тела и с уменьшением величин c_x, ρ и S.

Найдем, как быстро скорость падающего тела приближается к предельной. Для этого обратимся к таблице 1, в которой дана зависимость величины $\frac{v}{v_{пр}}$ от $\frac{g}{v_{пр}^2}x$, вычисленная по формуле (18).

Из таблицы следует, что:

$$\left.\begin{aligned} &\text{при } \frac{g}{v_{пр}^2}x = 1{,}2 \qquad v = 0{,}95\, v_{пр}, \\ &\text{при } \frac{g}{v_{пр}^2}x = 2{,}0 \qquad v = 0{,}99\, v_{пр}. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Следовательно, скорость падения приближается к предельной довольно быстро, если только величины c_x и S не очень малы (см. задачу 101).

Наличие предельной скорости падения можно установить следующими простыми рассуждениями. При падении тела в воздухе скорость его растет; следовательно, растет и сила сопротивления R.

Если считать очевидным, что сила R не может стать больше, чем вес тела P (см. рис. 246), то $R_{пр} = P$. Подставляя сюда значение $R_{пр}$ из формулы (16), получаем $\frac{1}{2}c_x \rho S v_{пр}^2 = P$, откуда и находим даваемое формулой (19) значение $v_{пр}$. Однако приведенные рассуждения не позволяют определить, как быстро скорость падения v стремится к $v_{пр}$. Этот практически важный результат можно получить только с помощью формулы (18).

Задача 101. Определить предельную скорость падения парашютиста, вес которого вместе с парашютом $P = 75$ *кГ*: а) при затяжном прыжке, считая в этом случае $S = 0{,}4$ *м*², $c_x = 1{,}0$; б) при прыжке с открытым парашютом, принимая в этом случае $S = 36$ *м*², $c_x = 1{,}4$.

Найти в обоих случаях расстояние H_1, пролетев которое, парашютист приобретает скорость $v_1 = 0{,}95 v_{\text{пр}}$ (т. е. отличающуюся от предельной на 5%), и расстояние H_2, при котором скорость падения $v_2 = 0{,}99 v_{\text{пр}}$.

Решение. Предельную скорость падения определяем по формуле (19), считая для воздуха $\rho = \frac{1}{8} \frac{кГ\,сек^2}{м^4}$. Расстояния H_1 и H_2 находим из равенств (20). Так как $v = 0{,}95 v_{\text{пр}}$ при $\frac{g}{v^2_{\text{пр}}} x = 1{,}2$, то искомое расстояние $H_1 = 1{,}2 \frac{v^2_{\text{пр}}}{g}$. Аналогично находим, что $H_2 = 2 \frac{v^2_{\text{пр}}}{g}$.

В результате подсчетов получаем:

а) при затяжном прыжке $v_{\text{пр}} \approx 55$ *м/сек*; $H_1 \approx 370$ *м*, $H_2 \approx 610$ *м*.

б) при прыжке с открытым парашютом $v_{\text{пр}} \approx 5$ *м/сек*; $H_1 \approx 3$ *м*, $H_2 \approx 5$ *м*.

Как видим, при больших сопротивлениях предельная скорость достигается очень быстро.

§ 107. Криволинейное движение точки. Рассмотрим свободную материальную точку, движущуюся под действием сил $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$. Проведем неподвижные координатные оси $Oxyz$ (рис. 247). Проектируя обе части равенства $m\boldsymbol{w} = \sum \boldsymbol{F}_k$ на эти оси и учитывая, что $w_x = \frac{d^2 x}{dt^2}$ и т. д., получим *дифференциальные уравнения криволинейного движения точки* в проекциях на оси прямоугольной декартовой системы координат:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{kx}, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = \sum F_{ky}, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = \sum F_{kz}. \tag{21}$$

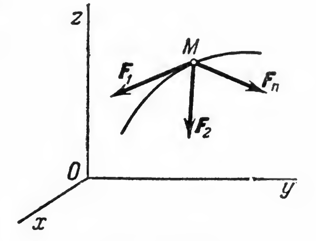


Рис. 247.

Так как действующие на точку силы могут зависеть от времени, от положения точки и от ее скорости, то, по аналогии с уравнением (9) в § 104, правые части уравнений (21) могут содержать время t, координаты точки x, y, z и проекции ее скорости $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$. При этом в правую часть каждого из уравнений могут входить все эти переменные, т. е. система уравнений (21) в общем случае будет совместной.

Уравнения (21) позволяют решать как первую, так и вторую (основную) задачи динамики. Чтобы с помощью этих уравнений решить основную задачу динамики, надо, кроме действующих сил, знать еще начальные условия, т. е. положение и скорость точки в начальный момент. В координатных осях $Oxyz$ начальные условия задаются в виде:

при $t = 0$

$$\left. \begin{aligned} x = x_0, \quad & y = y_0, \quad z = z_0; \\ v_x = v_{x0}, \quad & v_y = v_{y0}, \quad v_z = v_{z0}. \end{aligned} \right\} \tag{22}$$

Зная действующие силы, после проинтегрирования уравнений (21) найдем координаты x, y, z движущейся точки, как функции времени t, т. е. найдем закон движения точки. При этом полученные решения будут содержать шесть постоянных интегрирования C_1, C_2, ..., C_6, значения которых должны определяться по начальным условиям (22). Конкретный пример интегрирования уравнений (21) приводится в § 108.

Дифференциальные уравнения движения можно составлять в проекциях не только на оси декартовой системы координат, но и на другие оси, как это, в частности, сделано в § 118.

§ 108. Движение точки, брошенной под углом к горизонту в однородном поле тяжести. Изучим движение тела, брошенного с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту, рассматривая его как материальную точку массы m. При этом сопротивлением воздуха пренебрежем, а поле тяжести будем считать однородным ($P = \text{const}$), полагая, что дальность полета и высота траектории малы по сравнению с радиусом Земли.

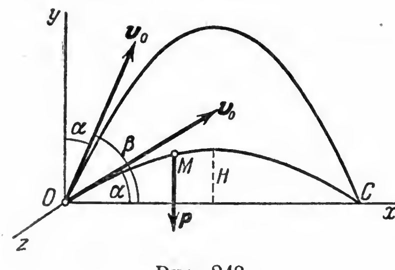


Рис. 248.

Поместим начало координат O в начальном положении точки. Направим ось Oy вертикально вверх; горизонтальную ось Ox расположим в плоскости, проходящей через Oy и вектор $\boldsymbol{v}_0$, а ось Oz проведем перпендикулярно первым двум осям (рис. 248). Тогда угол между вектором $\boldsymbol{v}_0$ и осью Ox будет равен α.

Изобразим движущуюся точку M где-нибудь на траектории. На точку действует одна только сила тяжести $\boldsymbol{P}$ (см. примечание к задаче 100 на стр. 257), проекции которой на оси координат равны

$$P_x = 0, \quad P_y = -P = -mg, \quad P_z = 0.$$

Подставляя эти величины в уравнения (21) и замечая, что $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt}$ и т. д., мы после сокращения на m получим:

$$\frac{dv_x}{dt} = 0, \quad \frac{dv_y}{dt} = -g, \quad \frac{dv_z}{dt} = 0.$$

Умножая обе части этих уравнений на dt и интегрируя, находим:

$$v_x = C_1, \quad v_y = -gt + C_2, \quad v_z = C_3.$$

Начальные условия в нашей задаче имеют вид:

при $t=0$ $\quad x=0, \quad y=0, \quad z=0;$

$$v_x = v_0 \cos\alpha, \quad v_y = v_0 \sin\alpha, \quad v_z = 0.$$

Удовлетворяя начальным условиям, будем иметь:

$$C_1 = v_0 \cos\alpha, \quad C_2 = v_0 \sin\alpha, \quad C_3 = 0.$$

Подставляя эти значения C_1, C_2 и C_3 в найденные выше решения и заменяя v_x, v_y, v_z на $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, придем к уравнениям:

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha, \quad \frac{dy}{dt} = v_0 \sin\alpha - gt, \quad \frac{dz}{dt} = 0.$$

Интегрируя эти уравнения, получим:

$$x = v_0 t \cos\alpha + C_4, \quad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2} + C_5, \quad z = C_6.$$

Подстановка начальных данных дает $C_4 = C_5 = C_6 = 0$, и мы окончательно находим уравнения движения точки M в виде:

$$x = v_0 t \cos\alpha, \quad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}, \quad z = 0. \qquad (23)$$

Из последнего уравнения следует, что движение происходит в плоскости Oxy.

Имея уравнения движения точки, можно методами кинематики определить все характеристики данного движения.

1. Траектория точки. Исключая из первых двух уравнений (23) время t, получим уравнение траектории точки:

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}. \qquad (24)$$

Это — уравнение параболы с осью, параллельной оси Oy. Таким образом, *брошенная под углом к горизонту тяжелая точка движется в безвоздушном пространстве по параболе* (Галилей).

2. Горизонтальная дальность. Определим горизонтальную дальность, т. е. измеренное вдоль оси Ox расстояние $OC = X$. Полагая в равенстве (24) $y = 0$, найдем точки пересечения траектории с осью Ox. Из уравнения

$$x\left(\operatorname{tg}\alpha - \frac{gx}{2v_0^2 \cos^2\alpha}\right) = 0$$

получаем

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{2v_0^2 \cos^2\alpha \operatorname{tg}\alpha}{g}.$$

Первое решение дает точку O, второе точку C. Следовательно, $X = x_2$ и окончательно

$$X = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha. \tag{25}$$

Из формулы (25) видно, что такая же горизонтальная дальность X будет получена при угле β, для которого $2\beta = 180^0 - 2\alpha$, т. е. если угол $\beta = 90^\circ - \alpha$. Следовательно, при данной начальной скорости v_0 в одну и ту же точку C можно попасть двумя траекториями: настильной ($\alpha < 45^\circ$) и навесной ($\beta = 90^\circ - \alpha > 45^\circ$).

При заданной начальной скорости v_0 наибольшая горизонтальная дальность в безвоздушном пространстве получается, когда $\sin 2\alpha = 1$, т. е. при угле $\alpha = 45^\circ$.

3. Высота траектории. Если положить в уравнении (24) $x = \frac{1}{2} X = \frac{v_0^2}{g} \sin\alpha \cos\alpha$, то найдется высота траектории H:

$$H = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2\alpha. \tag{26}$$

4. Время полета. Из первого уравнения системы (23) следует, что полное время полета T определяется равенством $X = v_0 T \cos\alpha$. Заменяя здесь X его значением, получим

$$T = \frac{2v_0}{g} \sin\alpha. \tag{27}$$

При угле наибольшей дальности $\alpha^* = 45^\circ$ все найденные величины равны:

$$X^* = \frac{v_0^2}{g}, \quad H^* = \frac{v_0^2}{4g} = \frac{1}{4} X^*, \quad T^* = \frac{v_0}{g} \sqrt{2}. \tag{28}$$

Полученные результаты практически вполне приложимы для ориентировочного определения характеристик полета снарядов (ракет), имеющих дальности порядка 200 ÷ 600 *км*, так как при этих дальностях (и при $\alpha \approx 45^\circ$) снаряд основную часть своего пути проходит в стратосфере, где сопротивлением воздуха можно пренебречь. При меньших дальностях на результат будет сильно влиять сопротивление воздуха, а при дальностях свыше 600 *км* силу тяжести уже нельзя считать постоянной.

Пример. Известно [1]), что немецкий снаряд ФАУ-2 после вертикального запуска имел на высоте 20 *км* скорость $v_0 \approx 1700$ *м/сек* и угол $\alpha \approx 45^\circ$ (поворот снаряда производился с помощью специальных приборов и рулей). Дальнейший полет снаряда практически происходил как полет брошенного тела в безвоздушном пространстве. Тогда, по формулам (28), должно быть

$$X^* \approx 300 \text{ км}, \quad H^* \approx 75 \text{ км}. \quad T^* \approx 245 \text{ сек}.$$

Эти результаты очень близки к тем, которые имели место для данных снарядов фактически.

---

[1]) И. Коой и И. Ютенбогарт, Динамика ракет, Оборонгиз, 1950, стр. 305.

ГЛАВА XVIII

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ ТОЧКИ

Для решения многих задач динамики, особенно в динамике системы, вместо метода интегрирования дифференциальных уравнений движения оказывается более удобным пользоваться так называемыми *общими теоремами*, являющимися следствиями основного закона динамики.

Значение общих теорем состоит в том, что они устанавливают наглядные зависимости между основными динамическими характеристиками движения материальных тел и открывают тем самым новые возможности исследования движений механических систем, широко применяемые в инженерной практике. Кроме того, общие теоремы позволяют изучать отдельные, практически важные стороны данного явления, не изучая явление в целом. Наконец, применение общих теорем избавляет от необходимости проделывать для каждой задачи те операции интегрирования, которые раз и навсегда производятся при выводе этих теорем; тем самым упрощается процесс решения. Сейчас мы рассмотрим, как выглядят эти теоремы для одной материальной точки.

§ 109. Количество движения и кинетическая энергия точки. Основными динамическими характеристиками движения точки являются *количество движения* и *кинетическая энергия*.

Количеством движения точки называется векторная величина $m\boldsymbol{v}$, ***равная произведению массы точки на вектор ее скорости.*** Направлен вектор $m\boldsymbol{v}$ так же, как и скорость точки, т. е. по касательной к ее траектории.

Кинетической энергией (или живой силой) точки называется скалярная величина $\frac{mv^2}{2}$, *равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости.*

Единицами измерения этих величин будут:

а) в системе *СИ*

$$кгм/сек \text{ (для } mv) \text{ и } кгм^2/сек^2 \left(\text{для } \frac{mv^2}{2}\right);$$

б) в системе *МкГС*

$$\frac{кГ\,сек^2}{м}\frac{м}{сек} = кГсек \text{ (для } mv) \text{ и } \frac{кГ\,сек^2}{м}\frac{м^2}{сек^2} = кГм \left(\text{для } \frac{mv^2}{2}\right).$$

Необходимость введения двух динамических характеристик объясняется тем, что одной характеристикой нельзя охватить все особенности движения точки.

Например, зная количество движения автомобиля (т. е. величину $Q = mv$, а не величины m и v в отдельности) и действующую на

него при торможении силу, можно определить, через сколько секунд автомобиль остановится, но по этим данным нельзя найти пройденный за время торможения путь. Наоборот, зная начальную кинетическую энергию автомобиля и тормозящую силу, можно определить тормозной путь, но по этим данным нельзя найти время торможения[1]).

§ 110. Импульс силы. Для характеристики действия, оказываемого на тело силой за некоторый промежуток времени, вводится понятие об импульсе силы. Введем сначала поятие об элементарном импульсе, т. е. об импульсе за бесконечно малый промежуток времени dt. *Элементарным импульсом силы называется векторная величина* $d\boldsymbol{S}$, *равная произведению вектора силы* $\boldsymbol{F}$ *на элементарный промежуток времени* dt:

$$d\boldsymbol{S}=\boldsymbol{F}\,dt. \tag{29}$$

Направлен элементарный импульс по линии действия силы.

Импульс $\boldsymbol{S}$ любой силы $\boldsymbol{F}$ за конечный промежуток времени t_1 вычисляется как интегральная сумма соответствующих элементарных импульсов:

$$\boldsymbol{S}=\int_0^{t_1}\boldsymbol{F}\,dt. \tag{30}$$

Следовательно, *импульс силы за любой промежуток времени* t_1 *равен определенному интегралу от элементарного импульса, взятому в пределах от нуля до* t_1.

В частном случае, если сила $\boldsymbol{F}$ и по модулю, и по направлению постоянна ($\boldsymbol{F}=\text{const}$), будем иметь $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{F}t_1$. Причем, в этом случае и модуль $S=Ft_1$. В общем случае модуль импульса может быть вычислен через его проекции.

Проекции импульса на оси координат найдем, учитывая, что интеграл представляет собою предел суммы, а проекция суммы векторов на ось равна сумме проекций слагаемых на ту же ось. Следовательно,

$$S_x=\int_0^{t_1}F_x\,dt,\quad S_y=\int_0^{t_1}F_y\,dt,\quad S_z=\int_0^{t_1}F_z\,dt. \tag{31}$$

По этим проекциям можно построить сам вектор $\boldsymbol{S}$ и найти его модуль и углы с осями координат. Единицами измерения импульса будут: *кгм/сек* в системе *СИ* и *кГсек* в системе *МкГС*.

Для решения основной задачи динамики важно выделить те силы, импульсы которых можно вычислить заранее, *не зная закона движе-*

---

[1]) См. задачу 103 (§ 115).

ния, совершаемого точкой под действием этих сил. Из равенств (31) видно, что к таким силам относятся только *постоянные силы* и *силы, зависящие от времени*.

Для вычисления импульсов сил, зависящих от координат или от скорости движения точки, надо дополнительно знать закон ее движения, т. е. уравнения $x=f_1(t)$, $y=f_2(t)$, $z=f_3(t)$. Тогда выразив x, y, z или v_x, v_y, v_z через t, можно вычислить интегралы (31). Не зная закона движения точки, т. е. не решив предварительно основной задачи динамики, импульсы таких сил вычислить нельзя.

§ 111. Теорема об изменении количества движения точки. Так как масса точки постоянна, а ее ускорение $\boldsymbol{w}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$, то уравнение (3), выражающее основной закон динамики, можно представить в виде

$$\frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt}=\sum \boldsymbol{F}_k. \qquad (32)$$

Уравнение (32) выражает одновременно теорему об изменении количества движения точки в дифференциальной форме: *производная по времени от количества движения точки равна геометрической сумме действующих на точку сил*. Проинтегрируем это уравнение.

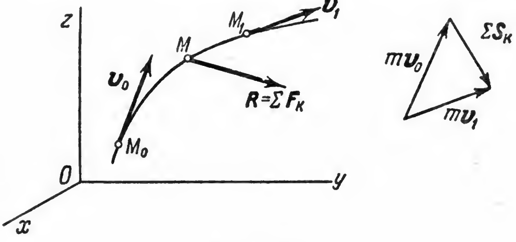


Рис. 249.

Пусть точка массы m, движущаяся под действием силы $\boldsymbol{R}=\sum \boldsymbol{F}_k$ (рис. 249), имеет в момент $t=0$ скорость $\boldsymbol{v}_0$, а в момент t_1 — скорость $\boldsymbol{v}_1$. Умножим тогда обе части равенства (32) на dt и возьмем от них определенные интегралы. При этом справа, где интегрирование идет по времени, пределами интегралов будут 0 и t_1, а слева, где интегрируется скорость, пределами интеграла будут соответствующие значения скорости $\boldsymbol{v}_0$ и $\boldsymbol{v}_1$. Так как интеграл от $d(m\boldsymbol{v})$ равен $m\boldsymbol{v}$, то в результате получим:

$$m\boldsymbol{v}_1-m\boldsymbol{v}_0=\sum \int_0^{t_1} \boldsymbol{F}_k\,dt.$$

Стоящие справа интегралы, как следует из формулы (30), представляют собою импульсы действующих сил. Поэтому окончательно будем иметь:

$$m\boldsymbol{v}_1-m\boldsymbol{v}_0=\sum \boldsymbol{S}_k. \qquad (33)$$

Уравнение (33) выражает теорему об изменении количества движения точки в конечном виде: *изменение количества движения точки за некоторый промежуток времени равно геометрической сумме импульсов всех действующих на точку сил за тот же промежуток времени* (см. рис. 249).

При решении задач вместо векторного уравнения (33) часто пользуются уравнениями в проекциях. Проектируя обе части равенства (33) на оси координат, получим:

$$\left.\begin{aligned} mv_{1x}-mv_{0x}&=\sum S_{kx},\\ mv_{1y}-mv_{0y}&=\sum S_{ky},\\ mv_{1z}-mv_{0z}&=\sum S_{kz}.\end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

В случае прямолинейного движения, происходящего вдоль оси Ox, теорема выражается первым из этих уравнений.

§ 112. Работа силы. Мощность. Для характеристики действия, оказываемого силой на тело при некотором его перемещении, вводится понятие о работе силы. При этом работа характеризует то действие силы, которым определяется изменение *модуля* скорости движущейся точки.

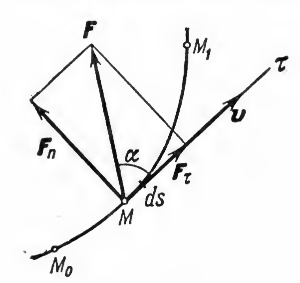


Рис. 250.

Введем сначала понятие об элементарной работе силы на бесконечно малом перемещении ds. Элементарной работой силы $\boldsymbol{F}$ (рис. 250) называется скалярная величина

$$dA = F_\tau\, ds, \qquad (35)$$

где F_τ — проекция силы $\boldsymbol{F}$ на касательную к траектории, направленную в сторону перемещения точки, а ds — бесконечно малое перемещение точки, направленное вдоль этой касательной.

Данное определение соответствует понятию о работе, как о характеристике того действия силы, которое приводит к изменению модуля скорости точки. В самом деле, если разложить силу $\boldsymbol{F}$ на составляющие $\boldsymbol{F}_\tau$ и $\boldsymbol{F}_n$, то изменять модуль скорости точки будет только составляющая $\boldsymbol{F}_\tau$, сообщающая точке касательное ускорение. Составляющая же $\boldsymbol{F}_n$ или изменяет направление вектора скорости $\boldsymbol{v}$ (сообщает точке нормальное ускорение), или, при несвободном движении, изменяет давление на связь. На модуль скорости составляющая $\boldsymbol{F}_n$ влиять не будет, т. е., как говорят, сила $\boldsymbol{F}_n$ «не будет производить работу».

Замечая, что $F_\tau = F\cos\alpha$, получаем еще из равенства (35)

$$dA = F\, ds \cos\alpha. \qquad (36)$$

Таким образом, *элементарная работа силы равна проекции силы на направление перемещения точки, умноженной на элементарное перемещение ds* (формула 35) или *элементарная работа силы равна произведению модуля силы на элементарное перемещение ds и на косинус угла между направлением силы и направлением перемещения* (формула 36).

Если угол α острый, то работа положительна. В частности, при $\alpha = 0$ элементарная работа $dA = F\,ds$.

Если угол α тупой, то работа отрицательна. В частности, при $\alpha = 180°$ элементарная работа $dA = -F\,ds$.

Если угол $\alpha = 90°$, т. е. *если сила направлена перпендикулярно перемещению, то элементарная работа силы равна нулю.*

Знак работы имеет следующий смысл: работа положительна, когда касательная составляющая силы направлена в сторону движения, т. е. когда сила ускоряет движение; работа отрицательна, когда касательная составляющая силы направлена противоположно движению, т. е. когда сила замедляет движение.

Как известно из кинематики, вектор элементарного перемещения точки $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\,dt$, а $ds = |\boldsymbol{v}|\,dt$. Отсюда видно, что $ds = |d\boldsymbol{r}|$. Тогда если воспользоваться известным из векторной алгебры понятием о скалярном произведении двух векторов [1]), то равенство (36) можно представить в виде

$$dA = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}. \qquad (36')$$

Следовательно, *элементарная работа силы равна скалярному произведению вектора силы на вектор элементарного перемещения точки ее приложения.*

Найдем аналитическое выражение элементарной работы. Для этого разложим силу $\boldsymbol{F}$ на составляющие $\boldsymbol{F}_x$, $\boldsymbol{F}_y$, $\boldsymbol{F}_z$ по направлениям координатных осей (рис. 251; сама сила $\boldsymbol{F}$ на чертеже не показана). Элементарное перемещение $MM' = ds$ слагается из перемещений dx, dy, dz вдоль координатных осей, где x, y, z — координаты точки M. Тогда работу силы $\boldsymbol{F}$ на перемещении ds можно вычислить как сумму работ ее составляющих $\boldsymbol{F}_x$, $\boldsymbol{F}_y$, $\boldsymbol{F}_z$ на перемещениях dx, dy, dz. Но на перемещении dx совершает работу только составляющая $\boldsymbol{F}_x$, причем ее работа равна $F_x\,dx$. Работа на перемещениях dy и dz вычисляется аналогично. Окончательно находим:

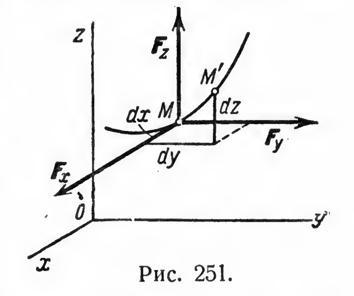


Рис. 251.

$$dA = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz. \qquad (37)$$

---

[1]) Скалярным произведением двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется скалярная величина, равная произведению модулей этих векторов на косинус угла α между ними, т. е. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab\cos\alpha$. Выражение скалярного произведения через проекции перемножаемых векторов имеет вид: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

Формула (37) дает *аналитическое выражение элементарной работы силы.*

Формула (37) получается непосредственно из равенства (36′), если выразить скалярное произведение через проекции перемножаемых векторов. Тогда, учитывая, что проекции на оси $Oxyz$ радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ точки M равны ее декартовым координатам x, y, z, найдем сразу (см. подстрочное примечание на стр. 269) $dA = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$.

Работа силы на любом конечном перемещении M_0M_1 (см. рис. 250) вычисляется как интегральная сумма соответствующих элементарных работ и будет равна:

$$A_{(M_0M_1)} = \int\limits_{(M_0)}^{(M_1)} F_\tau\,ds, \tag{38}$$

или

$$A_{(M_0M_1)} = \int\limits_{(M_0)}^{(M_1)} (F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz). \tag{38′}$$

Следовательно, *работа силы на любом перемещении M_0M_1 равна взятому вдоль этого перемещения интегралу от элементарной работы.* Пределы интеграла соответствуют значениям переменных интегрирования в точках M_0 и M_1 (точнее говоря, интеграл берется вдоль кривой M_0M_1, т. е. является криволинейным).

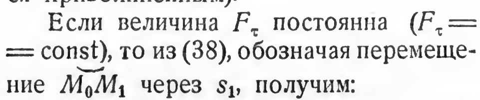


Рис. 252.

Если величина F_τ постоянна ($F_\tau = \mathrm{const}$), то из (38), обозначая перемещение $\breve{M_0M_1}$ через s_1, получим:

$$A_{(M_0M_1)} = F_\tau s_1. \tag{38″}$$

В частности, такой случай может иметь место, когда действующая сила постоянна по модулю и направлению ($\boldsymbol{F} = \mathrm{const}$), а точка, к которой приложена сила, движется прямолинейно (рис. 252). В этом случае $F_\tau = F\cos\alpha = \mathrm{const}$ и работа силы $A_{(M_0M_1)} = Fs_1\cos\alpha$.

Единицей измерения работы в системе *СИ* является *джоуль* (1 *дж* = 1 *нм*), а в системе *МкГС* — 1 *кГм*.

Для решения основной задачи динамики важно выделить те силы, работу которых можно вычислить заранее, *не зная* закона движения точки, на которую действует сила (сравн. с § 110). Из формулы (38′) видно, что такими могут быть только *постоянные силы или силы, зависящие от положения (координат) движущейся точки.*

Для вычисления работы сил, зависящих от времени или скорости движения точки, надо дополнительно знать закон ее движения, т. е. координаты x, y, z как функции времени. Тогда все переменные можно выразить через время t и вычислить интеграл (38′). Не зная закона движения точки, т. е. не решив предварительно основную задачу динамики, работу таких сил определить нельзя.

Графический способ вычисления работы. Если сила зависит от расстояния s и известен график зависимости F_τ от s (рис. 253), то работу силы $\boldsymbol{F}$ можно вычислить графически. Пусть в положении M_0 точка находится от начала отсчета на расстоянии s_0, а в положении M_1 — на расстоянии s_1. Тогда по формуле (38), учитывая геометрический смысл интеграла, получим:

$$A_{(M_0M_1)}=\int_{s_0}^{s_1} F_\tau\,ds=\sigma,$$

где σ — величина заштрихованной на рис. 253 площади, умноженной на масштабный коэффициент.

Рис. 253.

Мощность. *Мощностью* называется величина, определяющая работу, совершаемую силой в единицу времени. Если работа совершается равномерно, то мощность

$$W=\frac{A}{t_1},$$

где t_1 — время, в течение которого произведена работа A. В общем случае

$$W=\frac{dA}{dt}=\frac{F_\tau\,ds}{dt}=F_\tau v.$$

Следовательно, мощность равна произведению касательной составляющей силы на скорость движения.

Единицей измерения мощности в системе *СИ* является *ватт* (1 *вт* = 1 *дж/сек*), а в системе *МкГС* — 1 *кГм/сек*. В технике за единицу мощности часто принимается 1 лошадиная сила, равная 75 *кГм/сек* или 736 *вт*.

Работу, произведенную машиной, можно измерять произведением ее мощности на время работы. Отсюда возникла употребительная в технике единица измерения работы киловатт-час (1 *квт-ч* $=3{,}6\times10^6$ *дж* ≈ 367100 *кГм*).

Из равенства $W=F_\tau v$ видно, что у двигателя, имеющего данную мощность W, сила тяги F_τ будет тем больше, чем меньше скорость движения v. Поэтому, например, на подъеме или на плохом участке дороги у автомобиля включают низшие передачи, позволяющие при полной мощности двигаться с меньшей скоростью и развивать бóльшую силу тяги.

§ 113. Примеры вычисления работы. Рассмотренные ниже примеры дают результаты, которыми можно непосредственно пользоваться при решении задач.

1) Работа силы тяжести. Пусть точка M, на которую действует сила тяжести $\boldsymbol{P}$, перемещается из положения $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в положение $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Выберем оси координат так, чтобы ось Oz была направлена вертикально вверх (рис. 254). Тогда $P_x = 0$, $P_y = 0$, $P_z = -P$. Подставляя эти значения в формулу (38′), получим, учитывая, что переменным интегрирования является z:

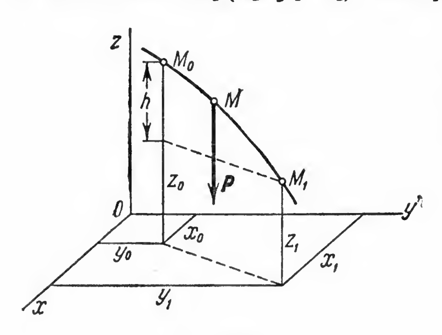


Рис. 254.

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} (-P)\,dz = -P \int_{z_0}^{z_1} dz = P(z_0 - z_1).$$

Если точка M_0 выше M_1, то $z_0 - z_1 = h$, где h — величина вертикального перемещения точки; если же точка M_0 ниже точки M_1, то $z_0 - z_1 = -(z_1 - z_0) = -h$.

Окончательно получаем:

$$A_{(M_0M_1)} = \pm Ph. \tag{39}$$

Следовательно, *работа силы тяжести равна взятому со знаком плюс или минус произведению модуля силы на вертикальное перемещение точки ее приложения.* Работа положительна, если начальная точка выше конечной, и отрицательна, если начальная точка ниже конечной.

Из полученного результата следует, что работа силы тяжести не зависит от вида той траектории, по которой перемещается точка ее приложения. Силы, обладающие таким свойством, называются *потенциальными* (см. § 151).

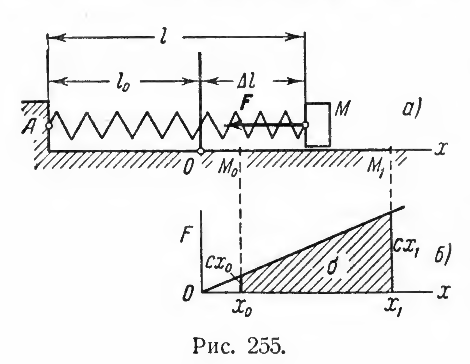


Рис. 255.

2) Работа силы упругости. Рассмотрим груз M, лежащий на горизонтальной плоскости и прикрепленный к свободному концу некоторой пружины (рис. 255, *а*). Отметим на плоскости точкой O положение, занимаемое концом пружины, когда она не напряжена ($AO = l_0$ — длина ненапряженной пружины), и примем эту точку за начало координат. Если теперь оттянуть груз от равновесного положения O, удлинив

пружину до величины l, то на груз будет действовать сила упругости пружины F, направленная к точке O. По закону Гука величина этой силы пропорциональна удлинению пружины $\Delta l = l - l_0$. Так как в нашем случае $\Delta l = x$, то по модулю

$$F = c\,|\Delta l| = c\,|x|.$$

Коэффициент c называется *коэффициентом жесткости* пружины. В технике обычно измеряют величину c в *кГ/см*, полагая коэффициент c численно равным силе, которую надо приложить к пружине, чтобы растянуть ее на 1 *см*.

Найдем работу, совершаемую силой упругости при перемещении груза из положения $M_0(x_0)$ в положение $M_1(x_1)$. Так как в данном случае $F_x = -F = -cx$, $F_y = F_z = 0$, то, подставляя эти значения в формулу (38′), получим:

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} (-cx)\,dx = -c\int_{x_0}^{x_1} x\,dx = \frac{c}{2}(x_0^2 - x_1^2).$$

(Этот же результат можно получить по графику зависимости F от x (рис. 255, *б*), вычисляя площадь σ заштрихованной на чертеже трапеции и учитывая знак работы.) В полученной формуле x_0 представляет собою начальное удлинение пружины $\Delta l_{нач}$, а x_1 — конечное удлинение пружины $\Delta l_{кон}$. Следовательно,

$$A_{(M_0M_1)} = \frac{c}{2}\left[(\Delta l_{нач})^2 - (\Delta l_{кон})^2\right], \tag{40}$$

т. е. *работа силы упругости равна половине произведения коэффициента жесткости на разность квадратов начального и конечного удлинений (или сжатий) пружины.*

Работа будет положительной, когда $|\Delta l_{нач}| > |\Delta l_{кон}|$, т. е. когда конец пружины перемещается к равновесному положению, и отрицательной, когда $|\Delta l_{нач}| < |\Delta l_{кон}|$, т. е. когда конец пружины удаляется от равновесного положения.

Можно доказать, что формула (40) остается справедливой и в случае, когда перемещение точки M не является прямолинейным. Таким образом оказывается, что работа силы F зависит только от значений $\Delta l_{нач}$ и $\Delta l_{кон}$ и не зависит от вида траектории точки M. Следовательно, сила упругости также является *потенциальной*.

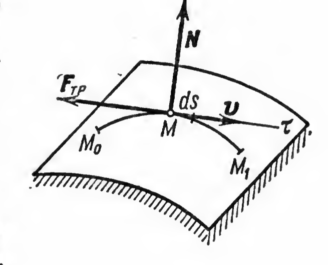


Рис. 256.

3) Работа силы трения. Рассмотрим точку, движущуюся по какой-нибудь шероховатой поверхности (рис. 256) или кривой. Действующая на точку сила трения равна по модулю fN, где f — коэффициент

трения, а N — нормальная реакция поверхности. Направлена сила трения противоположно перемещению точки. Следовательно, $F_{\text{тр}\tau} = -fN$ и по формуле (38)

$$A_{(M_0M_1)} = -\int_{(M_0)}^{(M_1)} F_{\text{тр}}\,ds = -\int_{(M_0)}^{(M_1)} fN\,ds.$$

Если величина силы трения постоянна, то $A_{(M_0M_1)} = -F_{\text{тр}}s$, где s — длина дуги кривой M_0M_1, по которой перемещается точка.

Таким образом, *работа силы трения при скольжении всегда отрицательна.* Величина этой работы зависит от длины дуги M_0M_1; следовательно, сила трения является силой *непотенциальной.*

4*) Работа силы тяготения. Если Землю (планету) рассматривать как однородный шар (или шар, состоящий из однородных концентричных слоев), то на точку M с массой m, находящуюся вне шара или на его поверхности, будет действовать сила притяжения (тяготения) $\boldsymbol{F}$, направленная к центру O шара (рис. 257) и изменяющаяся обратно пропорционально квадрату расстояния $\boldsymbol{r}$ от точки M до центра O,

$$F = k\frac{m}{r^2}.$$

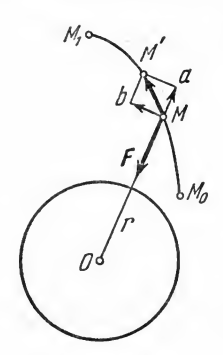


Рис. 257.

Коэффициент пропорциональности k можно определить из того условия, что, когда точка находится на поверхности Земли ($r = R$, где R — радиус Земли), сила притяжения равна mg, где g — ускорение силы тяжести на земной поверхности. Тогда должно быть

$$mg = k\frac{m}{R^2} \quad \text{и} \quad k = gR^2.$$

Подсчитаем сначала элементарную работу силы $\boldsymbol{F}$. Как видно из рисунка, элементарное перемещение $\overline{MM'}$ точки M можно разложить на перемещение $\overline{Ma}$, численно равное приращению dr расстояния $OM = r$ и направленное вдоль OM, и на перемещение $\overline{Mb}$, перпендикулярное к OM, а следовательно, и к силе $\boldsymbol{F}$ (см. еще § 71, рис. 155). Поскольку на этом втором перемещении работа силы $\boldsymbol{F}$ равна нулю, а перемещение $\overline{Ma}$ направлено противоположно силе, то

$$dA = -F\,dr = -k\frac{m}{r^2}\,dr. \tag{41}$$

Допустим теперь, что точка перемещается из положения M_0, для которого $r = r_0$, в положение M_1, где $r = r_1$. Тогда

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} dA = -km\int_{r_0}^{r_1}\frac{dr}{r^2} = km\int_{r_0}^{r_1} d\left(\frac{1}{r}\right)$$

или окончательно

$$A_{(M_0M_1)} = km\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0}\right) = mgR^2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0}\right). \tag{41'}$$

Работа будет положительной, если $r_0 > r_1$, т. е. когда конечное положение точки ближе к земной поверхности, чем начальное, и отрицательной, если $r_0 < r_1$. От вида траектории, вдоль которой перемещается точка M, работа силы тяготения, как показывает формула (41'), не зависит. Следовательно, сила тяготения является *потенциальной силой*.

§ 114. Теорема об изменении кинетической энергии точки. Рассмотрим точку с массой m, перемещающуюся под действием приложенных к ней сил из положения M_0, где она имеет скорость v_0, в положение M_1, где ее скорость равна v_1.

Для получения искомой зависимости обратимся к уравнению $m\boldsymbol{w} = \sum \boldsymbol{F}_k$, выражающему основной закон динамики. Проектируя обе части этого равенства на касательную $M\tau$ к траектории точки M, направленную в сторону движения, получим:

$$mw_\tau = \sum F_{k\tau}.$$

Стоящую слева величину касательного ускорения можно представить в виде

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\,\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds}v.$$

В результате будем иметь:

$$mv\frac{dv}{ds} = \sum F_{k\tau}.$$

Умножив обе части этого равенства на ds, внесем m под знак дифференциала. Тогда, замечая, что $F_{k\tau}\,ds = dA_k$, где dA_k — элементарная работа силы $\boldsymbol{F}_k$, получим выражение теоремы об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \sum dA_k.$$

Проинтегрировав теперь обе части этого равенства в пределах, соответствующих значениям переменных в точках M_0 и M_1, найдем окончательно:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A_{(M_0 M_1)}. \qquad (42)$$

Уравнение (42) выражает теорему об изменении кинетической энергии точки в конечном виде: *изменение кинетической энергии точки при некотором ее перемещении равно алгебраической сумме работ всех действующих на точку сил на том же перемещении.*

Случай несвободного движения. При несвободном движении точки, как следует из уравнения (5), в правую часть равенства (42) войдет работа заданных (активных) сил $\boldsymbol{F}_k^a$ и работа реакции связи. Ограничимся рассмотрением движения точки по

неподвижной гладкой (лишенной трения) поверхности или кривой. В этом случае реакция $\boldsymbol{N}$ (см. рис. 256) будет направлена по нормали к траектории точки и $N_\tau = 0$. Тогда, согласно формуле (38), *работа реакции неподвижной гладкой поверхности (или кривой) при любом перемещении точки будет равна нулю,* и мы из уравнения (42) получим:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A^{\text{a}}_{(M_0M_1)}. \qquad (42')$$

Следовательно, при перемещении по неподвижной гладкой поверхности (или кривой) изменение кинетической энергии точки равно сумме работ на этом перемещении приложенных к точке *активных* сил.

Если поверхность (кривая) не является гладкой, то к работе активных сил прибавится работа силы трения (см. § 113). Если же поверхность (кривая) движется, то абсолютное перемещение точки M может не быть перпендикулярно к $\boldsymbol{N}$ и тогда работа реакции $\boldsymbol{N}$ не будет равна нулю (например, работа реакции платформы лифта).

§ 115. Решение задач. Приступая к решению, следует прежде всего установить, можно ли для решения данной задачи непосредственно воспользоваться одной из доказанных выше теорем и какой именно. При этом надо иметь в виду следующее.

С помощью теоремы об изменении количества движения точки легко решаются задачи, в которых:

а) действующие силы *постоянны* или зависят только от *времени*;

б) в число данных и искомых величин входят: действующие силы, *время движения,* начальная и конечная скорости точки (т. е. величины F, t, v_0, v_1).

С помощью теоремы об изменении кинетической энергии точки легко решаются задачи, в которых:

а) действующие силы *постоянны* или зависят только от *расстояния*;

б) в число данных и искомых величин входят: действующие силы, *перемещение точки,* скорости в начале и в конце перемещения (т. е. величины F, s, v_0, v_1).

Применяя обе теоремы одновременно, можно решить некоторые смешанные задачи, в которых данными (или искомыми) являются и время движения, и перемещение точки.

Если в числе действующих сил есть сила, зависящая от скорости движения, то решить основную задачу динамики с помощью какой-нибудь из общих теорем нельзя (нельзя наперед вычислить работу или импульс силы). В этом случае надо пользоваться методом интегрирования дифференциальных уравнений движения (глава XVII).

Порядок решения может быть следующий:

1. По данным задачи определить, какой из теорем можно воспользоваться для ее решения.

2. Изобразить на чертеже движущуюся точку в произвольном положении и показать все действующие на нее активные силы и реакции связей (если движение является несвободным).

3. Вычислить по соответствующим формулам импульсы или работу всех сил за время движения.

4. Пользуясь равенствами (34) или (42), составить соответствующие уравнения и определить из них искомые величины. При всех численных подсчетах обращать особое внимание на то, чтобы все величины вычислялись в одной и той же системе единиц.

Доказанные теоремы позволяют также по изменению количества движения или кинетической энергии точки определить импульс или работу действующих на точку сил (первая задача динамики).

Задача 102. Груз весом $p=0{,}1$ *кГ* движется равномерно со скоростью $v=2$ *м/сек* по окружности. Определить импульс и работу действующей на груз силы за время, в течение которого груз проходит четверть окружности.

Решение. По теореме об изменении количества движения

$$\boldsymbol{S}=m\boldsymbol{v}_1-m\boldsymbol{v}_0.$$

Строя геометрически разность этих количеств движений (рис. 258), находим из полученного прямоугольного треугольника:

$$S=m\sqrt{v_1^2+v_0^2}.$$

Но по условиям задачи $v_1=v_0=v$, следовательно,

$$S=\frac{p}{g}v\sqrt{2}=0{,}029\ кГсек.$$

Для работы из уравнения (42) находим:

$$A_{(M_0M_1)}=\frac{m}{2}(v_1^2-v_0^2)=0.$$

Задача 103. Грузу массы m, лежащему на горизонтальной плоскости, сообщают (толчком) начальную скорость $\boldsymbol{v}_0$. Последующее движение груза

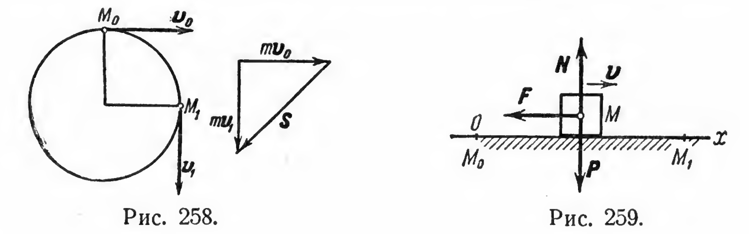


Рис. 258. Рис. 259.

тормозится постоянной силой $\boldsymbol{F}$. Определить, через сколько времени груз остановится и какой путь он пройдет до остановки.

Решение. По данным задачи видно, что для определения времени движения можно воспользоваться первой, а для нахождения пройденного пути — второй из доказанных теорем.

Изображаем груз (рис. 259) в произвольном положении M (M_0 и M_1 — его начальное и конечное положения). На груз действуют: сила тяжести $\boldsymbol{P}$,

реакция плоскости N и тормозящая сила F. Направляя ось Ox в сторону движения, составляем уравнение (34):

$$mv_{1x} - mv_{0x} = \sum S_x. \qquad \text{(a)}$$

В данном случае $v_{1x} = 0$ (v_1 — скорость в момент остановки), а $v_{0x} = v_0$. Из сил проекцию на ось Ox дает только сила F. Так как она постоянна, то $S_x = F_x t_1 = -Ft_1$, где t_1 — время торможения. Подставляя все эти данные в уравнение (а), получаем $-mv_0 = -Ft_1$, откуда искомое время

$$t_1 = \frac{mv_0}{F}. \qquad \text{(б)}$$

Для нахождения тормозного пути воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A_{(M_0 M_1)}.$$

Здесь опять $v_1 = 0$, а работу совершает только сила F, причем $A(F) = -Fs$, где s — тормозной путь. Работа сил P и N равна нулю, так как эти силы перпендикулярны перемещению. В результате получаем: $-\frac{mv_0^2}{2} = -Fs_1$ и искомый путь

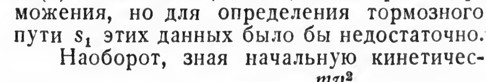
$$s_1 = \frac{mv_0^2}{2F}. \qquad \text{(в)}$$

Из формул (б) и (в) видно, что при данной силе F время торможения растет пропорционально начальной скорости v_0, а тормозной путь — пропорционально квадрату начальной скорости.

Если тормозящей силой является сила трения, причем коэффициент трения f известен, то тогда $F = fP = fmg$ и равенства (б) и (в) дают:

$$t_1 = \frac{v_0}{fg}, \quad s_1 = \frac{v_0^2}{2fg}.$$

Заметим, что если бы нам были заданы не масса груза m и его начальная скорость v_0, а начальное количество движения груза $Q_0 = mv_0$ (например, $Q_0 = 2$ *кгм/сек*), то из равенства (б) мы могли бы, зная F, найти время торможения, но для определения тормозного пути s_1 этих данных было бы недостаточно.



Наоборот, зная начальную кинетическую энергию груза $T_0 = \frac{mv_0^2}{2}$ и силу F, мы могли бы из равенства (в) определить тормозной путь s_1, но не нашли бы время торможения t_1. На эти обстоятельства и было указано в § 109.

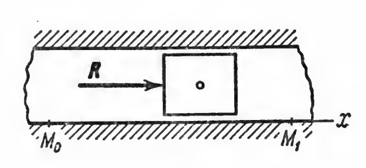
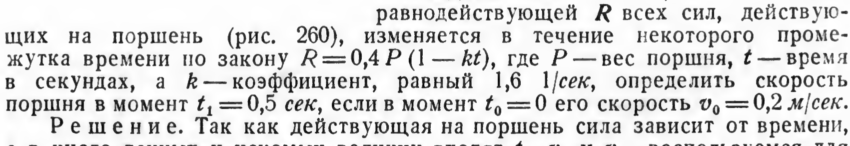


Рис. 260.



Задача 104. Считая, что величина равнодействующей R всех сил, действующих на поршень (рис. 260), изменяется в течение некоторого промежутка времени по закону $R = 0{,}4\,P(1 - kt)$, где P — вес поршня, t — время в секундах, а k — коэффициент, равный 1,6 1/*сек*, определить скорость поршня в момент $t_1 = 0{,}5$ *сек*, если в момент $t_0 = 0$ его скорость $v_0 = 0{,}2$ *м/сек*.

Решение. Так как действующая на поршень сила зависит от времени, а в число данных и искомых величин входят t_1, v_0 и v_1, воспользуемся для решения задачи уравнением (34):

$$mv_{1x} - mv_{0x} = S_x. \qquad \text{(a)}$$

В данном случае

$$S_x = \int_0^{t_1} R_x\,dt = 0{,}4P\int_0^{t_1}(1-kt)\,dt = 0{,}4Pt_1\left(1-\frac{k}{2}t_1\right).$$

Кроме того, $v_{0x}=v_0$, $v_{1x}=v_1$, $P=mg$. Подставляя все эти значения в уравнение (а) и учитывая, что $k=1{,}6$ *1/сек*, а $t_1=0{,}5$ *сек*, получим:

$$v_1 = v_0 + 0{,}4gt_1\left(1-\frac{k}{2}t_1\right)\approx 1{,}4 \text{ м/сек}.$$

Задача 105. Груз, подвешенный на нити длиною l (рис. 261, *а*) отклоняют от вертикали на угол φ_0 и отпускают без начальной скорости. Найти скорость груза в момент, когда нить образует с вертикалью угол φ.

Решение. Так как в условия задачи входят: *перемещение* груза, определяемое углом поворота нити, и скорости v_0 и v_1, воспользуемся для решения теоремой об изменении кинетической энергии

$$\frac{mv_1^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=\sum A_{(M_0M_1)}.$$

На груз действуют сила тяжести $\boldsymbol{P}$ и реакция нити $\boldsymbol{N}$. Работа силы $\boldsymbol{N}$ равна нулю, так как $N_\tau=0$. Для силы P по формуле (39) находим $A(\boldsymbol{P}) = Ph = mgh$. В результате, так как $v_0=0$, получаем $\frac{mv_1^2}{2}=mgh$, откуда,

$$v_1=\sqrt{2gh}.$$

Это — известная формула Галилея. Очевидно, такой же результат получится для скорости v свободно падающего груза (рис. 261, *б*).

В рассматриваемой задаче $h=l\cos\varphi - l\cos\varphi_0$ и окончательно

$$v_1=\sqrt{2gl(\cos\varphi-\cos\varphi_0)}.$$

Задача 106. Пружина клапана имеет в свободном состоянии длину $l_0=6$ *см*. При полностью открытом клапане длина пружины $l=4$ *см*, а высота подъема клапана $s=0{,}6$ *см* (рис. 262). Жесткость пружины $c=0{,}1$ *кГ/см*, вес клапана

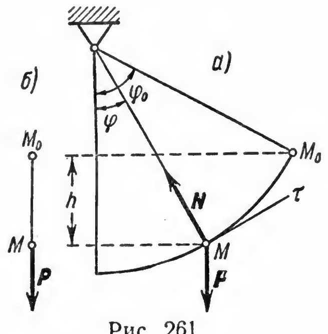


Рис. 261.

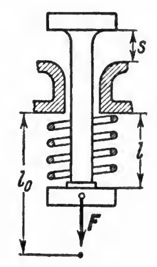


Рис. 262.

$p=0{,}4$ *кГ*. Пренебрегая действием силы тяжести и сил сопротивления, определить скорость клапана в момент его закрытия.

Решение. Действующая на клапан сила упругости $\boldsymbol{F}$ зависит от расстояния; кроме того, задано перемещение s клапана. Поэтому для решения

задачи воспользуемся уравнением (42)

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_{(M_0M_1)}.$$

По условиям задачи работу совершает только сила упругости пружины. Тогда по формуле (40) будем иметь:

$$A_{(M_0M_1)} = \frac{c}{2}\,[(\Delta l_{\text{нач}})^2 - (\Delta l_{\text{кон}})^2].$$

В данном случае

$$\Delta l_{\text{нач}} = l_0 - l = 2\ \textit{см},\quad \Delta l_{\text{кон}} = l_0 - l - s = 1{,}4\ \textit{см}.$$

Кроме того, $v_0 = 0$ и $m = \frac{P}{g}$. Подставляя все эти значения в уравнение (42), получим:

$$v_1 = \sqrt{\frac{cg}{P}\,[(\Delta l_{\text{нач}})^2 - (\Delta l_{\text{кон}})^2]} \approx 0{,}22\ \textit{м/сек}.$$

При подсчете обратить внимание на размерности (так как Δl вычислено в сантиметрах, то надо считать $g = 980\ \textit{см/сек}^2$).

Задача 107. Груз, лежащий на середине упругой балки (рис. 263), прогибает ее на величину $\delta_{\text{ст}}$ (статический прогиб балки). Пренебрегая весом балки, определить, чему будет равен ее максимальный прогиб δ_m, если груз упадет на балку с высоты H.

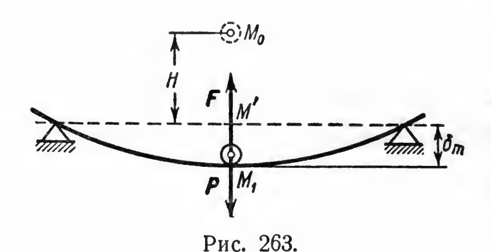


Рис. 263.

Решение. Как и в предыдущей задаче, воспользуемся для решения уравнением (42). В данном случае начальная скорость груза v_0 и конечная его скорость v_1 (в момент максимального прогиба балки) равны нулю и уравнение (42) принимает вид

$$\Sigma A_k = 0. \qquad \text{(a)}$$

Работу здесь совершают сила тяжести $\boldsymbol{P}$ на перемещении M_0M_1 и сила упругости балки $\boldsymbol{F}$ на перемещении $M'M_1$. При этом $A(\boldsymbol{P}) = P(H + \delta_m)$, $A(\boldsymbol{F}) = -\frac{c}{2}\delta_m^2$, так как для балки $\Delta l_{\text{нач}} = 0$, $\Delta l_{\text{кон}} = \delta_m$. Подставляя эти величины в равенство (a), получим:

$$P(H + \delta_m) - \frac{c}{2}\delta_m^2 = 0.$$

Но при равновесии груза на балке сила тяжести уравновешивается силой упругости; следовательно, $P = c\delta_{\text{ст}}$ и предыдущее равенство можно представить в виде:

$$\delta_m^2 - 2\delta_{\text{ст}}\delta_m - 2\delta_{\text{ст}}H = 0.$$

Решая это квадратное уравнение и учитывая, что по условиям задачи должно быть $\delta_m > 0$, находим:

$$\delta_m = \delta_{\text{ст}} + \sqrt{\delta_{\text{ст}}^2 + 2H\delta_{\text{ст}}}.$$

Интересно отметить, что при $H=0$ получается $\delta_m=2\delta_{ст}$. Следовательно, если груз положить на середину горизонтальной балки, то ее максимальный прогиб при опускании груза будет равен удвоенному статическому. В дальнейшем балка с грузом начнет совершать колебания около равновесного положения. Под влиянием сопротивлений эти колебания затухнут и система уравновесится в положении, когда прогиб балки будет равен $\delta_{ст}$.

Задача 108. Определить, какую наименьшую направленную вертикально вверх начальную скорость v_0 надо сообщить телу, чтобы оно поднялось с поверхности Земли на заданную высоту H. При подсчете считать силу притяжения изменяющейся обратно пропорционально квадрату расстояния от центра Земли. Сопротивлением воздуха пренебречь.

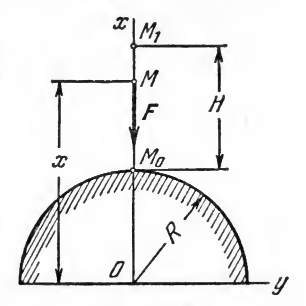


Рис. 264.

Решение. Для решения задачи воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии, рассматривая тело как материальную точку. Тогда

$$\frac{mv_1^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=A_{(M_0M_1)}, \qquad (a)$$

где m — масса точки.

Подсчитаем работу силы F, не пользуясь готовой формулой (41′). Поместим начало координат в центре O Земли (центр притяжения) и направим ось Ox в сторону движения (рис. 264). Изобразим в произвольном положении точку M и действующую на нее силу F. По условиям задачи

$$F=k\frac{m}{x^2}.$$

Коэффициент пропорциональности k находится из условия, что на поверхности Земли, т. е. при $x=R$ (R — радиус Земли), сила притяжения равна mg (g — ускорение силы тяжести на земной поверхности). Отсюда $mg=k\frac{m}{R^2}$ и $k=gR^2$.

Теперь, замечая, что

$$F_x=-F=-\frac{km}{x^2}, \quad F_y=F_z=0,$$

находим по формуле (38′)

$$A_{(M_0M_1)}=\int\limits_{(M_0)}^{(M_1)}\left(-\frac{km}{x^2}\right)dx=-km\int\limits_R^{R+H}\frac{dx}{x^2}.$$

Вычисляя интеграл, будем иметь:

$$A_{(M_0M_1)}=km\left(\frac{1}{R+H}-\frac{1}{R}\right)=-\frac{kmH}{R(R+H)}.$$

Этот же результат можно получить сразу по формуле (41′), если учесть, что в нашем случае $r_0=R$, а $r_1=R+H$.

Поскольку в наивысшем положении M_1 скорость точки $v_1=0$, то подставляя найденную величину работы в уравнение (a) и заменяя k его значением, получим окончательно:

$$v_0=\sqrt{\frac{2gRH}{R+H}}.$$

Рассмотрим частные случаи.

а) Пусть H очень мало по сравнению с R. Тогда H/R — величина, близкая к нулю. Деля числитель и знаменатель на R, получим:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gH}{1+\frac{H}{R}}} \approx \sqrt{2gH}.$$

Таким образом, при малых H приходим к формуле Галилея.

б) Найдем, при какой начальной скорости брошенное тело уйдет в бесконечность. Деля числитель и знаменатель на H, получим:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gR}{1+\frac{R}{H}}}.$$

При $H=\infty$, считая средний радиус Земли $R \approx 6370$ *км*, находим:

$$v_0 = \sqrt{2gR} \approx 11{,}2 \text{ км/сек}.$$

Следовательно, тело, брошенное с поверхности Земли со скоростью 11,2 *км/сек*, навсегда покинет поле земного тяготения.

Можно подсчитать, что при начальных скоростях, лежащих приблизительно в пределах 8 *км/сек* $\leqslant v_0 \leqslant$ 11 *км/сек*, тело, брошенное по направлению касательной к земной поверхности, не упадет обратно на Землю, а превратится в земного спутника. При начальных скоростях, меньших 8 *км/сек*, или при негоризонтальном бросании тело, описав эллиптическую траекторию, упадет обратно на Землю. Все эти результаты относятся к движению в безвоздушном пространстве (см. главу XXII).

§ 116. Теорема об изменении момента количества движения точки (теорема моментов). Из двух основных динамических характеристик, введенных в § 109, величина $m\boldsymbol{v}$ является векторной. Иногда при изучении движения точки вместо изменения самого вектора $m\boldsymbol{v}$ оказывается необходимым рассматривать изменение его момента. Момент вектора $m\boldsymbol{v}$ относительно данного центра O или оси z обозначается $\boldsymbol{m}_O(m\boldsymbol{v})$ или $m_z(m\boldsymbol{v})$ и называется соответственно *моментом количества движения* или *кинетическим моментом* точки относительно этого центра (оси). Вычисляется момент вектора $m\boldsymbol{v}$ так же, как и момент силы. При этом вектор $m\boldsymbol{v}$ считается приложенным к движущейся точке. По модулю $|\boldsymbol{m}_O(m\boldsymbol{v})| = mvh$, где h — длина перпендикуляра, опущенного из центра O на направление вектора $m\boldsymbol{v}$ (см. рис. 265).

1. Теорема моментов относительно оси[1]. Рассмотрим материальную точку массы m, движущуюся под действием силы $\boldsymbol{F}$. Найдем для нее зависимость между моментами векторов $m\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{F}$ относительно какой-нибудь неподвижной оси z. По формулам § 43

$$m_z(\boldsymbol{F}) = xF_y - yF_x. \tag{43}$$

---

[1]) Этот результат может быть получен, как частный случай, из пункта 2.

Аналогично для величины $m_z(m\boldsymbol{v})$, если вынести m за скобку, будет

$$m_z(m\boldsymbol{v}) = m(xv_y - yv_x). \tag{43'}$$

Беря от обеих частей этого равенства производные по времени, находим:

$$\frac{d}{dt}[m_z(m\boldsymbol{v})] = m\left(\frac{dx}{dt}v_y - \frac{dy}{dt}v_x\right) + \left(xm\frac{dv_y}{dt} - ym\frac{dv_x}{dt}\right).$$

В правой части полученного выражения первая скобка равна нулю, так как $\frac{dx}{dt} = v_x$, а $\frac{dy}{dt} = v_y$. Вторая же скобка согласно формуле (43) равна $m_z(\boldsymbol{F})$, так как по основному закону динамики

$$m\frac{dv_y}{dt} = F_y, \qquad m\frac{dv_x}{dt} = F_x.$$

Окончательно будем иметь

$$\frac{d}{dt}[m_z(m\boldsymbol{v})] = m_z(\boldsymbol{F}). \tag{44}$$

Полученное уравнение выражает теорему моментов относительно оси: *производная по времени от момента количества движения точки относительно какой-нибудь оси равна моменту действующей силы относительно той же оси.* Аналогичная теорема имеет место и для моментов относительно любого центра O. Ее математическое выражение дано ниже формулой (45').

Из уравнения (44) следует, что если $m_z(\boldsymbol{F}) = 0$, то $m_z(m\boldsymbol{v}) = \text{const}$, т. е. если момент действующей силы относительно некоторой оси равен нулю, то момент количества движения точки относительно этой оси есть величина постоянная.

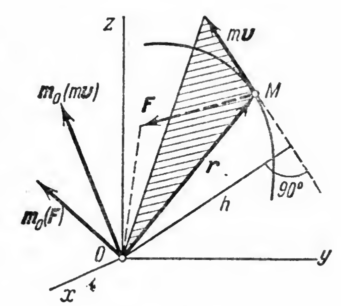


Рис. 265.

2*. Теорема моментов относительно центра. Найдем для материальной точки, движущейся под действием силы $\boldsymbol{F}$ (рис. 265), зависимость между моментами векторов $m\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{F}$ относительно какого-нибудь неподвижного центра O. В конце § 42 было показано, что $\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$. Аналогично

$$\boldsymbol{m}_O(m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}.$$

При этом вектор $\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})$ направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через центр O и вектор $\boldsymbol{F}$, а вектор $\boldsymbol{m}_O(m\boldsymbol{v})$ — перпендикулярно плоскости, проходящей через центр O и вектор $m\boldsymbol{v}$.

Дифференцируя выражение $\boldsymbol{m}_O(m\boldsymbol{v})$ по времени, получаем:

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v})=\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times m\boldsymbol{v}\right)+\left(\boldsymbol{r}\times m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right)=(\boldsymbol{v}\times m\boldsymbol{v})+(\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{w}).$$

Но $\boldsymbol{v}\times m\boldsymbol{v}=0$ как векторное произведение двух параллельных векторов, а $m\boldsymbol{w}=\boldsymbol{F}$. Следовательно,

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v})=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} \tag{45}$$

или

$$\frac{d}{dt}[\boldsymbol{m}_O(m\boldsymbol{v})]=\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}). \tag{45'}$$

В результате мы доказали следующую теорему моментов относительно центра: *производная по времени от момента количества движения точки, взятого относительно какого-нибудь неподвижного центра, равна моменту действующей на точку силы относительно того же центра.* Аналогичная теорема имеет место для моментов вектора $m\boldsymbol{v}$ и силы $\boldsymbol{F}$ относительно какой-нибудь оси z, в чем можно убедиться, проектируя обе части равенства (45′) на эту ось. Непосредственным путем это было доказано в п. 1. Математическое выражение теоремы моментов относительно оси дается полученной выше формулой (44).

Сравнивая уравнения (45′) и (32), мы видим, что моменты векторов $m\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{F}$ связаны такой же зависимостью, какой связаны сами векторы $m\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{F}$.

Из уравнения (45′) следует, что если $\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})=0$, то $\boldsymbol{m}_O(m\boldsymbol{v})=\mathrm{const}$, т. е. если момент действующей силы относительно некоторого центра равен нулю, то момент количества движения точки относительно этого центра есть величина численно и по направлению постоянная. Такой результат имеет место в практически очень важном случае движения под действием *центральной силы* (§ 117).

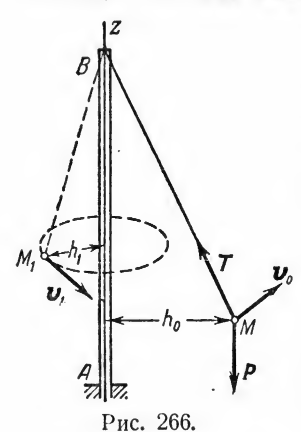


Рис. 266.

Задача 109. Шарик M привязан к нити MBA, часть BA которой продета сквозь вертикальную трубку (рис. 266). В момент, когда шарик находится на расстоянии h_0 от оси z трубки, ему сообщают начальную скорость $\boldsymbol{v}_0$, перпендикулярную к плоскости MBA. Одновременно нить начинают медленно втягивать в трубку. Найти, какую скорость $\boldsymbol{v}_1$ будет иметь шарик, когда его расстояние от оси z станет равно h_1.

Решение. На шарик действует сила тяжести $\boldsymbol{P}$ и реакция нити $\boldsymbol{T}$. Моменты этих сил относительно оси z равны нулю, так как сила $\boldsymbol{P}$ параллельна оси z, а сила $\boldsymbol{T}$ эту ось пересекает. Тогда по уравнению (44) будет

$$\frac{d}{dt}[m_z(m\boldsymbol{v})]=0,$$

откуда $m_z(m\boldsymbol{v}) = mvh = \text{const}$. Так как масса m постоянна, то отсюда следует, что при движении шарика $v_0h_0 = v_1h_1$. Следовательно,

$$v_1 = \frac{h_0}{h_1}v_0.$$

По мере приближения шарика к оси его скорость растет.

§ 117*. Движение под действием центральной силы. Закон площадей. *Центральной* называется сила, линия действия которой проходит все время через данный центр O. Примером такой силы является сила притяжения планеты к Солнцу или спутника к Земле.

Рассмотрим, пользуясь уравнением (45′), как будет двигаться точка M (рис. 267) под действием центральной силы $\boldsymbol{F}$. Так как в данном случае $\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})=0$, то $\boldsymbol{m}_O(m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v} = \text{const}$ или, поскольку масса m постоянна, $\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = \text{const}$, т. е. вектор $\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{v})$ постоянен и по модулю и по направлению. Напомним, что вектор $\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$ направлен перпендикулярно к плоскости, проходящей через векторы $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{v}$. Следовательно, если вектор $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$ имеет все время постоянное направление, то радиус-вектор $\boldsymbol{r} = \overline{OM}$ точки M и вектор ее скорости $\boldsymbol{v}$ должны все время лежать в одной и той же плоскости. Отсюда заключаем, что траектория точки M будет *плоской кривой*. Кроме того, одновременно будет $|\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{v})| = vh = \text{const}$.

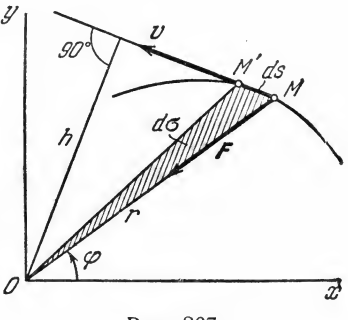


Рис. 267.

Таким образом, при движении под действием центральной силы точка будет двигаться по плоской кривой, а ее скорость $\boldsymbol{v}$ будет изменяться так, что момент вектора $\boldsymbol{v}$ относительно центра O будет оставаться постоянным ($vh = \text{const}$).

Последний результат имеет наглядное геометрическое истолкование. Так как $vh = \frac{ds}{dt}h$, а $ds \cdot h = 2d\sigma$, где $d\sigma$ — площадь элементарного треугольника OMM', то, следовательно, $vh = 2\frac{d\sigma}{dt}$. Величина $\frac{d\sigma}{dt}$ определяет скорость, с которой растет площадь, ометаемая радиусом-вектором OM при движении точки M, и называется *секторной скоростью* точки. В рассматриваемом случае эта скорость постоянна

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{2}|\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{v})| = \text{const}. \tag{46}$$

Таким образом, *при движении под действием центральной силы точка движется по плоской кривой с постоянной секторной*

скоростью, т. е. так, что радиус-вектор точки в любые равные промежутки времени ометает равные площади (закон площадей). Этот закон имеет место при движении планет или спутников и выражает собой один из законов Кеплера.

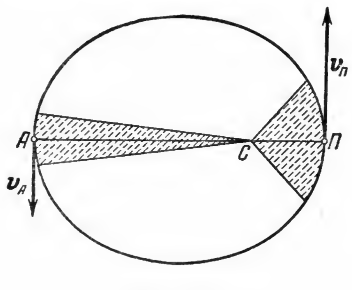


Рис. 268.

Пример. Орбитой планеты, движущейся под действием силы притяжения Солнца, является эллипс, причем Солнце находится в одном из фокусов C эллипса (рис. 268). Так как сила притяжения является центральной, то при движении имеет место закон площадей. Поэтому в ближайшей к Солнцу точке орбиты $П$ (*перигелий*) скорость планеты $v_П$ будет наибольшей, а в наиболее удаленной от Солнца точке A (*афелий*) — скорость v_A будет наименьшей. Этот результат следует из уравнения (46), которое для точек A и B дает $v_A \cdot AC = v_П \cdot ПC$. К тому же выводу можно прийти, если учесть, что площади пунктирно заштрихованных на рис. 268 секторов, ометаемых за одинаковые промежутки времени, должны быть равны; следовательно, за одно и то же время планета вблизи точки $П$ должна пройти больший путь, чем вблизи A.

Аналогичный результат имеет место при движении спутника.

ГЛАВА XIX
НЕСВОБОДНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

§ 118. Уравнения движения точки по заданной неподвижной кривой. Некоторые задачи несвободного движения, как мы видели, можно решать с помощью общих теорем динамики. Рассмотрим другой метод решения этих задач, которым можно пользоваться при любых действующих силах и который позволяет одновременно находить и закон движения точки, и реакции наложенных связей.

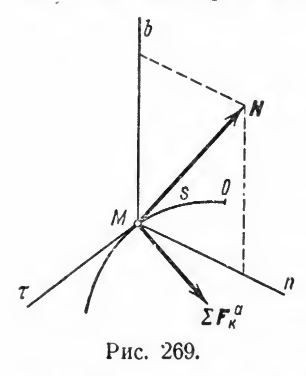


Рис. 269.

Пусть точка движется по заданной гладкой неподвижной кривой под действием активных сил $F_1^a, F_2^a, \ldots, F_n^a$. Выберем на кривой начало отсчета O (рис. 269) и будем определять положение движущейся точки M криволинейной координатой $s = \overset{\smile}{OM}$ (см. § 59). Если, отбросив связь, заменить ее действие реакцией N, то основной закон динамики примет вид (см. § 102):

$$m\boldsymbol{w} = \sum \boldsymbol{F}_k^a + \boldsymbol{N}. \quad (47)$$

Проведем в точке M касательную $M\tau$ (*в сторону положительного отсчета* s), главную нормаль Mn (*в сторону вогнутости кривой*) и перпендикулярную к ним ось Mb, называемую *бинормалью*, и спроектируем обе части равенства (47) на эти оси. Так как кривая гладкая, то реакция $\boldsymbol{N}$ перпендикулярна к кривой, т. е. расположена в плоскости Mbn и, следовательно, $N_\tau = 0$. Тогда будем иметь:

$$mw_\tau = \sum F^a_{k\tau}, \quad mw_n = \sum F^a_{kn} + N_n, \quad mw_b = \sum F^a_{kb} + N_b.$$

Но $w_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$, $w_n = \frac{v^2}{\rho}$, а $w_b = 0$, так как вектор ускорения $\boldsymbol{w}$ лежит в соприкасающейся плоскости $M\tau n$. В результате получаем следующие *дифференциальные уравнения движения точки по заданной кривой*:

$$m\frac{dv}{dt} = \sum F^a_{k\tau}, \quad \text{или} \quad m\frac{d^2s}{dt^2} = \sum F^a_{k\tau}; \tag{48}$$

$$\frac{mv^2}{\rho} = \sum F^a_{kn} + N_n, \quad 0 = \sum F^a_{kb} + N_b. \tag{49}$$

Полученные уравнения позволяют решить обе указанные в § 102 задачи несвободного движения.

Уравнение (48) не содержит неизвестной реакции N и позволяет определить закон движения точки вдоль кривой, т. е. зависимость $s = f(t)$. Уравнения же (49) служат для определения реакции связи (см. § 119).

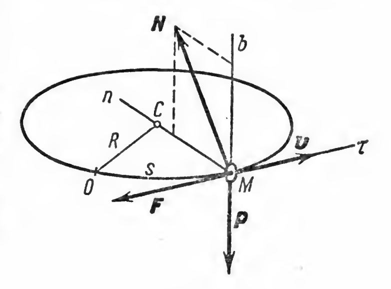


Рис. 270.

Полученными уравнениями можно пользоваться и в случае, когда кривая не является гладкой; при этом к силам $\boldsymbol{F}^a_k$ должна быть присоединена сила трения.

Уравнения (48), (49) будут также справедливы и для движения свободной точки, если в них положить $N = 0$.

Задача 110. Тяжелому кольцу M, нанизанному на горизонтально расположенную гладкую проволочную окружность, сообщают начальную скорость v_0, направленную по касательной к окружности. При движении на кольцо действует сила сопротивления $F = km\sqrt{v}$, где m — масса кольца, v — его скорость, k — постоянный коэффициент. Найти, через сколько секунд кольцо остановится.

Решение. Помещаем начало отсчета O в начальном положении кольца (рис. 270). Изображаем кольцо в произвольном положении и проводим оси $M\tau$, Mn и Mb. На кольцо действуют сила тяжести $\boldsymbol{P}$, реакция $\boldsymbol{N}$ и сила сопротивления $\boldsymbol{F}$. Составим уравнение (48), учитывая, что $P_\tau = N_\tau = 0$, а $F_\tau = -F = -km\sqrt{v}$; получим

$$m\frac{dv}{dt} = -km\sqrt{v}.$$

Отсюда, разделяя переменные и учитывая, что при $t=0$ $v=v_0$, будем иметь:

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{\sqrt{v}}=-k\int_0^t dt \quad \text{или} \quad 2(\sqrt{v}-\sqrt{v_0})=-kt.$$

В момент $t=t_1$, когда груз останавливается, $v=0$. Следовательно, полагая в полученном уравнении $v=0$, найдем

$$t_1=\frac{2\sqrt{v_0}}{k}.$$

Время движения до остановки при данном законе сопротивления является конечным (см. задачу 100 в § 105).

Задача 111. В предыдущей задаче найти, какой путь s_1 пройдет кольцо вдоль окружности до остановки, считая, что на него действует не сила сопротивления, зависящая от скорости, а сила трения $F=fN$. Дано: радиус кольца $R=0{,}3$ *м*, начальная скорость $v_0=2$ *м/сек*, коэффициент трения кольца об окружность $f=0{,}3$.

Решение. Выбираем начало отсчета O и проводим оси $M\tau$, Mn и Mb так же, как и в предыдущей задаче (см. рис. 270). Действующими на кольцо силами будут $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{F}$, где $\boldsymbol{F}$ теперь — сила трения. Составляя уравнения (48), (49), получим:

$$m\frac{dv}{dt}=-F, \qquad \frac{mv^2}{R}=N_n, \qquad N_b-P=0.$$

По модулю $F=fN=f\sqrt{N_b^2+N_n^2}$ (было бы ошибкой вычислить силу трения как арифметическую сумму сил fN_b и fN_n). Замечая, что $N_b=P=$ $=mg$, находим:

$$F=fm\sqrt{g^2+\frac{v^4}{R^2}}.$$

Как видим, сила трения зависит через реакцию N от скорости движения кольца. Поэтому данную задачу, как и предыдущую, нельзя решить с помощью теоремы об изменении кинетической энергии.

Чтобы сразу найти зависимость s от v, заметим, что $\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt}=\frac{dv}{ds}v$. Тогда, после сокращения на m, уравнение движения кольца примет вид

$$v\frac{dv}{ds}=-\frac{f}{R}\sqrt{g^2R^2+v^4}.$$

Разделяя переменные и беря от обеих частей равенства соответствующие определенные интегралы, будем иметь

$$\int_{v_0}^{v}\frac{d(v^2)}{\sqrt{g^2R^2+v^4}}=-\frac{2f}{R}\int_0^s ds,$$

откуда

$$-\frac{2f}{R}s=\ln(v^2+\sqrt{g^2R^2+v^4})-\ln(v_0^2+\sqrt{g^2R^2+v_0^4})$$

и, окончательно,

$$s=\frac{R}{2f}\ln\frac{v_0^2+\sqrt{g^2R^2+v_0^4}}{v^2+\sqrt{g^2R^2+v^4}}.$$

В момент остановки $v=0$. Поэтому искомый путь, если считать приближенно $g\approx 10$ *м/сек²*, будет равен

$$s_1=\frac{R}{2f}\ln\frac{v_0^2+\sqrt{v_0^4+g^2R^2}}{gR}\approx\frac{1}{2}\ln 3\approx 0{,}55 \text{ м}.$$

§ 119. Определение реакций связей. При движении точки по заданной кривой реакция связи находится с помощью уравнений (49). При этом движущуюся точку следует изображать в том положении, для которого определяется эта реакция. Если скорость v, входящая в уравнение (49), заранее не известна, то во многих случаях ее можно определить по теореме об изменении кинетической энергии (§ 114).

Из уравнения (49) видно, что при криволинейном движении динамическая реакция N, в отличие от статической, будет зависеть не только от действующих активных сил и вида связи, но и от скорости движения.

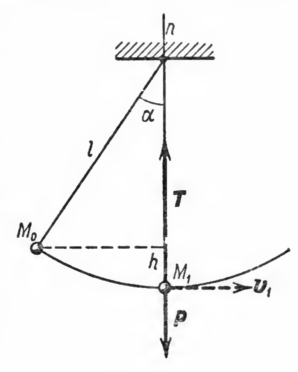


Рис. 271.

Задача 112. Груз весом P, подвешенный на нити длиною l, отклоняют от вертикали на угол α в положение M_0 и отпускают без начальной скорости. Определить величину натяжения нити в момент, когда груз дойдет до наинизшего положения M_1.

Решение. Изображаем груз в том положении, для которого надо найти натяжение нити, т. е. в положении M_1 (рис. 271). На груз действуют сила тяжести $\boldsymbol{P}$ и реакция нити $\boldsymbol{T}$. Проводим нормаль M_1n *в сторону вогнутости траектории* и составляем уравнение (49), учитывая, что в нашем случае $\rho=l$. Получаем:

$$\frac{mv_1^2}{l}=T-P \quad \text{или} \quad T=P+\frac{mv_1^2}{l},$$

где v_1 — скорость груза в положении M_1. Для определения v_1 воспользуемся уравнением (42′)

$$\frac{mv_1^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=A^{\text{a}}_{(M_0M_1)}. \qquad \text{(a)}$$

Работу на участке M_0M_1 совершает только сила P. Поэтому $A^{\text{a}}=Ph=Pl(1-\cos\alpha)$.

Так как $v_0=0$, то, подставляя найденное значение работы в равенство (а), получим $mv_1^2=2Pl(1-\cos\alpha)$ и окончательно найдем:

$$T=P(3-2\cos\alpha).$$

В частном случае, если угол начального отклонения $\alpha=90°$, натяжение нити при прохождении через вертикаль будет равно $3P$, т. е. утроенному весу груза.

Полученное решение показывает, что динамические реакции действительно могут значительно отличаться от статических.

Задача 113. Желоб состоит из двух дуг AB и BD окружностей радиуса R, расположенных в вертикальной плоскости так, что касательная BE в точке сопряжения горизонтальна (рис. 272). Пренебрегая трением, определить, на какой высоте h над линией BE надо положить в желоб тяжелый шарик, чтобы он соскочил с желоба в точке M_1, лежащей на таком же расстоянии h ниже линии BE.

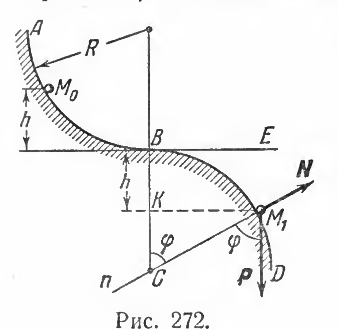


Рис. 272.

Решение. Шарик оторвется от желоба в той точке M_1, где его давление на желоб (или реакция N желоба) обратится в нуль. Следовательно, задача сводится к определению N. Изображаем шарик в точке M_1. На него действуют сила тяжести $\boldsymbol{P}$ и реакция желоба $\boldsymbol{N}$. Составляя уравнение (49) в проекции на *внутреннюю* нормаль M_1n, будем иметь:

$$\frac{mv_1^2}{R} = P\cos\varphi - N.$$

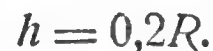
Так как в точке отрыва $N = 0$, то, учитывая, что $R\cos\varphi = KC = R - h$, получим для определения h уравнение

$$mv_1^2 = P(R - h). \qquad (a)$$

Величину mv_1^2 найдем из теоремы об изменении кинетической энергии. Так как $v_0 = 0$, то уравнение (42′) дает:

$$\frac{mv_1^2}{2} = A^a_{(M_0M_1)}.$$

Работу здесь совершает только сила $\boldsymbol{P}$, причем $A(\boldsymbol{P}) = P2h$. Следовательно, $mv_1^2 = 4Ph$. Подставляя это значение mv_1^2 в уравнение (a), получим $4h = R - h$, откуда



$$h = 0{,}2R.$$

Задача 114. Груз M подвешен на нити длиною l (рис. 273). Какую наименьшую начальную скорость v_0, перпендикулярную нити, надо сообщить грузу, чтобы он описал полную окружность?

Рис. 273.

Решение. Груз опишет полную окружность, если на всем пути натяжение нити нигде (кроме, может быть, точки M') не обратится в нуль, т. е. нить нигде не будет смята. Если же в какой-нибудь точке M_1, где $v_1 \neq 0$, натяжение нити обратится в нуль, то нить перестанет удерживать груз, и он будет продолжать движение как свободная точка (по параболе).

Для решения задачи найдем натяжение T нити в произвольном положении M, определяемом углом φ, а затем потребуем, чтобы при любом угле $\varphi \neq 180°$ было $T > 0$.

В положении M на груз действуют сила $\boldsymbol{P}$ и натяжение нити $\boldsymbol{T}$. Составив уравнение (49) в проекции на внутреннюю нормаль Mn, получим

$$\frac{mv^2}{l} = T - P\cos\varphi, \qquad (a)$$

где v — скорость груза в положении M. Для определения v применяем теорему об изменении кинетической энергии:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A^{\text{a}}_{(M_0M)}.$$

В данном случае $A^{\text{a}}_{(M_0M)} = -Ph = -Pl(1 - \cos\varphi)$ и, следовательно,

$$mv^2 = mv_0^2 - 2Pl(1 - \cos\varphi).$$

Подставив это значение mv^2 в уравнение (a) и вычислив T, получим:

$$T = P\left(\frac{v_0^2}{gl} - 2 + 3\cos\varphi\right).$$

Наименьшее значение T будем иметь при $\varphi = 180°$:

$$T_{\min} = P\left(\frac{v_0^2}{gl} - 5\right).$$

Чтобы T нигде (кроме, может быть, точки M') не обратилось в нуль, необходимо, чтобы было $T_{\min} \geqslant 0$. Отсюда

$$\frac{v_0^2}{gl} \geqslant 5 \quad \text{или} \quad v_0 \geqslant \sqrt{5gl}.$$

Следовательно, наименьшая начальная скорость, при которой груз будет описывать полную окружность, определяется равенством

$$v_{0\min} = \sqrt{5gl}.$$

Допустим, что вместо нити груз будет подвешен на жестком легком (невесомом) стержне длины l. В этом случае (так как стержень в отличие от нити может работать и на растяжение и на сжатие) груз опишет полную окружность, если при движении его скорость нигде, кроме, может быть, точки M', не обратится в нуль. Применяя уравнение (42') для перемещения M_0M' и считая в точке M' скорость $v = 0$, получим: $-\frac{mv_0^2}{2} = -mg \cdot 2l$. Отсюда следует, что в данном случае

$$v_{0\min} = \sqrt{4gl}.$$

ГЛАВА XX

ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

§ 120. Уравнения относительного движения и покоя точки. Законы динамики и полученные из них в предыдущих главах уравнения и теоремы верны только для так называемого абсолютного движения точки, т. е. движения по отношению к инерциальной (неподвижной) системе отсчета.

Эта глава посвящена изучению относительного движения точки, т. е. движения по отношению к неинерциальным, произвольно движущимся системам отсчета.

Рассмотрим материальную точку M, движущуюся под действием приложенных к ней сил $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$, являющихся результатом взаимодействия точки с другими материальными телами. Будем изучать движение этой точки по отношению к осям $Oxyz$ (рис. 274), которые в свою очередь каким-то известным нам образом движутся относительно неподвижных осей $O_1x_1y_1z_1$.

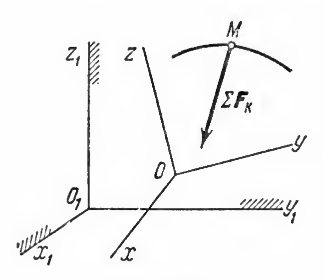


Рис. 274.

Найдем зависимость между относительным ускорением точки $\boldsymbol{w}_{\text{отн}}$ и действующими на нее силами. Для абсолютного движения основной закон динамики имеет вид

$$m\boldsymbol{w}_{\text{а}} = \sum \boldsymbol{F}_k. \tag{50}$$

Но из кинематики известно, что $\boldsymbol{w}_{\text{а}} = \boldsymbol{w}_{\text{отн}} + \boldsymbol{w}_{\text{пер}} + \boldsymbol{w}_{\text{кор}}$, где $\boldsymbol{w}_{\text{отн}}$, $\boldsymbol{w}_{\text{пер}}$, $\boldsymbol{w}_{\text{кор}}$ — относительное, переносное и кориолисово ускорения точки. Подставляя это значение $\boldsymbol{w}_{\text{а}}$ в равенство (50) и считая в дальнейшем $\boldsymbol{w}_{\text{отн}} = \boldsymbol{w}$, так как эта величина представляет собою ускорение изучаемого нами относительного движения, получим:

$$m\boldsymbol{w} = \sum \boldsymbol{F}_k + (-m\boldsymbol{w}_{\text{пер}}) + (-m\boldsymbol{w}_{\text{кор}}).$$

Введем обозначения:

$$\boldsymbol{F}^{\text{и}}_{\text{пер}} = -m\boldsymbol{w}_{\text{пер}}, \quad \boldsymbol{F}^{\text{и}}_{\text{кор}} = -m\boldsymbol{w}_{\text{кор}}.$$

Величины $\boldsymbol{F}^{\text{и}}_{\text{пер}}$ и $\boldsymbol{F}^{\text{и}}_{\text{кор}}$ по размерности являются силами. Назовем их соответственно *переносной* и *кориолисовой силами инерции*. Тогда предыдущее уравнение примет вид

$$m\boldsymbol{w} = \sum \boldsymbol{F}_k + \boldsymbol{F}^{\text{и}}_{\text{пер}} + \boldsymbol{F}^{\text{и}}_{\text{кор}}. \tag{51}$$

Уравнение (51) выражает *основной закон динамики для относительного движения точки*. Сравнивая равенства (50) и (51), приходим к выводу: *все уравнения и теоремы механики для относительного движения точки составляются так же, как уравнения абсолютного движения, если при этом к действующим на точку силам взаимодействия с другими телами прибавить переносную и кориолисову силы инерции*. Прибавление сил $\boldsymbol{F}^{\text{и}}_{\text{пер}}$ и $\boldsymbol{F}^{\text{и}}_{\text{кор}}$ учитывает влияние на относительное движение точки перемещения подвижных осей.

Рассмотрим некоторые частные результаты.

1. Если подвижные оси движутся поступательно, то $\boldsymbol{F}^{\text{и}}_{\text{кор}}=0$, так как в этом случае $\omega=0$ (ω — угловая скорость вращения подвижных осей $Oxyz$) и закон относительного движения принимает вид

$$m\boldsymbol{w}=\sum \boldsymbol{F}_k+\boldsymbol{F}^{\text{и}}_{\text{пер}}.$$

2. Если подвижные оси перемещаются поступательно, равномерно и прямолинейно, то $\boldsymbol{F}^{\text{и}}_{\text{пер}}=\boldsymbol{F}^{\text{и}}_{\text{кор}}=0$ и закон относительного движения будет иметь такой же вид, как и закон движения по отношению к неподвижным осям. Следовательно, такая система отсчета также будет *инерциальной*.

Из полученного результата вытекает, что никаким механическим экспериментом нельзя обнаружить, находится ли данная система отсчета в покое или совершает поступательное, равномерное и прямолинейное движение. В этом состоит открытый еще Галилеем *принцип относительности классической механики*.

3. Если точка по отношению к подвижным осям находится в покое, то для нее $\boldsymbol{w}=0$ и $\boldsymbol{v}_{\text{отн}}=\boldsymbol{v}=0$, а следовательно, и $\boldsymbol{F}^{\text{и}}_{\text{кор}}=0$, так как кориолисово ускорение $w_{\text{кор}}=2\omega v_{\text{отн}}\sin\alpha$. Тогда равенство (51) принимает вид

$$\sum \boldsymbol{F}_k+\boldsymbol{F}^{\text{и}}_{\text{пер}}=0. \qquad (52)$$

Уравнение (52) представляет собою *уравнение относительного равновесия (покоя) точки*. Из него следует, что *уравнения относительного равновесия составляются так же, как уравнения равновесия в неподвижных осях, если при этом к действующим на точку силам взаимодействия с другими телами добавить переносную силу инерции*.

4. При составлении уравнений относительного движения в случаях, когда $\boldsymbol{F}^{\text{и}}_{\text{кор}}\neq 0$, надо иметь в виду, что

$$\boldsymbol{F}^{\text{и}}_{\text{кор}}=-m\boldsymbol{w}_{\text{кор}}=-2m(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{\text{отн}}).$$

Следовательно, сила $\boldsymbol{F}^{\text{и}}_{\text{кор}}$ *перпендикулярна* к $\boldsymbol{v}_{\text{отн}}=\boldsymbol{v}$, а значит, и к касательной к относительной траектории точки. Поэтому:

а) проекция кориолисовой силы инерции на касательную $M\tau$ к относительной траектории точки всегда равна нулю ($F^{\text{и}}_{\text{кор}\,\tau}=0$) и уравнение (48) в относительном движении будет иметь вид ($v=v_{\text{отн}}$)

$$m\frac{dv}{dt}=\sum F_{k\tau}+F^{\text{и}}_{\text{пер}\,\tau}; \qquad (53)$$

б) работа кориолисовой силы инерции на любом относительном перемещении равна нулю [см. § 112, формула (38)], и *теорема об*

изменении кинетической энергии в относительном движении будет иметь вид (v_1 и v_0 — значения *относительных* скоростей)

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A_k + A(F^{\text{и}}_{\text{пер}}). \qquad (54)$$

Во все остальные уравнения относительного движения будут в общем случае входить и переносная, и кориолисова силы инерции.

Задача 115. Пренебрегая массой всех вращающихся частей центробежного регулятора (рис. 275) по сравнению с массой шаров B и D, найти угол α, определяющий положение относительного равновесия стержня AB, если регулятор вращается с постоянной угловой скоростью ω, а длина $AB = l$.

Решение. Для определения положения относительного равновесия (по отношению к вращающимся вместе с регулятором осям) прибавляем,

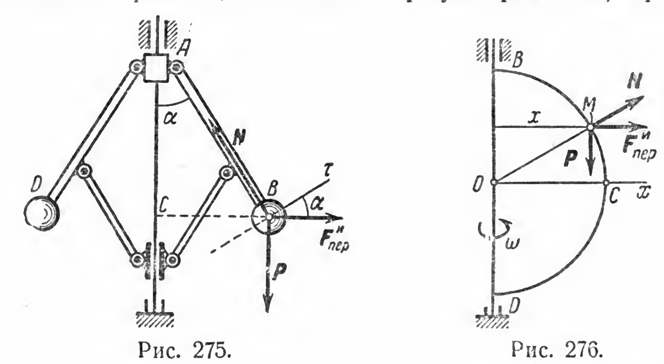


Рис. 275. Рис. 276.

согласно равенству (52), к действующим на шар B силе тяжести P и реакции N переносную силу инерции $F^{\text{и}}_{\text{пер}}$. Так как $\omega = \text{const}$, то $w_{\text{пер}} = w^n_{\text{пер}} = BC \cdot \omega^2 = l\omega^2 \sin\alpha$. Тогда $F^{\text{и}}_{\text{пер}} = ml\omega^2 \sin\alpha$. Направлена сила $F^{\text{и}}_{\text{пер}}$ противоположно ускорению $w^n_{\text{пер}}$, т. е. вдоль линии CB. Составляя уравнение равновесия в проекции на ось $B\tau$, перпендикулярную к AB, будем иметь

$$-P\sin\alpha + F^{\text{и}}_{\text{пер}}\cos\alpha = 0.$$

Отсюда, заменяя силу $F^{\text{и}}_{\text{пер}}$ ее значением и сокращая на $\sin\alpha$ (решение $\alpha = 0$ не рассматриваем), получим:

$$-g + l\omega^2\cos\alpha = 0,$$

откуда

$$\cos\alpha = \frac{g}{l\omega^2}.$$

Так как $\cos\alpha \leqslant 1$, то равновесие при $\alpha \neq 0$ возможно только, когда $\omega^2 > \frac{g}{l}$.

Задача 116. Полуокружность BCD радиуса R (рис. 276) вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω. По ней из точки B, чуть смещенной от оси вращения, начинает скользить без трения кольцо M. Найти относительную скорость кольца v_1 в точке C, если его начальная скорость $v_0 = 0$.

Решение. Для определения скорости v_1 воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии. Чтобы составить уравнение (54), выражающее эту теорему, вычислим работу сил $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{F}^{и}_{пер}$, где $F^{и}_{пер} = m\omega^2 x$ (работа реакции $\boldsymbol{N}$ равна нулю). Считая приближенно $x_B = 0$, находим:

$$A_{(BC)}(\boldsymbol{F}^{и}_{пер}) = \int_{(B)}^{(C)} F^{и}_{пер\,x}\,dx = m\omega^2 \int_0^R x\,dx = \frac{1}{2}\,m\omega^2 R^2.$$

Кроме того, $A_{(BC)}(\boldsymbol{P}) = PR$. Подставляя эти значения в уравнение (54) и учитывая, что $v_0 = 0$, получим:

$$\frac{mv_1^2}{2} = mR\left(g + \frac{1}{2}\,\omega^2 R\right).$$

Отсюда находим:

$$v_1 = \sqrt{2gR\left(1 + \frac{\omega^2 R}{2g}\right)}.$$

Задачу можно также решить, составляя уравнение (53) в проекции на касательную $M\tau$ и преобразовав затем его левую часть так же, как в задаче 111.

Пример интегрирования уравнений относительного движения дан в § 122.

§ 121. Влияние вращения Земли на равновесие и движение тел. При решении большинства технических задач мы считаем систему отсчета, связанную с Землей, неподвижной (инерциальной). Тем самым мы не учитываем суточное вращение Земли и ее движение по орбите вокруг Солнца. Но для второго из этих движений соответствующая переносная сила инерции, которая должна войти в уравнение (51), практически уравновешивается силой притяжения Солнца (см. об этом подробнее в § 128). Таким образом, считая систему отсчета, связанную с Землей, инерциальной, мы по существу пренебрегаем только ее суточным вращением вместе с Землей по отношению к звездам. Это вращение происходит со скоростью: 1 оборот за 23 часа 56 минут 4 секунды, т. е. с угловой скоростью

$$\omega = \frac{2\pi}{86\,164} \approx 0{,}0000729\ 1/\textit{сек}.$$

Исследуем, как сказывается такое довольно медленное вращение на равновесии и движении тел.

1. Относительный покой на поверхности Земли. Сила тяжести. Рассмотрим материальную точку, лежащую на неподвижной относительно Земли гладкой «горизонтальной» плоскости (рис. 277). Условие ее равновесия по отношению к Земле, согласно уравнению (52), состоит в том, что $\boldsymbol{F}_{пр} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}^{и}_{пер} = 0$, где $\boldsymbol{F}_{пр}$ — сила притяжения Земли, $\boldsymbol{N}$ — реакция плоскости, $\boldsymbol{F}^{и}_{пер}$ — переносная сила инерции. Так как $\omega = \text{const}$, то сила $\boldsymbol{F}^{и}_{пер}$ имеет только

нормальную составляющую, направленную перпендикулярно к оси вращения Земли. Сложим силы $\boldsymbol{F}_{\text{пр}}$ и $\boldsymbol{F}_{\text{пер}}^{\text{и}}$ и введем обозначение

$$\boldsymbol{F}_{\text{пр}}+\boldsymbol{F}_{\text{пер}}^{\text{и}}=\boldsymbol{P}.$$

Тогда на точку M будут действовать две силы $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{N}$, уравновешивающие друг друга. Сила $\boldsymbol{P}$ и представляет собою ту силу, которую мы называем *силой тяжести*. Направление силы $\boldsymbol{P}$ будет направлением вертикали в данном пункте земной поверхности, а плоскость, перпендикулярная к $\boldsymbol{P}$, и будет горизонтальной плоскостью. По модулю $F_{\text{пер}}^{\text{и}}=mr\omega^2$ (r — расстояние точки M от земной оси) и является величиною малой по сравнению с $F_{\text{пр}}$, так как величина ω^2 очень мала. Поэтому направление силы $\boldsymbol{P}$ мало отличается от направления $\boldsymbol{F}_{\text{пр}}$[1]).

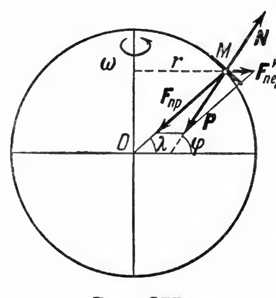


Рис. 277.

При взвешивании тел мы определяем силу $\boldsymbol{P}$, так как именно с такой силой тело давит на чашку весов. Следовательно, вводя в уравнения равновесия силу тяжести $\boldsymbol{P}$, мы вводим в них и силу $\boldsymbol{F}_{\text{пер}}^{\text{и}}$, т. е. фактически учитываем влияние вращения Земли. Поэтому при составлении уравнений равновесия тел по отношению к Земле никаких поправок на вращение Земли вводить не надо. В этом смысле и было сказано в § 1, что равновесие по отношению к Земле можно считать абсолютным.

2*. Относительное движение вблизи поверхности Земли. Для учета вращения системы осей, связанных с Землей, надо к действующим на точку силам прибавить силы $\boldsymbol{F}_{\text{пер}}^{\text{и}}$ и $\boldsymbol{F}_{\text{кор}}^{\text{и}}$. Но сила $\boldsymbol{F}_{\text{пер}}^{\text{и}}$ входит в силу тяжести $\boldsymbol{P}$ и учитывается введением в уравнения движения этой силы. Следовательно, ***когда мы считаем оси, связанные с Землей, неподвижными, то мы фактически пренебрегаем учетом только кориолисовой силы инерции:***

$$F_{\text{кор}}^{\text{и}}=2m\omega v\sin\alpha,$$

где ω — угловая скорость вращения Земли, α — угол между относительной скоростью $\boldsymbol{v}$ точки и земной осью.

Так как величина ω очень мала, то если скорость v не очень велика, силой $F_{\text{кор}}^{\text{и}}$ по сравнению с силой тяжести вполне можно пренебречь. Например, даже при $v=700$ *м/сек* (скорость обычного

[1]) Величина $F_{\text{пер}}^{\text{и}}$ будет наибольшей на экваторе, где $r=R$. Здесь ее значение составляет около 0,34% силы притяжения. Наибольшая разность показанных на рис. 278 углов λ (геоцентрическая широта) и φ (астрономическая широта) имеет место при $\lambda=45°$ и равна приблизительно 11′.

артиллерийского снаряда) и $\alpha = 90°$ сила $F^{и}_{кор}$ составляет только около 1% от силы P. Поэтому в большинстве инженерных расчетов при изучении движения тел систему отсчета, связанную с Землей, можно действительно считать инерциальной (неподвижной).

Учет влияния вращения Земли приобретает практическое значение или при очень больших скоростях движения (полет ракет дальнего действия), или для движений, длящихся очень долго (течение рек, воздушные и морские течения).

Рассмотрим, в чем качественно сказывается влияние вращения Земли на движение тел.

а) Движение по земной поверхности. При движении точки по меридиану в северном полушарии с севера на юг кориолисово ускорение $\boldsymbol{w}_{кор}$ направлено на восток (§ 92, задача 88), а сила $\boldsymbol{F}^{и}_{кор}$ — на запад. При движении с юга на север сила $\boldsymbol{F}^{и}_{кор}$ будет, очевидно, направлена на восток. В обоих случаях, как мы видим, эта сила будет отклонять точку *вправо* от направления ее движения.

Если точка движется по параллели на восток, то ускорение $\boldsymbol{w}_{кор}$ будет направлено вдоль радиуса MC параллели (рис. 278), а сила $\boldsymbol{F}^{и}_{кор}$ в противоположную сторону. Вертикальная составляющая этой силы (вдоль OM) будет несколько изменять вес тела, а горизонтальная составляющая будет направлена к югу и будет отклонять точку тоже вправо от направления движения. Аналогичный результат получим при движении по параллели на запад.

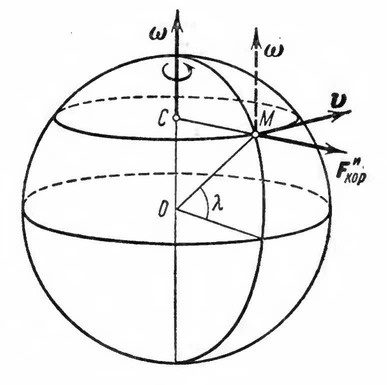


Рис. 278.

Отсюда заключаем, что *в северном полушарии тело, движущееся вдоль земной поверхности по любому направлению, будет вследствие вращения Земли отклоняться вправо от направления движения.* В южном полушарии отклонение будет происходить влево.

Этим обстоятельством объясняется то, что реки, текущие в северном полушарии, подмывают правый берег (закон Бэра). В этом же причина отклонений ветров постоянного направления (пассаты) и морских течений.

б) Вертикальное падение. Чтобы определить направление кориолисовой силы инерции $\boldsymbol{F}^{и}_{кор}$, действующей на свободно падающую точку, надо знать направление относительной скорости $\boldsymbol{v}$ точки. Так как сила $\boldsymbol{F}^{и}_{кор}$ очень мала по сравнению с силой тяжести, то в первом приближении можно считать вектор $\boldsymbol{v}$ направленным по

вертикали, т. е. вдоль линии MO (см. рис. 278). Тогда вектор $\boldsymbol{w}_{\text{кор}}$ будет, как легко видеть, направлен на запад, а сила $\boldsymbol{F}^{\text{и}}_{\text{кор}}$ — на восток (т. е. так, как на рис. 278 направлен вектор $\boldsymbol{v}$). Следовательно, в первом приближении *свободно падающая точка (тело) отклоняется вследствие вращения Земли от вертикали к востоку*. Тело, брошенное вертикально вверх, будет, очевидно, при подъеме отклоняться к западу. Величины этих отклонений очень малы и заметны только при достаточно большой высоте падения или подъема, что видно из расчетов, приведенных в § 122.

§ 122*. Отклонение падающей точки от вертикали вследствие вращения Земли. Рассмотрим материальную точку, падающую с не очень большой (по сравнению с радиусом Земли) высоты H на поверхность Земли. Силу тяжести $\boldsymbol{P}$ при падении будем считать постоянной, а сопротивлением воздуха пренебрежем. Направим ось Oy вертикально вверх, а ось Ox — на

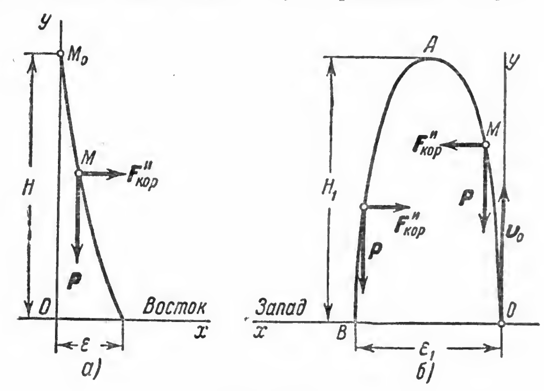


Рис. 279.

восток (рис. 279, *а*) [1]). Чтобы учесть вращение Земли, к точке, кроме силы $\boldsymbol{P}$, в которую уже включена сила $\boldsymbol{F}^{\text{и}}_{\text{пер}}$, надо приложить силу $\boldsymbol{F}^{\text{и}}_{\text{кор}}$, направленную, как было установлено, в первом приближении, на восток. Тогда дифференциальные уравнения относительного движения примут вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F^{\text{и}}_{\text{кор}}, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = -P = -mg, \tag{55}$$

а начальные условия будут

$$\text{при } t=0 \;\; x=0, \;\; y=H; \; v_x=0, \; v_y=0.$$

Интегрируя второе из уравнений (55) и определяя постоянные интегрирования по начальным условиям, найдем:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -gt, \qquad y = H - \frac{gt^2}{2}.$$

[1]) Масштаб изображения в направлении оси Ox на рис. 279 сильно увеличен.

При вычислении модуля $F^{и}_{кор}$ пренебрежем, как мы уже делали, определяя направление $F^{и}_{кор}$, составляющей скорости v_x по сравнению с v_y (так как сила $F^{и}_{кор}$ много меньше P) и, отыскивая приближенное решение, будем считать $v = |v_y| = gt$. При этом скорость v будет направлена по вертикали вниз (по линии MO на рис. 278) и образует с осью вращения Земли угол $\alpha = 90° - \lambda$, где λ — широта. Следовательно, $F^{и}_{кор} = 2m\omega gt \cos\lambda$ и первое из уравнений (55) примет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2(\omega g \cos\lambda)\, t.$$

Так как величина, стоящая в скобках, постоянная, то, интегрируя это уравнение, мы получим:

$$\frac{dx}{dt} = (\omega g \cos\lambda)\, t^2 + C_1, \qquad x = \frac{1}{3}(\omega g \cos\lambda)\, t^3 + C_1 t + C_2.$$

Подстановка начальных данных дает $C_1 = C_2 = 0$. Таким образом, уравнения, приближенно определяющие закон относительного движения точки, будут:

$$x = \frac{1}{3}(\omega g \cos\lambda)\, t^3, \qquad y = H - \frac{gt^2}{2}.$$

Движение оказывается не прямолинейным и падающая точка действительно отклоняется к востоку. Исключив из предыдущих равенств время t, получим в первом приближении уравнение траектории точки (полукубическая парабола):

$$x^2 = \frac{8}{9}\frac{\omega^2}{g}\cos^2\lambda\,(H - y)^3.$$

Полагая здесь $y = 0$, найдем восточное отклонение ε, которое точка будет иметь в момент падения на Землю[1]):

$$\varepsilon = \frac{2}{3}\omega\cos\lambda\sqrt{\frac{2H^3}{g}}. \qquad (56)$$

Как видим, отклонение ε пропорционально угловой скорости Земли ω и является, следовательно, величиной малой. Например, на широте Москвы ($\lambda = 55°47'$, $g = 9{,}816$ *м/сек*^{2}) при падении с высоты $H = 100$ *м* величина $\varepsilon = 1{,}2$ *см*.

Ряд опытов, проведенных во многих пунктах Земли разными исследователями, подтверждает правильность результата, который дает формула (56).

Рассмотрим движение точки, брошенной из пункта O вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Сила $F^{и}_{кор}$ при подъеме будет в первом

[1]) При определении модуля и направления силы $F^{и}_{кор}$ мы в первом приближении пренебрегали составляющей скорости v_x, направленной на восток. Вследствие наличия этой скорости сила $F^{и}_{кор}$ будет иметь дополнительную составляющую, вызывающую отклонение точки к югу. Так как $x = \frac{1}{3}(\omega g \cos\lambda)\, t^3$, то величина $v_x = \frac{dx}{dt}$ пропорциональна ω и отклонение к югу пропорционально ω^2, т. е. является малой величиной второго порядка.

приближении направлена на запад. Тогда, если направить ось Ox также на запад (рис. 279, *б*), то дифференциальные уравнения движения сохранят вид (55), а начальные условия будут: при $t=0$ $x=y=0$, $v_x=0$, $v_y=v_0$.

При этих условиях второе из уравнений (55) даст:

$$v_y=v_0-gt; \quad y=v_0t-\frac{gt^2}{2}. \tag{57}$$

Тогда, считая, как и в предыдущей задаче, приближенно $v=v_y$, мы получим $F^{\text{и}}_{\text{кор}}=2m\omega(v_0-gt)\cos\lambda$ и первое из уравнений (55) примет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=2(\omega\cos\lambda)(v_0-gt).$$

Это уравнение будет описывать движение точки и при ее падении вниз, так как происходящее при этом изменение направления вектора $F^{\text{и}}_{\text{кор}}$ учтется изменением знака множителя $(v_0-gt)=v_y$.

Интегрируя полученное уравнение при начальных условиях задачи, найдем окончательно

$$x=\omega\cos\lambda\left(v_0t^2-\frac{1}{3}gt^3\right). \tag{58}$$

Полагая в равенстве (57) $y=0$, найдем время движения точки до момента ее падения на Землю: $t_1=2\frac{v_0}{g}$. Учитывая одновременно, что $v_0=\sqrt{2gH_1}$, где H_1 — высота подъема, определим из уравнения (58) западное отклонение точки в момент падения

$$OB=\varepsilon_1=\frac{4}{3}\omega\cos\lambda\frac{v_0^3}{g^2}=\frac{8}{3}\omega\cos\lambda\sqrt{\frac{2H_1^3}{g}}. \tag{59}$$

Из формул (56) и (59) видно, что при $H_1=H$ отклонение $\varepsilon_1=4\varepsilon$.

Если движение точки может продолжаться дальше (точка бросания O не на поверхности Земли), то траектория точки, начиная от пункта B, будет все время отклоняться на восток.

Все эти расчеты относятся, как было указано, к движению в безвоздушном пространстве и учитывают влияние вращения Земли только в первом приближении.

ГЛАВА XXI

ПРЯМОЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОЧКИ

§ 123. Свободные колебания без учета сил сопротивления. Учение о колебаниях составляет основу ряда областей физики и техники. Хотя колебания, рассматриваемые в различных областях, например в механике, радиотехнике, акустике и др., отличаются друг от друга по своей физической природе, основные законы этих колебаний во всех случаях остаются одними и теми же. Поэтому изучение механических колебаний является важным не только по той при-

чине, что такие колебания очень часто имеют место в технике, но и вследствие того, что результаты, полученные при изучении механических колебаний, могут быть использованы для изучения и уяснения колебательных явлений в других областях.

Начнем с изучения свободных колебаний точки без учета сил сопротивления. Рассмотрим точку M, движущуюся прямолинейно под действием одной только *восстанавливающей силы* $\boldsymbol{F}$, направленной к неподвижному центру O и пропорциональной расстоянию от этого центра. Проекция силы $\boldsymbol{F}$ на ось Ox (рис. 280) будет равна

$$F_x = -cx. \tag{60}$$

Рис. 280.

Сила F, как видим, стремится вернуть точку в равновесное положение O, где $F=0$; отсюда и наименование «восстанавливающая» сила. Примером такой силы является сила упругости (§ 113, рис. 255) или сила притяжения, рассмотренная в задаче 99 (§ 105).

Найдем закон движения точки M. Составляя дифференциальное уравнение движения (6), получим

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx.$$

Деля обе части равенства на m и вводя обозначение

$$\frac{c}{m} = k^2, \tag{61}$$

приведем уравнение к виду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0. \tag{62}$$

Уравнение (62) представляет собою *дифференциальное уравнение свободных колебаний при отсутствии сопротивления.* Решение этого линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка ищут в виде $x = e^{nt}$. Полагая в уравнении (62) $x = e^{nt}$, получим для определения n так называемое характеристическое уравнение, имеющее в данном случае вид $n^2 + k^2 = 0$. Поскольку корни этого характеристического уравнения являются чисто мнимыми ($n_{1,2} = \pm ik$), то, как известно из теории дифференциальных уравнений, общее решение уравнения (62) имеет вид

$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt, \tag{63}$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования. Если вместо постоянных C_1 и C_2 ввести постоянные a и α, такие, что $C_1 = a\cos\alpha$, $C_2 = a\sin\alpha$, то мы получим $x = a(\sin kt \cos\alpha + \cos kt \sin\alpha)$ или

$$x = a \sin(kt + \alpha). \tag{64}$$

Это другой вид решения уравнения (62), в котором постоянными интегрирования являются a и α. Им удобнее пользоваться для общих исследований [1]).

Скорость точки в рассматриваемом движении равна

$$v_x = \dot{x} = ak \cos(kt + \alpha). \tag{65}$$

Колебания, совершаемые точкой по закону (64), называются *гармоническими колебаниями*. График их при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ показан на рис. 152, *в* (§ 69).

Всем характеристикам этого движения можно дать наглядную кинематическую интерпретацию. Рассмотрим точку B, движущуюся равномерно по окружности радиуса a из положения B_0, определяемого углом $DOB_0 = \alpha$ (рис. 281). Пусть постоянная угловая скорость вращения радиуса OB равна k. Тогда в произвольный момент времени t угол $\varphi = \angle DOB = \alpha + kt$ и легко видеть, что проекция M точки B на диаметр, перпендикулярный к DE, движется по закону $x = a \sin(kt + \alpha)$, где $x = OM$, т. е. совершает гармонические колебания.

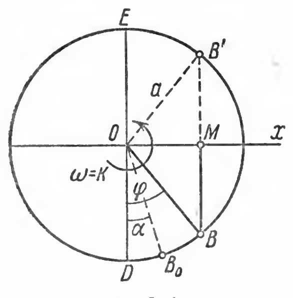


Рис. 281.

Величина a, равная наибольшему отклонению точки M от центра колебаний, называется ***амплитудой колебаний***. Величина $\varphi = kt + \alpha$ называется ***фазой колебаний***. Фаза φ, в отличие от координаты x, определяет не только положение точки в данный момент, но и направление ее последующего движения; например, из положения M при фазе, равной φ, точка движется вправо, а при фазе, равной $(\pi - \varphi)$, — влево. Фазы, отличающиеся на 2π, считаются одинаковыми (на рис. 152, *в* светлыми точками отмечены две одинаковые фазы). Величина α определяет фазу начала колебаний (***начальная фаза***). Например, при $\alpha = 0$ колебания происходят по закону синуса (начинаются от центра O со скоростью, направленной вправо), при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ — по закону косинуса (начинаются из положения $x = a$ со скоростью $v_0 = 0$). Величина k, совпадающая с угловой скоростью вращения радиуса OB, показанного на рис. 281, называется ***круговой частотой колебаний***.

Промежуток времени T (или τ), в течение которого точка совершает одно полное колебание, называется ***периодом колебаний***.

[1]) В том, что выражения (63) или (64) представляют собою решения уравнения (62), можно еще убедиться непосредственной подстановкой в уравнение (62) этих значений x.

По истечении периода фаза изменяется на 2π. Следовательно, должно быть $kT = 2\pi$, откуда период

$$T = \frac{2\pi}{k}. \tag{66}$$

Величина ν, обратная периоду и определяющая число колебаний, совершаемых за одну секунду, называется *частотой колебаний*

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{k}{2\pi}. \tag{67}$$

Отсюда видно, что величина k отличается от ν только постоянным множителем 2π. В дальнейшем мы обычно для краткости частотой колебаний будем называть величину k.

Значения a и α определяются по начальным условиям. Считая при $t=0$ $x=x_0$ и $v_x=v_0$, получим из (64) и (65) $x_0 = a\sin\alpha$, $v_0/k = a\cos\alpha$. Отсюда, складывая сначала квадраты этих равенств, а затем деля их почленно, найдем:

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{kx_0}{v_0}. \tag{68}$$

Отметим, что свободные колебания при отсутствии сопротивления обладают следующими свойствами: 1) амплитуда и начальная фаза колебаний *зависят* от начальных условий; 2) частота k, а следовательно, и период T колебаний от начальных условий *не зависят* [см. равенства (61) и (66)] и являются неизменными характеристиками данной колеблющейся системы.

Отсюда, в частности, следует, что если в задаче требуется определить только период (или частоту) колебаний, то надо составить дифференциальное уравнение движения и привести его к виду (62). После этого T найдется сразу по формуле (66) без интегрирования.

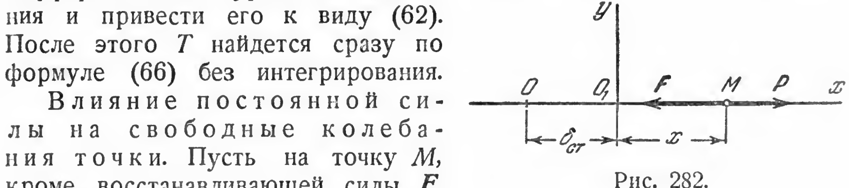


Рис. 282.

Влияние постоянной силы на свободные колебания точки. Пусть на точку M, кроме восстанавливающей силы $\boldsymbol{F}$, направленной к центру O, действует еще постоянная по модулю и направлению сила $\boldsymbol{P}$ (рис. 282). Величина силы F по-прежнему пропорциональна расстоянию от центра O, т. е. $F = c\cdot OM$. Очевидно, что в этом случае положением равновесия точки M будет центр O_1, отстоящий от O на расстоянии $OO_1 = \delta_{ст}$, которое определяется равенством $c\delta_{ст} = P$ или

$$\delta_{ст} = \frac{P}{c}. \tag{69}$$

Величину $\delta_{ст}$ назовем *статическим отклонением* точки.

Примем центр O_1 за начало отсчета и направим координатную ось O_1x в сторону действия силы $\boldsymbol{P}$. Тогда будет $F_x = -c(x+\delta_{ст})$, $P_x = P$. В результате, составляя дифференциальное уравнение движения (6) и учитывая, что согласно равенству (69) $c\delta_{ст} = P$, будем иметь:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx \quad \text{или} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0.$$

Полученное уравнение, где k определяется равенством (61), совпадает с уравнением (62). Отсюда заключаем, что *постоянная сила* $\boldsymbol{P}$ *не изменяет характера колебаний, совершаемых точкой под действием восстанавливающей силы* $\boldsymbol{F}$, *а только смещает центр этих колебаний в сторону действия силы* $\boldsymbol{P}$ *на величину статического отклонения* $\delta_{ст}$.

Выразим период колебаний через $\delta_{ст}$. Из (69) и (61) имеем $k^2 = P/m\delta_{ст}$. Тогда равенство (66) даст

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{P}\delta_{ст}}. \tag{70}$$

Таким образом, *период колебаний пропорционален корню квадратному из статического отклонения* $\delta_{ст}$.

В частности, если силой P является сила тяжести, что имеет место при колебаниях груза на вертикальной пружине (см. рис. 283), то $P = mg$ и формула (70) принимает вид

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\delta_{ст}}{g}}. \tag{70'}$$

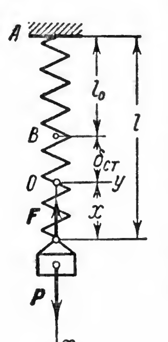


Рис. 283.

Задача 117. Груз подвешивают к концу B вертикальной пружины AB и отпускают без начальной скорости. Определить закон колебаний груза, если в равновесном положении он растягивает пружину на величину $\delta_{ст}$ (статическое удлинение пружины).

Решение. Помещаем начало координат O в положении статического равновесия груза и направляем ось Ox по вертикали вниз (рис. 283). Сила упругости $F = c\,|\Delta l\,|$. В нашем случае $\Delta l = \delta_{ст} + x$. Следовательно,

$$F_x = -c(\delta_{ст} + x).$$

Составляя дифференциальное уравнение движения, получим

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -c(\delta_{ст} + x) + P.$$

Но по условиям задачи сила тяжести $P = mg = c\delta_{ст}$ (в равновесном положении сила P уравновешивается силой упругости $c\delta_{ст}$). В результате, введя обозначение $\frac{c}{m} = \frac{g}{\delta_{ст}} = k^2$, приведем уравнение к виду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0.$$

Отсюда сразу находим период колебаний груза в виде (70')

$$T=\frac{2\pi}{k}=2\pi\sqrt{\frac{\delta_{\text{ст}}}{g}}.$$

Следовательно, период колебаний пропорционален корню квадратному из статического удлинения пружины.

Решением полученного дифференциального уравнения будет

$$x=C_1\sin kt+C_2\cos kt.$$

По начальным условиям при $t=0$ $x=-\delta_{\text{ст}}$, $v_x=0$. Так как

$$v_x=\frac{dx}{dt}=kC_1\cos kt-kC_2\sin kt,$$

то, подставляя начальные данные, получим $C_2=-\delta_{\text{ст}}$, $C_1=0$. Следовательно, колебания происходят с амплитудой $\delta_{\text{ст}}$ по закону

$$x=-\delta_{\text{ст}}\cos kt.$$

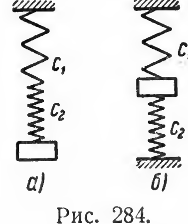


Рис. 284.

Отсюда видно, что наибольшее удлинение пружины при колебаниях груза равно $2\delta_{\text{ст}}$. Этот результат был получен другим путем в задаче 107, где роль пружины играла балка.

Рассмотренное решение подтверждает, что постоянная сила P не изменяет характера колебаний, происходящих под действием силы упругости F, а только смещает центр этих колебаний в сторону действия силы на величину $\delta_{\text{ст}}$ (при отсутствии силы P колебания происходили бы, очевидно, около центра B).

Задача 118. Определить период колебаний груза весом P, подвешенного на двух пружинах с коэффициентами жесткости c_1 и c_2 так, как показано на рис. 284, *а*.

Решение. Каждая из пружин в статическом положении растягивается с силой P. Следовательно, статические удлинения пружин будут $\delta_{1\,\text{ст}}=\frac{P}{c_1}$, $\delta_{2\,\text{ст}}=\frac{P}{c_2}$. Тогда общее удлинение пружин

$$\delta_{\text{ст}}=\delta_{1\,\text{ст}}+\delta_{2\,\text{ст}}=\frac{P(c_1+c_2)}{c_1c_2}$$

и

$$c_{\text{экв}}=\frac{c_1c_2}{c_1+c_2},$$

где $c_{\text{экв}}$ — коэффициент жесткости эквивалентной пружины, заменяющей две данные пружины. В частности, при $c_1=c_2$ получим $c_{\text{экв}}=\frac{1}{2}c$.

Период колебаний по формуле (70') будет

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\delta_{\text{ст}}}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{P}{g}\frac{c_1+c_2}{c_1c_2}}.$$

Задача 119. Решить предыдущую задачу, считая, что груз подвешен на пружинах так, как показано на рис. 284, *б*.

Решение. В этом случае очевидно, что статические удлинения (сжатия) обеих пружин одинаковы. При этом верхняя пружина будет растягиваться

с силой, равной $P - c_2\delta_{ст}$. Тогда при равновесии $c_1\delta_{ст} = P - c_2\delta_{ст}$, откуда

$$\delta_{ст} = \frac{P}{c_1 + c_2}.$$

При этом $c_{экв} = c_1 + c_2$, а период колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\delta_{ст}}{g}} = \sqrt{\frac{P}{g(c_1 + c_2)}}.$$

§ 124. Свободные колебания при сопротивлении, пропорциональном скорости (затухающие колебания). Рассмотрим, как влияет на свободные колебания сопротивление среды, считая, что сила сопротивления пропорциональна первой степени скорости: $\boldsymbol{R} = -\mu\boldsymbol{v}$ (знак минус указывает, что сила $\boldsymbol{R}$ направлена противоположно $\boldsymbol{v}$). Пусть на точку при ее движении действуют восстанавливающая сила $\boldsymbol{F}$ и сила сопротивления $\boldsymbol{R}$ (рис. 285). Тогда $F_x = -cx$, $R_x = -\mu v_x = -\mu\frac{dx}{dt}$, и дифференциальное уравнение движения будет

Рис. 285.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx - \mu\frac{dx}{dt}.$$

Деля обе части уравнения на m, получим:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + k^2x = 0, \qquad (71)$$

где обозначено

$$\frac{c}{m} = k^2, \qquad \frac{\mu}{m} = 2b. \qquad (72)$$

При этом легко проверить, что величины k и b имеют одинаковые размерности ($1/сек$); это позволяет сравнивать их друг с другом.

Уравнение (71) представляет собою дифференциальное уравнение свободных колебаний при сопротивлении, пропорциональном скорости. Его решение, как и решение уравнения (62), ищут в виде $x = e^{nt}$. Подставляя это значение x в уравнение (71), получим характеристическое уравнение $n^2 + 2bn + k^2 = 0$, корни которого будут

$$n_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - k^2}. \qquad (73)$$

Рассмотрим случай, когда $k > b$, т. е. когда сопротивление по сравнению с восстанавливающей силой малó. Введя обозначение

$$k_1 = \sqrt{k^2 - b^2}, \qquad (74)$$

получим из (73), что $n_{1,2} = -b \pm ik_1$, т. е. что корни характеристического уравнения являются комплексными. Тогда общее решение

уравнения (71) будет, очевидно, отличаться от решения уравнения (62) только множителем e^{-bt}, т. е. будет иметь вид

$$x = e^{-bt}(C_1 \sin k_1 t + C_2 \cos k_1 t) \tag{75}$$

или, по аналогии с равенством (64),

$$x = ae^{-bt} \sin(k_1 t + \alpha). \tag{76}$$

Входящие сюда величины a и α являются постоянными интегрирования и определяются по начальным условиям.

Колебания, происходящие по закону (76), называют *затухающими*, так как благодаря наличию множителя e^{-bt} величина $x = OM$ с течением времени убывает, стремясь к нулю. График этих колебаний показан на рис. 286 (график заключен между пунктирными кривыми $x = ae^{-bt}$ и $x = -ae^{-bt}$, так как $\sin(k_1 t + \alpha)$ по модулю не может стать больше единицы).

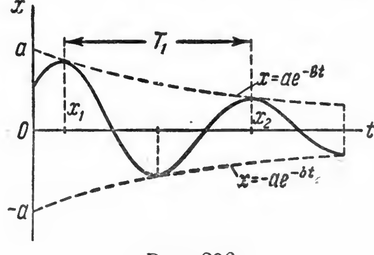


Рис. 286.

Промежуток времени T_1, равный периоду $\sin(k_1 t + \alpha)$, т. е. величину

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - b^2}}, \tag{77}$$

принято называть *периодом затухающих колебаний.* За период точка совершает одно полное колебание, т. е., например, начав двигаться из положения $x = 0$ вправо (см. рис. 285), приходит в то же положение, двигаясь также вправо. Формулу (77), если учесть равенство (66), можно еще представить в виде

$$T_1 = \frac{2\pi}{k\sqrt{1 - b^2/k^2}} = \frac{T}{\sqrt{1 - b^2/k^2}} \approx T\left(1 + \frac{1}{2}\frac{b^2}{k^2}\right). \tag{77'}$$

Из полученных формул видно, что $T_1 > T$, т. е. что при наличии сопротивления период колебаний несколько увеличивается. Однако, когда сопротивление мало ($b \ll k$), то величиной b^2/k^2 по сравнению с единицей можно пренебречь и считать $T_1 \approx T$. Следовательно, малое сопротивление на период колебаний практически не влияет.

Промежуток времени между двумя последовательными отклонениями колеблющейся точки вправо (или влево) также оказывается равным T_1[1]). Следовательно, если первое максимальное отклонение

---

[1]) Моменты, когда x имеет максимум или минимум, находятся из уравнения $\frac{dx}{dt} = ae^{-bt}[k_1 \cos(k_1 t + \alpha) - b \sin(k_1 t + \alpha)] = 0$. Если квадратная скобка обращается в нуль при некотором $t = t_1$, то она, очевидно, обратится в нуль и в моменты $t_1 + T_1$, $t_1 + 2T_1$ и т. д., поскольку $k_1 T_1 = 2\pi$.

вправо x_1 происходит в момент t_1, то второе отклонение x_2 наступит в момент $t_2 = t_1 + T_1$ и т. д. Тогда по формуле (76), учитывая, что $k_1 T_1 = 2\pi$, получим:

$$x_1 = ae^{-bt_1} \sin(k_1 t_1 + \alpha),$$
$$x_2 = ae^{-b(t_1+T_1)} \sin(k_1 t_1 + k_1 T_1 + \alpha) = x_1 e^{-bT_1}.$$

Аналогично для любого отклонения x_{n+1} будет $x_{n+1} = x_n e^{-bT_1}$. Таким образом, оказывается, что размахи колебаний будут убывать по закону геометрической прогрессии. Знаменатель этой прогрессии e^{-bT_1} называется *декрементом рассматриваемых колебаний*, а модуль его логарифма, т. е. величина bT_1, — *логарифмическим декрементом*.

Из всех полученных результатов следует, что малое сопротивление почти не влияет на период колебаний, но вызывает постепенное их затухание вследствие убывания размахов колебаний по закону геометрической прогрессии.

Рассмотрим в заключение случай, когда $b > k$, т. е. когда сопротивление по сравнению с восстанавливающей силой велико. Вводя обозначение $b^2 - k^2 = r^2$, найдем, что в этом случае корни характеристического уравнения (73) равны $n_{1,2} = -b \pm r$, т. е. оба действительны и отрицательны (так как $r < b$). Следовательно, решение уравнения (71), описывающее закон движения точки, имеет при $b > k$ вид

$$x = C_1 e^{-(b+r)t} + C_2 e^{-(b-r)t}.$$

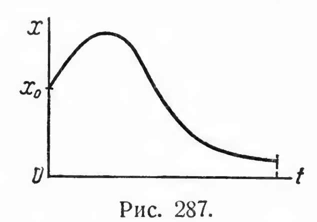


Рис. 287.

Поскольку функция e^{-at}, где $a > 0$, со временем монотонно убывает, стремясь к нулю, то движение точки в этом случае не будет колебательным и она под действием восстанавливающей силы будет постепенно приближаться к равновесному положению $x = 0$. График такого движения (если при $t = 0$ $x = x_0$, $v_0 > 0$) имеет вид, показанный на рис. 287.

§ 125. Вынужденные колебания. Резонанс. Рассмотрим важный случай колебаний, возникающих, когда на точку, кроме восстанавливающей силы $\boldsymbol{F}$, действует еще периодически изменяющаяся со временем сила $\boldsymbol{Q}$, проекция которой на ось Ox равна

$$Q_x = Q_0 \sin pt. \qquad (78)$$

Эта сила называется *возмущающей силой*, а колебания, происходящие при действии такой силы, называются *вынужденными*. Величина p в равенстве (78) является *частотой возмущающей силы*.

Возмущающей силой может быть сила, изменяющаяся со временем и по другому закону. Мы ограничимся рассмотрением случая, когда

Q_x определяется равенством (78). Такая возмущающая сила называется *гармонической*. Конкретный пример ее дан в задаче 120 (стр. 316).

1. Вынужденные колебания при отсутствии сопротивления[1]). Рассмотрим движение точки, на которую, кроме восстанавливающей силы $\boldsymbol{F}$ (см. рис. 280), действует только возмущающая сила $\boldsymbol{Q}$. Дифференциальное уравнение движения в этом случае будет

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx + Q_0 \sin pt.$$

Разделим обе части этого уравнения на m и положим

$$\frac{Q_0}{m} = P_0. \tag{79}$$

Тогда, учитывая обозначение (61), приведем уравнение движения к виду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = P_0 \sin pt. \tag{80}$$

Уравнение (80) является *дифференциальным уравнением вынужденных колебаний точки при отсутствии сопротивления*. Его решением, как известно из теории дифференциальных уравнений, будет $x = x_1 + x_2$, где x_1 — общее решение уравнения без правой части, т. е. решение уравнения (62), даваемое равенством (64), а x_2 — какое-нибудь частное решение полного уравнения (80).

Полагая, что $p \neq k$, будем искать решение x_2 в виде

$$x_2 = A \sin pt,$$

где A — постоянная величина, которую надо подобрать так, чтобы равенство (80) обратилось в тождество. Подставляя значение x_2 и его второй производной в уравнение (80), будем иметь:

$$-p^2 A \sin pt + k^2 A \sin pt = P_0 \sin pt.$$

Это равенство будет выполняться при любом t, если $A(k^2 - p^2) = P_0$ или

$$A = \frac{P_0}{k^2 - p^2}.$$

Таким образом, искомое частное решение будет

$$x_2 = \frac{P_0}{k^2 - p^2} \sin pt. \tag{81}$$

---

[1]) Получаемые в этом пункте результаты могут быть найдены как частный случай из пункта 2.

Так как $x = x_1 + x_2$, а значение x_1 дается равенством (64), то общее решение уравнения (80) имеет окончательно вид

$$x = a \sin(kt + \alpha) + \frac{P_0}{k^2 - p^2} \sin pt, \qquad (81')$$

где a и α — постоянные интегрирования, определяемые по начальным данным. Решение (81′) показывает, что колебания точки складываются в этом случае из: 1) колебаний с амплитудой a (зависящей от начальных условий) и частотой k, называемых *собственными колебаниями*, и 2) колебаний с амплитудой A (не зависящей от начальных условий) и частотой p, которые называются *вынужденными колебаниями*.

Практически, благодаря неизбежному наличию тех или иных сопротивлений, собственные колебания будут довольно быстро затухать. Поэтому основное значение в рассматриваемом движении имеют вынужденные колебания, закон которых дается уравнением (81).

Частота p вынужденных колебаний, как видно, равна частоте возмущающей силы. Амплитуду этих колебаний, если разделить числитель и знаменатель на k^2, можно представить в виде:

$$A = \frac{P_0}{|k^2 - p^2|} = \frac{\delta_0}{\left|1 - \left(\frac{p}{k}\right)^2\right|}, \qquad (82)$$

где согласно равенствам (61) и (79) $\delta_0 = \frac{P_0}{k^2} = \frac{Q_0}{c}$, т. е. δ_0 есть величина статического отклонения точки под действием силы Q_0. Как видим, A зависит от отношения частоты p возмущающей силы к частоте k собственных колебаний. График этой зависимости показан на рис. 289, *а* (стр. 314) кривой, помеченной значком $h = 0$ (другие кривые на графике дают зависимость A от p/k при наличии сопротивления).

Из графика (или из формулы (82)) видно, что, подбирая различные соотношения между p и k, можно получить вынужденные колебания с разными амплитудами. При $p = 0$ (или $p \ll k$) амплитуда равна δ_0 (или близка к этой величине). Если величина p близка к k, амплитуда A становится очень большой. Наконец, когда $p \gg k$, амплитуда A становится очень малой (практически близка к нулю).

Отметим еще, что при $p < k$, как видно из сравнения формул (78) и (81), фазы вынужденных колебаний и возмущающей силы все время совпадают (обе равны pt). Если же $p > k$, то внося минус под знак синуса, мы можем представить уравнение (81) в виде

$$x_2 = \frac{P_0}{p^2 - k^2} \sin(pt - \pi).$$

Следовательно, при $p > k$ сдвиг между фазами вынужденных ко-

лебаний и возмущающей силы равен π (когда сила Q имеет максимальное значение и направлена вправо, колеблющаяся точка максимально смещена влево и т. д.).

Резонанс. В случае, когда $p=k$, т. е. когда частота возмущающей силы равна частоте собственных колебаний, имеет место так называемое явление *резонанса.* Формулами (81), (82) этот случай не описывается, но можно доказать, что размахи вынужденных колебаний при резонансе будут со временем неограниченно возрастать так, как показано ниже, на рис. 290. Подробнее общие свойства вынужденных колебаний (и, в частности, резонанса) рассмотрены в конце этого параграфа (п. 3).

При $p=k$ уравнение (80) частного решения $x_2=A\sin pt$ не имеет, и это решение следует искать в виде

$$x_2=Bt\cos pt.$$

Тогда $\frac{d^2x_2}{dt^2}=-2Bp\sin pt-p^2Bt\cos pt$ и подстановка в уравнение (80), если учесть, что $p=k$, дает $-2Bp\sin pt=P_0\sin pt$, откуда $B=-P_0/2p$. В результате находим закон вынужденных колебаний при резонансе в случае отсутствия сопротивления:

$$x_2=-\frac{P_0}{2p}t\cos pt \quad \text{или} \quad x_2=\frac{P_0}{2p}t\sin\left(pt-\frac{\pi}{2}\right). \tag{83}$$

Как видим, размахи вынужденных колебаний при резонансе действительно возрастают пропорционально времени, и закон этих колебаний имеет вид, показанный на рис. 290. Сдвиг фаз при резонансе равен $\pi/2$.

2*. Вынужденные колебания при наличии сопротивления. Рассмотрим движение точки, на которую действуют: восстанавливающая сила $\boldsymbol{F}$, сила сопротивления $\boldsymbol{R}$, пропорциональная скорости (см. § 124), и возмущающая сила $\boldsymbol{Q}$, определяемая формулой (78). Дифференциальное уравнение этого движения имеет вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-cx-\mu\frac{dx}{dt}+Q_0\sin pt.$$

Деля обе части уравнения на m и учитывая обозначения (72) и (79), получим:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2b\frac{dx}{dt}+k^2x=P_0\sin pt. \tag{84}$$

Уравнение (84) является *дифференциальным уравнением вынужденных колебаний точки при наличии сопротивления.* Его общее решение, как известно, имеет вид $x=x_1+x_2$, где x_1 — общее решение уравнения без правой части, т. е. уравнения (71) (при $k>b$ это решение дается равенством 76), а x_2 — какое-нибудь частное решение полного уравнения (84). Будем искать решение x_2 в виде

$$x_2=A\sin(pt-\beta),$$

где A и β — постоянные, которые надо подобрать так, чтобы равенство (84) обратилось в тождество. Вычисляя производные, получим:

$$\frac{dx_2}{dt} = Ap\cos(pt-\beta), \quad \frac{d^2x_2}{dt^2} = -Ap^2\sin(pt-\beta).$$

Подставляя эти значения производных и величины x_2 в левую часть уравнения (84) и обозначая для краткости $pt-\beta=\psi$ (или $pt=\psi+\beta$), будем иметь:

$$A(-p^2+k^2)\sin\psi + 2bpA\cos\psi = P_0(\cos\beta\sin\psi + \sin\beta\cos\psi).$$

Чтобы это равенство выполнялось при любом ψ, т. е. в любой момент времени, коэффициенты при $\sin\psi$ и $\cos\psi$ в левой и правой части должны быть порознь равны друг другу; следовательно,

$$A(k^2-p^2) = P_0\cos\beta, \quad 2bpA = P_0\sin\beta.$$

Из полученных уравнений (ими также пользуются для однозначного определения величины β) находим, возводя их сначала почленно в квадрат и складывая, а затем деля почленно друг на друга:

$$A = \frac{P_0}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4b^2p^2}}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{2bp}{k^2-p^2}. \tag{85}$$

Так как $x = x_1 + x_2$, а значение x_1 (при $k > b$) дается равенством (76), то окончательно найдем решение уравнения (84) в виде

$$x = ae^{-bt}\sin(k_1t+\alpha) + A\sin(pt-\beta), \tag{86}$$

где a и α — постоянные интегрирования, определяемые по начальным условиям, а значения A и β даются формулами (85) и от начальных условий не зависят. При $b=0$ найденные решения дают формулы (81), (81′), полученные выше для случая отсутствия сопротивления.

Рассматриваемые колебания являются сложными и складываются из *собственных* (первое слагаемое в равенстве (86) рис. 288, *а*) и *вынужденных* (второе слагаемое в равенстве (86); рис. 288, *б*). Собственные колебания точки для рассматриваемого случая были изучены в § 124. Как было установлено, эти колебания довольно быстро затухают и по истечении некоторого промежутка времени $t_у$, называемого *временем установления*, ими практически можно пренебречь.

Если, например, считать, что собственными колебаниями можно пренебречь, начиная с момента, когда их размахи будут меньше $0{,}01A$, то величина $t_у$ будет определяться из равенства $ae^{-bt} = 0{,}01A$, откуда

$$t_у = \frac{1}{b}\ln\frac{100a}{A}. \tag{87}$$

Как видим, чем меньше сопротивление (т. е. чем меньше b), тем время установления больше.

Одна из возможных картин установления колебаний, происходящих по закону (86) и начинающихся из состояния покоя, показана на рис. 288, *в*. При других начальных условиях и соотношениях между частотами p и k_1 характер колебаний в интервале времени $0 < t < t_у$ может оказаться совершенно другим. Однако во всех случаях по истечении времени установления собственные колебания практически затухнут и точка будет совершать колебания по закону

$$x = A \sin(pt - \beta). \tag{88}$$

Эти колебания и называются *вынужденными*. Они представляют собою незатухающие гармонические колебания с амплитудой A, определяемой равенством (85), и частотой p, равной частоте возмущающей силы. Величина β характеризует *сдвиг фазы* вынужденных колебаний по отношению к фазе возмущающей силы.

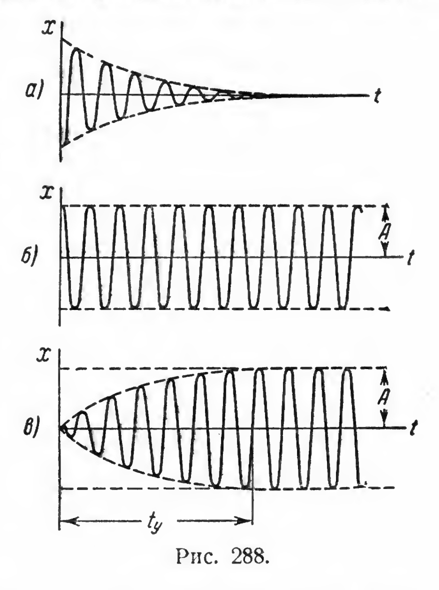


Рис. 288.

Исследуем полученные результаты. Введем обозначения:

$$\frac{p}{k} = \lambda, \quad \frac{b}{k} = h, \quad \frac{P_0}{k^2} = \frac{Q_0}{c} = \delta_0, \tag{89}$$

где λ — отношение частот, h — величина, характеризующая сопротивление, δ_0 — величина статического отклонения точки под действием силы Q_0 (например, при колебаниях груза на пружине δ_0 равно статическому удлинению пружины, вызываемому силой Q_0).

Тогда, деля числитель и знаменатель равенств (85) на k^2, получим

$$A = \frac{\delta_0}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4h^2\lambda^2}}, \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{2h\lambda}{1-\lambda^2}. \tag{90}$$

Из формул (90) видно, что A и β зависят от двух безразмерных параметров λ и h. Для большей наглядности вид этой зависимости при некоторых значениях h показан на графиках (рис. 289); отложенную на первом графике по оси ординат величину A/δ_0 называют ***коэффициентом динамичности***. В каждой конкретной задаче по ее данным можно вычислить величины δ_0, λ, h и найти значения A и β, пользуясь соответствующими графиками или формулами (90). Из этих графиков (или формул) видно также, что, меняя соотношение между p и k, можно получать вынужденные колебания с разными амплитудами.

Когда сопротивление очень мало, а величина λ не близка к единице, в формулах (90) можно приближенно считать $h \approx 0$.

Тогда будем иметь результаты, полученные в п. 1, а именно:

$$A \approx \frac{\delta_0}{|1-\lambda^2|}; \quad \beta \approx 0 \ (\text{при } \lambda < 1), \quad \beta \approx 180^\circ \ (\text{при } \lambda > 1). \quad (91)$$

Рассмотрим еще следующие частные случаи.

1) Если отношение частот λ очень мало ($p \ll k$), то, полагая приближенно $\lambda \approx 0$, получим из формулы (90) $A \approx \delta_0$. Колебания в этом

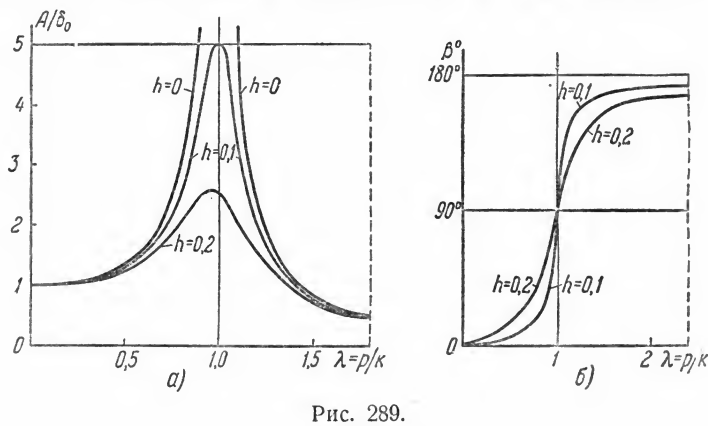


Рис. 289.

случае происходят с амплитудой, равной статическому отклонению δ_0 и сдвигом фаз $\beta \approx 0$.

2) Если отношение частот λ очень велико ($p \gg k$), величина A становится малой. Этот случай представляет особый интерес для проблем виброизоляции различных сооружений, приборов и др. При этом, считая сопротивление малым и пренебрегая в (90) $2h\lambda$ и 1 по сравнению с λ^2, можно получить для подсчета A приближенную формулу

$$A = \delta_0/\lambda^2 = P_0/p^2. \quad (91')$$

3) Во всех практически интересных случаях величина h много меньше единицы. Тогда, как видно из (90), если величина λ близка к единице, амплитуда вынужденных колебаний достигает максимума. Явление, которое при этом имеет место, называется *резонансом* [1]).

---

[1]) Из формулы (90) видно, что $A = A_{max}$, когда стоящая в знаменателе величина $f(\xi) = (1-\xi)^2 + 4h^2\xi$ (где $\xi = \lambda^2$) имеет минимум. Решая уравнение $f'(\xi) \equiv -2(1-\xi-2h^2) = 0$, найдем, что A имеет максимум при $\xi = 1-2h^2$, т. е. при $\lambda_p = \sqrt{1-2h^2}$. Следовательно, резонанс имеет место, когда λ немного меньше 1. Но практически, пренебрегая величиной h^2 по сравнению с единицей, можно считать, что $\lambda_p = 1$.

При резонансе амплитуду вынужденных колебаний и сдвиг фаз можно практически вычислять по приближенным формулам, которые получаются из равенств (90), если в них положить $\lambda = 1$:

$$A_p = \frac{\delta_0}{2h}, \qquad \beta_p = \frac{\pi}{2}. \tag{91$'$}$$

Отсюда видно, что при малых h величина A_p может достигать довольно больших значений.

Колебания с амплитудой A_p, как и вообще вынужденные колебания, устанавливаются при резонансе не сразу. Процесс установления колебаний будет аналогичен показанному на рис. 288, *в*. Чем меньше сопротивление, т. е. чем меньше b или h, тем больше величина A_p; но одновременно будет больше и время $t_у$ установления этих колебаний [см. формулу (87)].

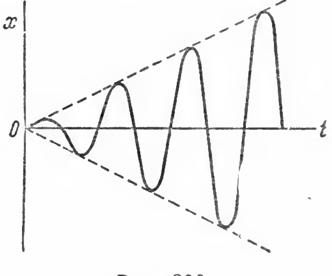


Рис. 290.

Когда сопротивление отсутствует, т. е. $b = h = 0$, то, как было установлено, закон вынужденных колебаний при резонансе дается уравнением (83), а график колебаний имеет вид, показанный на рис. 290. Таким образом, в случае отсутствия сопротивления процесс «раскачки» системы при резонансе длится неограниченно долго, а размахи колебаний со временем непрерывно возрастают. Аналогичной будет картина резонансных колебаний при очень малых сопротивлениях.

3. Общие свойства вынужденных колебаний. Из полученных выше результатов вытекает, что вынужденные колебания обладают следующими важными свойствами, отличающими их от собственных колебаний точки.

1) Амплитуда вынужденных колебаний от начальных условий не зависит. 2) Вынужденные колебания при наличии сопротивления не затухают. 3) Частота вынужденных колебаний равна частоте возмущающей силы и от характеристик колеблющейся системы не зависит (возмущающая сила «навязывает» системе свою частоту колебаний). 4) Даже при малой возмущающей силе (Q_0 мало) можно получить интенсивные вынужденные колебания, если сопротивление мало, а частота p близка к k (резонанс). 5) Даже при больших значениях возмущающей силы вынужденные колебания можно сделать сколь угодно малыми, если частота p будет много больше k.

Вынужденные колебания и, в частности, резонанс играют большую роль во многих областях физики и техники. Например, при работе машин и двигателей обычно возникают периодические силы, которые могут вызвать вынужденные колебания частей машины или фундамента.

Процесс изменения амплитуды этих колебаний можно проследить, заставляя работать на разных оборотах двигатель, для которого $p = \omega$, где ω — угловая скорость вращения (см. задачу 120). С увеличением ω амплитуда A колебаний вибрирующей части (или фундамента) будет возрастать. Когда $\omega = k$, наступает резонанс и размахи вынужденных колебаний достигают максимума. При дальнейшем увеличении ω амплитуда A убывает и когда станет $\omega \gg k$, значение A будет практически равно нулю. Во многих инженерных сооружениях явление резонанса крайне нежелательно и его следует избегать, подбирая соотношение между частотами p и k так, чтобы амплитуды вынужденных колебаний были практически равны нулю ($p \gg k$).

Противоположный пример мы имеем в радиотехнике, где резонанс оказывается очень полезным и используется для отделения сигналов одной радиостанции от сигналов всех остальных (настройка приемника).

На теории вынужденных колебаний основывается также конструирование ряда приборов, например, вибрографов — приборов для измерения смещений колеблющихся тел (фундаментов, частей машин и др.) и, в частности, сейсмографов, записывающих колебания земной коры, и т. п.

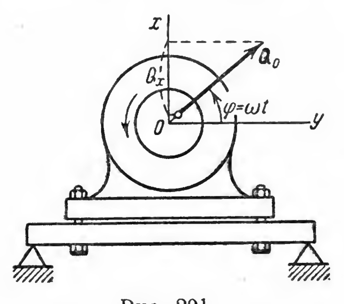


Рис. 291.

Задача 120. Балка, на которой установлен мотор, прогибается от его веса на $\delta_{ст} = 1$ *см*. При каком числе оборотов вала мотора в минуту наступит резонанс?

Решение. Из формулы (70′) следует, что период собственных колебаний балки

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\delta_{ст}}{g}}.$$

Если центр тяжести вала мотора смещен от оси, то на вал будет действовать центробежная сила Q_0 (рис. 291). Ее проекция на ось Ox, равная $Q_x = Q_0 \sin \omega t$ (ω — угловая скорость вала), и будет возмущающей силой, действующей на мотор; частота этой силы $p = \omega$. Следовательно, период вынужденных колебаний $T_в = \frac{2\pi}{\omega}$.

Резонанс наступит, когда $T_в = T$, т. е. при

$$\omega_{кр} = \sqrt{\frac{g}{\delta_{ст}}} = 31{,}3\ 1/сек.$$

Отсюда критическое число оборотов

$$n_{кр} = \frac{30\omega_{кр}}{\pi} \approx 300\ об/мин.$$

Рабочее число оборотов мотора должно быть значительно больше $n_{кр}$.

Задача 121. Исследовать вынужденные колебания груза, подвешенного к пружине (задача 117), если верхний конец A пружины совершает вертикальные колебания по закону $\xi = a_0 \sin pt$.

Решение. Проведем ось Ox так же, как в задаче 117 (см. рис. 283). Если представить себе верхний конец пружины смещенным от точки A вниз на величину ξ, то при этом длина пружины $l = l_0 - \xi + \delta_{ст} + x$. Тогда $F_x = -c\Delta l = -c(\delta_{ст} + x - \xi)$, и дифференциальное уравнение движения, если пренебречь сопротивлением воздуха и учесть, что $P = c\delta_{ст}$, будет

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -c(\delta_{ст} + x - \xi) + P = -cx + c\xi.$$

Отсюда, вводя, как и в задаче 117, обозначение $\frac{c}{m} = k^2$, получим:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = k^2a_0 \sin pt.$$

Следовательно, груз будет совершать вынужденные колебания, так как полученное уравнение совпадает с уравнением (80) или уравнением (84), если в нем считать $b = 0$ и $P_0 = k^2a_0$. Из равенств (89) видно, что в данном случае $\delta_0 = a_0$ и $h = 0$. Амплитуда вынужденных колебаний и сдвиг фаз определяются формулами (91).

Если $p \ll k$ (верхний конец пружины колеблется очень медленно), то $\lambda \approx 0$ и $A \approx a_0$, а сдвиг фаз $\beta = 0$. Груз будет при этом колебаться так, как если бы пружина была жестким стержнем, что физически и соответствует условию $k \gg p$. При $p = k$ наступает резонанс, и размахи колебаний начнут сильно возрастать. Если частота p станет больше k $(\lambda > 1)$, то груз будет колебаться так, что когда конец пружины идет вверх, груз будет опускаться вниз и наоборот (сдвиг фаз $\beta = 180°$); амплитуда же колебаний будет тем меньше, чем больше p. Наконец, когда p будет много больше k $(\lambda \gg 1)$, амплитуда $A \approx 0$. Груз при этом будет оставаться в положении статического равновесия (в точке O), хотя верхний конец пружины и совершает колебания с амплитудой a_0 (частота этих колебаний столь велика, что груз как бы не успевает за ними следовать).

ГЛАВА XXII*

ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА В ПОЛЕ ЗЕМНОГО ТЯГОТЕНИЯ

§ 126. Движение материальной точки, брошенной под углом к горизонту, в поле тяготения Земли. Задача о движении тела в поле земного тяготения возникает при изучении движения ракет дальнего действия и искусственных спутников Земли, а также при рассмотрении проблем космических полетов. В этих случаях, когда дальности и высоты траекторий сравнимы с радиусом Земли, необходимо (в отличие от задачи, рассмотренной в § 108) учитывать изменение силы притяжения с расстоянием.

Будем рассматривать движущееся тело как материальную точку массы m, а Землю считать неподвижной. Пусть в начальный момент эта точка находится у поверхности Земли в положении M_0 (рис. 292) и имеет начальную скорость $\boldsymbol{v}_0$, направленную под углом α к горизонту. Если пренебречь сопротивлением воздуха (что для рас-

сматриваемых высот полета в первом приближении вполне допустимо), то на точку при ее движении будет действовать только сила притяжения $\boldsymbol{F}$, направленная к центру Земли, причем по закону всемирного тяготения (см. § 113, п. 4)

$$F = mg\frac{R^2}{r^2}, \tag{92}$$

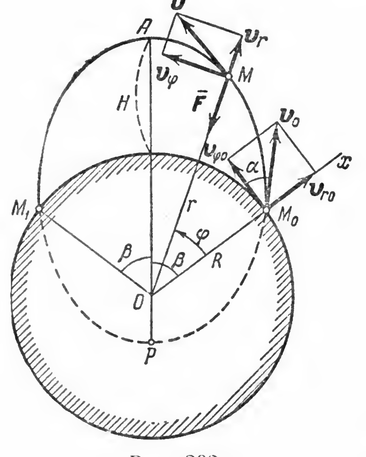


Рис. 292.

где $r = OM$ — расстояние точки M от центра Земли, $R = OM_0$ — значение r для точки вылета M_0, g — ускорение силы земного притяжения в точке M_0 [1]).

Так как сила F — центральная (§ 117), то траектория точки будет плоской кривой. Поэтому для изучения движения можно воспользоваться полярными координатами $r = OM$ и φ, поместив их начало (полюс) O в центре Земли и направляя полярную ось Ox вдоль линии OM_0. Составим дифференциальные уравнения движения точки M.

По закону площадей (§ 117) при движении под действием центральной силы момент вектора скорости $\boldsymbol{v}$ относительно центра O (или удвоенная секторная скорость точки) будет величиной постоянной. Следовательно, $m_O(\boldsymbol{v}) = c$. Но из чертежа видно, что если разложить вектор $\boldsymbol{v}$ на радиальную $\boldsymbol{v}_r$ и поперечную $\boldsymbol{v}_\varphi$ составляющие (§ 71), то

$$m_O(\boldsymbol{v}) = m_O(\boldsymbol{v}_\varphi) = rv_\varphi, \quad \text{где} \quad v_\varphi = r\frac{d\varphi}{dt}.$$

Отсюда получаем первое уравнение

$$r^2\frac{d\varphi}{dt} = c. \tag{93}$$

Значение постоянной c найдем из условий в точке вылета M_0, где, как легко видеть, $m_O(\boldsymbol{v}_0) = Rv_0 \cos\alpha$. Следовательно,

$$c = Rv_0 \cos\alpha. \tag{94}$$

Второе уравнение получим из теоремы об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме (§ 114)

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dA.$$

---

[1]) В формуле (92) R может иметь любое значение, большее земного радиуса. Когда точка M_0 берется на поверхности Земли, мы будем обычно считать R равным радиусу земного экватора $R_0 = 6378$ *км* и $g = g_0 = 9{,}81$ *м/сек*^{2} (g всюду — ускорение силы земного тяготения, а не силы тяжести; см. § 121).

Но по формуле (41) из § 113

$$dA = -F\,dr = -mgR^2\frac{dr}{r^2}.$$

В результате найдем второе уравнение в виде

$$d\left(\frac{v^2}{2}\right) = gR^2 d\left(\frac{1}{r}\right), \tag{95}$$

где (см. § 71)

$$v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2. \tag{96}$$

Интегрируя дифференциальные уравнения (93) и (95), можно определить r и φ как функции времени t, т. е. найти закон движения точки. Вместо этого найдем сразу ее траекторию. Чтобы упростить расчет, введем новое переменное u, полагая

$$u = \frac{1}{r}; \quad \frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}. \tag{97}$$

Тогда с учетом равенств (97) и (93) получим:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = -r^2\frac{du}{d\varphi}\frac{c}{r^2} = -c\frac{du}{d\varphi}; \quad r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = \frac{c}{r} = cu.$$

Подставляя эти значения в формулу (96), будем иметь

$$v^2 = c^2\left[u^2 + \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2\right].$$

После этого уравнение (95), если разделить обе его части на $d\varphi$ и вычислить производную от v^2, примет вид

$$c^2\left[u\frac{du}{d\varphi} + \frac{du}{d\varphi}\frac{d^2u}{d\varphi^2}\right] = gR^2\frac{du}{d\varphi}.$$

Заменяя здесь c его значением из (94) и сокращая на $\frac{du}{d\varphi}$, найдем окончательно дифференциальное уравнение траектории:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha} \quad \text{или} \quad \frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{p}, \tag{98}$$

где обозначено

$$p = \frac{v_0^2\cos^2\alpha}{g}. \tag{99}$$

Решение этого уравнения складывается из общего решения уравнения без правой части [которое совпадает с решением уравнения (62) при $k=1$] и частного решения уравнения с правой частью. Следовательно, $u = u_1 + u_2$, где u_1 имеет вид (63) или (64) при $k=1$,

а $u_2 = 1/p$, в чем можно убедиться непосредственной подстановкой. В результате решение уравнения (98) будет

$$u = c_1 \sin(\varphi + c_2) + \frac{1}{p} \quad \text{или} \quad u = \frac{1 + c_1 p \sin(\varphi + c_2)}{p},$$

где c_1 и c_2 — постоянные интегрирования. Полагая здесь $c_1 p = -e$, $c_2 = \pi/2 - \beta$, где e и β — новые постоянные, и переходя от u к r, найдем окончательно уравнение траектории в виде

$$r = \frac{p}{1 - e\cos(\varphi - \beta)}. \tag{100}$$

Из аналитической геометрии известно, что (100) представляет собою уравнение конического сечения (эллипса, параболы или гиперболы) с фокальным параметром p и эксцентриситетом e, выраженное в полярных координатах, для которых полюс O находится в одном из фокусов. При этом геометрический смысл постоянной β виден из того, что при $\varphi = \beta$ знаменатель в равенстве (100) имеет минимум, а следовательно, и величина $r = OM$ — максимум. Таким образом, угол β определяет положение оси симметрии траектории (ось AP на рис. 292) по отношению к линии OM_0 или к точке вылета M_0.

Чтобы определить значения постоянных интегрирования e и β, надо для начального положения $\varphi = 0$, т. е. в точке M_0, знать кроме r (или u) еще и производную от r (или от u) по φ. Формулы (32), полученные в § 71, и последнее из равенств (97) дают:

$$\frac{v_r}{v_\varphi} = \frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi} \quad \text{или} \quad -\frac{1}{r}\frac{v_r}{v_\varphi} = \frac{du}{d\varphi}.$$

Но в точке M_0, как видно из рис. 292, $r = R$ и $v_r/v_\varphi = \operatorname{tg}\alpha$. Следовательно, начальные условия для u имеют вид:

$$\text{при } \varphi = 0 \quad u = \frac{1}{R}, \quad \frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{R}\operatorname{tg}\alpha.$$

Из уравнения (100), переходя опять от r к u, получим:

$$u = \frac{1}{p}[1 - e\cos(\varphi - \beta)], \quad \frac{du}{d\varphi} = \frac{e}{p}\sin(\varphi - \beta).$$

Подставляя сюда найденные начальные данные, будем иметь

$$\frac{p}{R} = 1 - e\cos\beta, \quad -\frac{p}{R}\operatorname{tg}\alpha = -e\sin\beta$$

или, заменяя p его значением из (99),

$$e\cos\beta = 1 - \frac{v_0^2\cos^2\alpha}{gR}; \quad e\sin\beta = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{2gR}. \tag{101}$$

Из этих равенств, деля их сначала почленно друг на друга, а затем возводя в квадрат и складывая, найдем окончательно:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2(gR - v_0^2 \cos^2\alpha)}, \tag{102}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{v_0^2 \cos^2\alpha}{g^2R^2}(v_0^2 - 2gR)}. \tag{103}$$

Равенство (102) определяет угол β, т. е. положение оси симметрии траектории по отношению к точке вылета M_0. Формула же (103) дает значение эксцентриситета траектории. Из нее видно, что траекторией точки будет:

а) эллипс $(e < 1)$, если $v_0 < \sqrt{2gR}$;

б) парабола $(e = 1)$, если $v_0 = \sqrt{2gR}$;

в) гипербола $(e > 1)$, если $v_0 > \sqrt{2gR}$.

Скорость $v_п = \sqrt{2gR}$ называется *параболической* или *второй космической скоростью*. Если считать $R = R_0 = 6378$ *км* и $g = g_0 = 9{,}81$ *м/сек*^{2}, то получим $v_п \approx 11{,}2$ *км/сек*. Таким образом, при начальной скорости $v_0 \geqslant 11{,}2$ *км/сек* тело, брошенное с поверхности Земли под любым углом α к горизонту, будет двигаться по параболе или гиперболе (при $\alpha = 90°$ — по прямой), неограниченно удаляясь от Земли. Достижение скоростей такого порядка необходимо для межпланетных сообщений[1]). При скорости, меньшей второй космической, тело или упадет обратно на Землю, или станет искусственным спутником Земли.

Закон движения точки вдоль траектории, т. е. ее положение на траектории в любой момент времени, можно найти, заменяя в равенстве (93) r его значением из (100), а затем, интегрируя полученное уравнение.

§ 127. Искусственные спутники Земли. Эллиптические траектории. При $v_0 < \sqrt{2gR}$ траектория тела, брошенного с земной поверхности, есть эллипс, у которого ось PA, образующая с Ox угол β, является осью симметрии (см. рис. 292). Если начальные условия в пункте M_0 будут таковы, что угол $\beta \neq \pi$, то траектория пересечет поверхность Земли в симметричной относительно оси PA точке M_1, т. е. тело упадет на Землю. Следовательно, брошенное тело может стать спутником Земли лишь при тех начальных условиях, которые дают $\beta = \pi$. Но, как показывают равенства (101),

---

[1]) Скорость, необходимая для освобождения межпланетного корабля от совместных притяжений Земли и Солнца, будет больше $\sqrt{2g_0R_0}$ и при определенном направлении v_0 равна около 16,7 *км/сек*.

$\beta=\pi$ только при $\alpha=0$ (или $\alpha=\pi$) и $v_0^2 \geqslant gR$, так как при $\beta=\pi$ и $v_0^2 < gR$ первое из равенств (101) дает $e<0$, что невозможно, поскольку e — величина положительная. Следовательно, чтобы тело, брошенное с земной поверхности, превратилось в спутника Земли, необходимо выполнение двух условий:

$$\alpha=0, \quad \sqrt{2g_0R_0} > v_0 \geqslant \sqrt{g_0R_0}. \tag{104}$$

Эксцентриситет орбиты спутника при $\alpha=0$ и $\beta=\pi$, как видно из равенств (101), будет:

$$e=\frac{v_0^2}{gR}-1. \tag{105}$$

Скорость $v_к=\sqrt{gR}$, при которой $e=0$ и спутник движется по круговой орбите радиуса R, называется *круговой* или *первой космической скоростью*. При бросании с поверхности Земли, если считать $R=R_0=6378$ *км* и $g=g_0=9{,}81$ *м/сек*^{2}, первая космическая скорость $v_к \approx 7910$ *м/сек*. При $v_0>v_к$ орбитой спутника будет эллипс, эксцентриситет которого тем больше, чем больше v_0 (рис. 293).

Когда угол бросания $\alpha \neq 0$, то ни при какой начальной скорости v_0 тело, бросаемое с земной поверхности (если даже не учитывать сопротивление воздуха), спутником Земли стать не может. Поэтому, например, создать искусственный спутник Земли выстрелом из орудия практически невозможно; для этой цели пригодна управляемая ракета, которая с помощью соответствующих приборов может поднять спутник на заданную высоту и сообщить ему в пункте M_0 (см. рис. 293) нужную скорость v_0 под углом к горизонту $\alpha \approx 0$. Таким путем и был осуществлен запуск первых в мире советских искусственных спутников Земли и космических кораблей с человеком на борту.

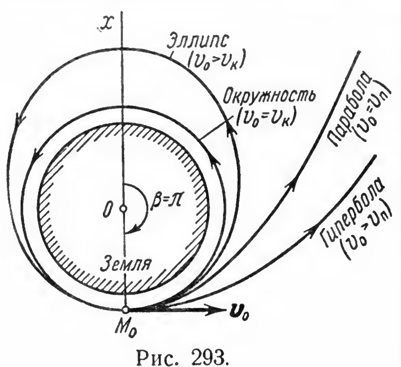


Рис. 293.

Отметим в заключение, что с увеличением высоты H пункта M_0 над поверхностью Земли сопротивление воздуха будет убывать и спутник будет долговечнее. Одновременно станет, очевидно, возможным получение спутникового движения и при $\alpha \neq 0$.

Круговая скорость $v_к=\sqrt{gR}$ с увеличением H будет уменьшаться, так как $g=g_0R_0^2/R^2$, а $R=R_0+H$ и, следовательно,

$$v_к=\sqrt{gR}=\sqrt{\frac{g_0R_0^2}{R}}=\sqrt{g_0R_0}\sqrt{\frac{R_0}{R_0+H}}.$$

Например, при $H=0$ $v_к=7910$ *м/сек*; при $H=500$ *км* $v_к=7620$ *м/сек*, при $H=1000$ *км* $v_к=7360$ *м/сек* и т. д. Однако полная энергия, затрачиваемая на запуск спутника, при увеличении H возрастает. В самом деле, если обозначить энергию, отнесенную к единице массы, через $\tilde{T}$, то для подъема до пункта M_0 (без учета сопротивления воздуха) надо затратить энергию $\tilde{T}_1=0{,}5v_{нач}^2=0{,}5\dfrac{2g_0R_0H}{R_0+H}$ (см. § 115, задачу 108), а на сообщение орбитальной скорости — энергию $\tilde{T}_2=0{,}5v_к^2$. Следовательно, полная затрата энергии на единицу массы

$$\tilde{T}=0{,}5\left(\frac{g_0R_0^2}{R_0+H}+\frac{2g_0R_0H}{R_0+H}\right)=0{,}5g_0R_0\left(1+\frac{1}{1+R_0/H}\right)$$

и будет тем больше, чем больше H.

Эллиптические траектории. При $\alpha>0$ и $v_0<\sqrt{2g_0R_0}$ тело, брошенное с земной поверхности, описав дугу эллипса, упадет обратно на Землю. Такие эллиптические траектории описывают ракеты дальнего действия, в частности межконтинентальные. Найдем основные характеристики этих траекторий.

Так как ось PA является осью симметрии траектории, то точкой падения будет M_1 и дальность S будет равна длине дуги $\smile{M_0M_1}$ (см. рис. 292); следовательно,

$$S=2R_0\beta, \tag{106}$$

где β определяется формулой (102). При этом, как обычно принято, в равенстве (106) R_0 — средний радиус Земли.

Наибольшая высота H траектории равна, очевидно, $[(r)_{\varphi=\beta}-R_0]$ или согласно равенствам (99) и (100)

$$H=\frac{v_0^2\cos^2\alpha}{(1-e)\,g_0}-R_0, \tag{107}$$

где e определяется формулой (103).

Время полета T найдем из уравнения (93), которое вместе с (94) дает:

$$dt=\frac{r^2}{c}\,d\varphi=\frac{r^2}{R_0v_0\cos\alpha}\,d\varphi.$$

Заменяя здесь r его значением, получаемым из равенств (99) и (100), и интегрируя, будем иметь:

$$T=\frac{v_0^3\cos^3\alpha}{R_0g_0^2}\int_{-\beta}^{\beta}\frac{d\psi}{(1-e\cos\psi)^2},$$

где $\psi=\varphi-\beta$. Вычисляя интеграл, найдем окончательно после ряда преобразований:

$$T=\frac{2v_0^3\cos^3\alpha}{R_0g_0^2(\sqrt{1-e^2})^3}\,(z+e\sin z), \tag{108}$$

где обозначено

$$z = 2 \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right). \tag{109}$$

По полученным формулам, зная v_0 и угол бросания α, можно определить дальность полета S, наибольшую высоту траектории H и время полета T.

С практической точки зрения важно найти минимальную скорость $v_0^{\min}$ и наивыгоднейший угол бросания $\alpha_н$, при которых может быть получена заданная дальность $S = 2R_0\beta$.

Для этого вычислим из равенства (102) величину v_0. Получим:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2R_0 g_0 \operatorname{tg}\beta}{\sin 2\alpha + 2\cos^2\alpha \operatorname{tg}\beta}}. \tag{110}$$

При данной дальности (при данном угле β) потребная скорость v_0 зависит от угла α. Так как угол α входит в равенстве (110) только в знаменатель, то v_0 имеет минимум, когда этот знаменатель достигает максимума. Приравнивая производную от знаменателя по α нулю, найдем

$$\cos 2\alpha - \sin 2\alpha \operatorname{tg}\beta = 0,$$

откуда $\operatorname{ctg} 2\alpha_н = \operatorname{tg}\beta$ и наивыгоднейший угол бросания

$$\alpha_н = 45^\circ - \frac{\beta}{2}. \tag{111}$$

Что данная величина $\alpha_н$ дает $v_0^{\min}$, легко проверяется по знаку второй производной. Подставляя значение $\alpha_н$ в равенство (110) и учитывая, что $2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$, получим:

$$v_0^{\min} = \sqrt{2R_0 g_0 \frac{\sin\beta}{1+\sin\beta}}. \tag{112}$$

Формулы (112) и (111) определяют наименьшую начальную скорость и наивыгоднейший угол бросания, обеспечивающие заданную дальность. Высота траектории и время полета при этом подсчитываются по формулам (107) и (108), в которых v_0 и α заменяются их значениями из (112) и (111). Для наглядности элементы нескольких наивыгоднейших эллиптических траекторий, подсчитанные по этим формулам при $R_0 = R_{ср} = 6370$ *км*, приведены в таблице 1 (все величины даны в таблице с точностью до 5 единиц последнего знака).

Напоминаем, что все эти расчеты относятся к движению в безвоздушном пространстве и не учитывают влияние вращения Земли. В заключение отметим, что при малых дальностях (угол β мал) дуга эллипса, описываемого брошенным телом, близка к дуге параболы. Если при этом считать $\sin\beta \approx \beta$ и $2R_0\beta = X$, а величиною β в других равенствах по сравнению с единицей пренебречь, то в пределе

Таблица 1

Угол β	Дальность S в *км*	Необходимая нач. скорость $v_0^{\min}$ в *м/сек*	Наивыгоднейший угол бросания $\alpha_н$	Высота траектории H в *км*	Время полета T
10°	2 220	4300	40°	500	12 мин. 30 сек.
20°	4 450	5650	35°	900	19 » 10 »
30°	6 670	6460	30°	1170	24 » 50 »
40°	8 900	7000	25°	1300	30 » 00 »
70°	15 570	7780	10°	900	40 » 10 »
90°	20 020	7910	0°	0	42 » 10 »

все полученные формулы перейдут в соответствующие формулы для параболических траекторий (см. § 108). В частности, из (111) и (112) получаем сразу $\alpha_н = \alpha^* = 45^\circ$, $v_0^{\min} = \sqrt{g_0 X^*}$.

§ 128. Понятие о невесомости. Если тело покоится вблизи поверхности Земли на какой-нибудь горизонтальной плоскости, то действующие на него силы тяготения (точнее, силы тяжести, см. § 121) уравновешиваются реакцией плоскости. Под воздействием этих внешних сил в теле возникают внутренние усилия в виде взаимных давлений частиц тела друг на друга. Про тело, в котором возникают такие внутренние усилия, говорят, что оно находится в состоянии *весомости*. При этом численную величину силы, с которой тело давит на горизонтальную плоскость, препятствующую его вертикальному падению, называют *весом* тела. Испытываемое человеком на поверхности Земли ощущение «весомости» и является результатом таких взаимных давлений частей его тела друг на друга.

Но если тело *движется* в поле тяготения Земли, то, как мы увидим, внутренние усилия, обусловленные внешними воздействиями или характером движения, возникают в теле не всегда. Когда такие внутренние усилия имеют место, тело также находится в состоянии весомости. Если же указанные внутренние усилия в теле не возникают, то про тело говорят, что оно находится в состоянии *невесомости*. Таким образом, *состоянием невесомости тела в поле тяготения называют такое его состояние, при котором ни действующие на тело внешние силы, ни совершаемое им движение никаких внутренних усилий в теле не вызывают.* Это состояние аналогично тому, в котором находилось бы тело, покоящееся или движущееся поступательно равномерно и прямолинейно вне поля тяготения небесных тел.

При рассмотрении усилий, возникающих в теле под действием внешних сил, необходимо различать между собою так называемые массовые (или объемные) и поверхностные силы. *Массовыми* назы-

вают силы, действующие на каждую из частиц данного тела и численно пропорциональные массам этих частиц; примером массовых сил являются силы тяготения. *Поверхностными* называют силы, приложенные к точкам поверхности данного тела; примером таких сил являются реакции всевозможных опор, сила тяги, силы сопротивления среды и т. п. При определении закона движения (или условий равновесия) физическая природа приложенных к телу сил роли не играет; важно лишь, чему каждая из сил равна и как направлена. Однако на значениях возникающих в теле внутренних усилий это различие, как мы увидим, сказывается весьма существенно. Объясняется такой результат тем, что массовые силы действуют на каждую из частиц тела непосредственно; действие же поверхностных сил передается частицам тела за счет давления на них соседних частиц.

Рассмотрим тело массы m, движущееся в поле тяготения Земли поступательно, но не обязательно прямолинейно (траектории точек тела могут быть и кривыми линиями). Размеры тела по сравнению с земным радиусом будем считать настолько малыми, что различием в расстояниях частиц тела от центра Земли можно пренебречь и считать, что силы тяготения сообщают всем частицам тела одно и то же ускорение g. Тогда равнодействующая приложенных к телу сил тяготения будет равна

$$\boldsymbol{F}_{\text{т}} = m\boldsymbol{g}. \tag{113}$$

В частности, если тело движется (или покоится) вблизи поверхности Земли, то практически можно считать, что $\boldsymbol{F}_{\text{т}} = m\boldsymbol{g}_0 = \boldsymbol{P}$, где численно P равняется весу тела.

Допустим, что кроме сил тяготения на тело действуют еще поверхностные силы, приложенные вдоль какой-то площадки AB и имеющие равнодействующую $\boldsymbol{Q}$ (рис. 294, *а*). Сила $\boldsymbol{Q}$ может быть реакцией дна кабины лифта (или кабины самолета, космического корабля), в которой покоится тело, или же силой тяги, силой сопротивления среды и т. п. Направление силы $\boldsymbol{Q}$ может быть произвольным, в частности таким, как на рис. 294, *а*.

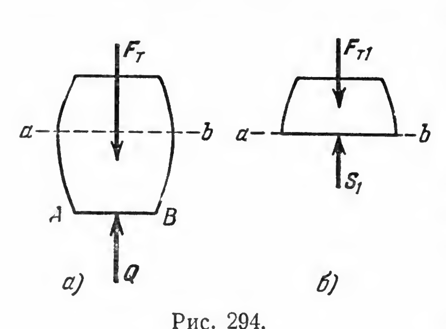


Рис. 294.

Согласно сказанному в § 99, тело, движущееся поступательно, можно рассматривать как материальную точку. Составим уравнение движения этого тела в векторной форме (тогда уравнение будет справедливо при любом направлении силы $\boldsymbol{Q}$); получим

$$m\boldsymbol{w} = \boldsymbol{F}_{\text{т}} + \boldsymbol{Q}. \tag{114}$$

Отсюда, учитывая равенство (113), найдем ускорение тела

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{g} + \frac{\boldsymbol{Q}}{m}. \tag{115}$$

Вычислим теперь внутренние усилия, возникающие под действием сил $\boldsymbol{F}_т$ и $\boldsymbol{Q}$ в каком-нибудь сечении ab тела, перпендикулярном к направлению вектора $\boldsymbol{Q}$, т. е. те силы, с которыми частицы тела, разделенные этим сечением, действуют друг на друга. Для этого рассмотрим движение одной из частей тела, например верхней, массу которой обозначим m_1. На эту часть тела действуют силы тяготения, равнодействующая которых согласно формуле (113) будет $\boldsymbol{F}_{т1} = m_1\boldsymbol{g}$, и силы давления отброшенной части тела, равнодействующую которых назовем $\boldsymbol{S}_1$ (рис. 294, *б*). Поскольку рассматриваемая часть, как и все тело, движется поступательно с тем же ускорением $\boldsymbol{w}$, то для нее будем иметь $m_1\boldsymbol{w} = \boldsymbol{F}_{т1} + \boldsymbol{S}_1$ или $m_1\boldsymbol{w} = m_1\boldsymbol{g} + \boldsymbol{S}_1$, откуда $\boldsymbol{S}_1 = m_1(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{g})$. Заменяя здесь $\boldsymbol{w}$ его значением [формула (115)], найдем окончательно, что

$$\boldsymbol{S}_1 = \frac{m_1}{m}\boldsymbol{Q}. \tag{116}$$

Полученное равенство, поскольку сила тяготения $\boldsymbol{F}_т$ в него не вошла, будет, очевидно, справедливо и при движении в поле тяготения нескольких небесных тел (например, Земли и Луны и т. п.). При этом требуется лишь, чтобы размеры движущегося тела были малы по сравнению с расстояниями его частиц от центра каждого из притягивающих тел.

Из векторного равенства (116) следует, что при $\boldsymbol{Q} \neq 0$ в теле возникают внутренние усилия, направленные параллельно поверхностной силе $\boldsymbol{Q}$; численно эти усилия пропорциональны величине Q и массе части тела, расположенной над соответствующим сечением. Таким образом, при $\boldsymbol{Q} \neq 0$ тело находится в состоянии *весомости*. Этот вывод справедлив, в частности, и для покоящегося тела, поскольку ускорение w в равенство (116) не входит. При этом если тело покоится на неподвижной относительно Земли горизонтальной плоскости, то $\boldsymbol{Q}$ будет реакцией этой плоскости и численно $Q = F_т = P$, где P — вес тела. Таким образом, при $Q = P$ формула (116) определяет внутренние усилия в покоящемся на горизонтальной плоскости теле. В движущемся теле, если действующая на него поверхностная сила $Q < P$, усилие в любом сечении тела будет меньше, чем в состоянии покоя (явление уменьшения веса); если же будет $Q > P$ (например, $\boldsymbol{Q}$ — сила тяги вертикально стартующей ракеты), то в любом сечении тела внутреннее усилие будет больше, чем при покое (явление перегрузки).

Формула (116) приводит к следующему важному выводу: в теле, покоящемся или движущемся поступательно в поле тяготения Земли, внутренние усилия, обусловленные внешними воздействиями, а следовательно, и состояние весомости имеют место лишь тогда, когда

в числе действующих внешних сил есть ***поверхностные силы***. Если же тело движется в поле тяготения поступательно и никакие внешние силы, кроме сил тяготения, на тело не действуют ($Q=0$), то, как видно из формулы (116), внутренние усилия, обусловленные внешними воздействиями, в теле не возникают и оно находится в состоянии ***невесомости***[1]). При этом, в согласии с равенством (115), все частицы тела имеют ускорения $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{g}$.

Физически найденный результат объясняется тем, что силы тяготения (силы массовые) действуют непосредственно на каждую из частиц тела, сообщая этим частицам, как мы установили, одинаковые ускорения, равные $\boldsymbol{g}$. Но с таким же ускорением каждая из частиц двигалась бы, будучи свободной. Следовательно, при поступательном движении тела под действием только сил тяготения каждая из его частиц движется как свободная и не оказывает на соседние частицы никаких давлений. В результате тело находится в состоянии невесомости.

Следует подчеркнуть, что состояние невесомости может иметь место только для тел, движущихся поступательно. В самом деле, при непоступательном движении ускорения всех частиц тела, которые мы рассматриваем как материальные точки, будут разными. При этом ускорение $\boldsymbol{w}_C=\boldsymbol{g}$ будет иметь центр тяжести C тела. Для любой же частицы B тела согласно формуле (72) из § 88 будет

$$\boldsymbol{w}_B=\boldsymbol{w}_C+\boldsymbol{w}_{BC}=\boldsymbol{g}+\boldsymbol{w}_{BC}. \tag{117}$$

Составим векторное уравнение движения частицы B: $m_B\boldsymbol{w}_B=m_B\boldsymbol{g}+\boldsymbol{N}_B$, где m_B — масса частицы, $m_B\boldsymbol{g}$ — действующая на нее сила тяготения, $\boldsymbol{N}_B$ — равнодействующая сил давления на частицу B соседних частиц. Заменяя в этом уравнении ускорение $\boldsymbol{w}_B$ его значением [равенство (117)], будем иметь $m_B(\boldsymbol{g}+\boldsymbol{w}_{BC})=m_B\boldsymbol{g}+\boldsymbol{N}_B$, откуда

$$\boldsymbol{N}_B=m_B\boldsymbol{w}_{BC}. \tag{118}$$

Поскольку при непоступательном движении $\boldsymbol{w}_{BC}\neq 0$, то и $\boldsymbol{N}_B\neq 0$, т. е. частицы оказывают взаимные давления друг на друга и тело не находится в состоянии невесомости. Невесомость может иметь место лишь тогда, когда $\boldsymbol{w}_{BC}=0$, т. е. когда тело движется поступательно.

Во всех приведенных рассуждениях существенно также то, что размеры рассматриваемого тела малы по сравнению с радиусом Земли (с расстоянием до центра притягивающего тела), так как только при этом условии ускорения $\boldsymbol{g}$ можно считать для всех частиц тела одинаковыми.

---

[1]) Подчеркиваем, что всюду речь идет о внутренних усилиях, обусловленных ***внешними*** воздействиями. Другого рода внутренние усилия, например температурные напряжения в частях конструкции или усилия, возникающие в теле человека при физических упражнениях, могут иметь место и в состоянии невесомости.

Итак, *любое тело, движущееся в поле тяготения Земли свободно* (т. е. под действием *только* сил тяготения) и *поступательно, находится в состоянии невесомости;* при этом размеры тела должны быть малы по сравнению с его расстоянием от центра Земли. Аналогичный результат имеет место для движения в поле тяготения любых других небесных тел.

Следовательно, если сопротивление воздуха пренебрежимо мало, то любое падающее на Землю или брошенное с ее поверхности тело, движущееся поступательно, будет находиться в состоянии невесомости. В частности, в состоянии невесомости находятся движущиеся вне земной атмосферы без вращения искусственные спутники Земли или космические корабли и все находящиеся в них тела.

Учет невесомости приобретает важное значение при космических полетах, поскольку невесомость изменяет условия работы многих устройств и приборов, а те из них, в которых, например, используются физические маятники или свободная подача жидкости и т. п., вообще оказываются непригодными. Важную роль в условиях невесомости начинают играть молекулярные силы (в земных условиях малые по сравнению с взаимными давлениями, обусловленными весомостью), что меняет характер ряда явлений. Например, в условиях невесомости смачивающая жидкость, заполняющая замкнутый сосуд, под действием молекулярных сил распределится равномерно по его стенкам, а воздух, если он есть, займет среднюю часть сосуда. Жидкость же, не смачивающая стенок, примет форму шара[1]).

Интересным свойством обладают системы отсчета, связанные с телами, движущимися в поле тяготения свободно и поступательно, т. е. находящимися в состоянии невесомости. Назовем такую систему **местной системой отсчета** и рассмотрим движение по отношению к ней точки с массой m, считая область, где происходит движение, настолько малой, что в ней можно принять $\boldsymbol{g} = \text{const}$. Тогда в уравнении относительного движения точки [§ 120, уравнение (51)] переносная сила инерции $\boldsymbol{F}^{\text{и}}_{\text{пер}} = -m\boldsymbol{w}_{\text{пер}} = -m\boldsymbol{g}$ уравновесится с действующей на точку силой тяготения $\boldsymbol{F}_{\text{т}} = m\boldsymbol{g}$, а $\boldsymbol{F}^{\text{и}}_{\text{кор}} = 0$, поскольку система отсчета движется поступательно. В результате уравнение (51) примет такой же вид, как в инерциальной системе отсчета, т. е.

$$m\boldsymbol{w} = \boldsymbol{F}, \qquad (119)$$

где $\boldsymbol{F}$ — равнодействующая всех приложенных к точке сил, кроме

---

[1]) Невесомость влияет и на работу ряда органов человеческого тела (например, на вестибулярный аппарат, обеспечивающий чувство равновесия); поэтому, чтобы приспособиться к условиям невесомости, требуется соответствующая тренировка. Предполагается также при длительных полетах человека на космических станциях конструировать их в виде большого вращающегося колеса с кабинами на «ободе». Частицы тел, помещенных в эти кабины, будут действовать друг на друга с силами, определяемыми равенством (118); тем самым для них будет искусственно создано состояние весомости.

силы тяготения. Таким образом, рассматриваемая местная система отсчета для движений в малой области практически является инерциальной, хотя по отношению к звездной системе отсчета она движется ускоренно; при этом уравнения движения в местной системе составляются так, как если бы она находилась *вне поля тяготения* (сила тяготения $\boldsymbol{F}_{\text{т}}$, как уравновешенная силой $\boldsymbol{F}^{\text{и}}_{\text{пер}}$, в уравнение движения не входит).

Заметим, что Земля, не будь у нее суточного вращения, находилась бы при движении вокруг Солнца в состоянии «солнечной невесомости». Поэтому для движений в области, малой по сравнению с расстоянием до Солнца, система отсчета с началом в центре Земли и осями, направленными на неподвижные звезды (т. е. не участвующая в суточном вращении Земли), практически инерциальна и уравнения движения в ней имеют вид (119). Система же отсчета, жестко связанная с Землей и участвующая в ее суточном вращении, не будет инерциальной (см. § 121).

Другим примером является система отсчета, связанная с движущимся в поле тяготения свободно и без вращения космическим кораблем. В ней уравнения движения тоже имеют вид (119), и все механические явления, о чем говорилось, протекают так, как если бы корабль находился вне поля тяготения.

Из уравнения (119) следует, что при $\boldsymbol{F}=0$, т. е. когда никакие силы, кроме сил тяготения, на тело не действуют, оно, предоставленное само себе, будет свободно «висеть» в любом месте кабины корабля, что, как проявление невесомости, наблюдалось и экспериментально[1]). Но такой факт сам по себе еще не свидетельствует о наличии невесомости. Его можно наблюдать и на Земле, например, для тела, погруженного в жидкость с тем же, что и у тела, удельным весом. Однако на это тело действуют *поверхностные* силы давления жидкости, создавая в нем внутренние напряжения, и оно будет в состоянии весомости.

Невесомость может иметь место при действии на тело только массовых сил. Сущность этого явления связана с отсутствием в теле соответствующих внутренних усилий и не зависит от того, по отношению к какой системе отсчета рассматривается движение. Соответствующие эффекты (например, то, что при невесомости несмачивающая жидкость принимает форму шара и др.) будут фиксироваться наблюдателем, находящимся в любой системе отсчета.

---

[1]) Земной наблюдатель объяснит это тем, что корабль и «висящее» в его кабине тело движутся вокруг Земли по практически совпадающим орбитам и поэтому относительно друг друга не перемещаются.

РАЗДЕЛ ЧЕТВЕРТЫЙ
ДИНАМИКА СИСТЕМЫ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

ГЛАВА XXIII
ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ СИСТЕМЫ. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 129. Механическая система. Силы внешние и внутренние. *Механической системой* материальных точек или тел называется такая их совокупность, в которой положение или движение каждой точки (или тела) зависит от положения и движения всех остальных. Материальное тело мы также будем рассматривать как систему материальных частиц (точек), образующих это тело.

Классическим примером механической системы является солнечная система, в которой все тела связаны силами взаимного притяжения. Другим примером механической системы может служить любая машина или механизм, в которых все тела связаны шарнирами, стержнями, тросами, ремнями и т. п. (т. е. различными геометрическими связями). В этом случае на тела системы действуют силы взаимного давления или натяжения, передаваемые через связи.

Совокупность тел, между которыми нет никаких сил взаимодействия (например, группа летящих в воздухе самолетов), механическую систему не образует. В дальнейшем мы будем рассматривать только механические системы тел и называть их просто системами.

В соответствии со сказанным, силы, действующие на точки или тела системы, можно разделить на внешние и внутренние.

Внешними называются силы, действующие на точки системы со стороны точек или тел, не входящих в состав данной системы. *Внутренними* называются силы, действующие на точки системы со стороны других точек или тел этой же системы. Будем обозначать внешние силы символом $\boldsymbol{F}^e$, а внутренние — $\boldsymbol{F}^i$ (индексы e и i от начальных букв французских слов exterieur — внешний и interieur — внутренний).

Как внешние, так и внутренние силы могут быть в свою очередь или активными, или реакциями связей. Разделение сил на внешние и внутренние является условным и зависит от того, движение какой системы тел мы рассматриваем. Например, если рассматривать

движение всей солнечной системы в целом, то сила притяжения Земли к Солнцу будет внутренней; при изучении же движения Земли по ее орбите вокруг Солнца та же сила будет рассматриваться как внешняя.

Внутренние силы обладают следующими свойствами:

1. *Геометрическая сумма* (*главный вектор*) *всех внутренних сил системы равняется нулю.* В самом деле, по третьему закону динамики любые две точки системы (рис. 295) действуют друг на друга с равными по модулю и противоположно направленными силами F_{12}^i и F_{21}^i, сумма которых равна нулю. Так как аналогичный результат имеет место для любой пары точек системы, то

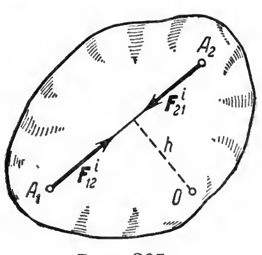


Рис. 295.

$$\sum F_k^i = 0.$$

2. *Сумма моментов* (*главный момент*) *всех внутренних сил системы относительно любого центра или оси равняется нулю.* Действительно, если взять произвольный центр O, то из рис. 295 видно, что $m_O(F_{12}^i) + m_O(F_{21}^i) = 0$. Аналогичный результат получится при вычислении моментов относительно оси. Следовательно, и для всей системы будет:

$$\sum m_O(F_k^i) = 0 \quad \text{или} \quad \sum m_x(F_k^i) = 0.$$

Из доказанных свойств не следует однако, что внутренние силы взаимно уравновешиваются и не влияют на движение системы, так как эти силы приложены к *разным* материальным точкам или телам и могут вызвать взаимные перемещения этих точек или тел. Уравновешенными внутренние силы будут тогда, когда рассматриваемая система представляет собою абсолютно твердое тело (см. § 3).

§ 130. Масса системы. Центр масс. Движение системы, кроме действующих сил, зависит также от ее суммарной массы и распределения масс. *Масса системы* равна арифметической сумме масс всех точек или тел, образующих систему [1])

$$M = \sum m_k.$$

В однородном поле тяжести, для которого $g = \text{const}$, вес любой частицы тела будет пропорционален ее массе. Поэтому о распреде-

---

[1]) Массу системы мы, как правило, будем обозначать той же буквой M, которой обозначаются моменты сил. При этом не может возникнуть недоразумений, так как в обозначениях моментов буква M обычно снабжается каким-либо индексом (например, M_C, M_x, $M_{\text{вр}}$ и т. п.). Лишь в главе XXX ввиду «близкого соседства» обозначений моментов и масс мы для ясности будем массу системы обозначать буквой рукописного шрифта $\mathscr{M}$.

лении масс в теле можно судить по положению его центра тяжести. Преобразуем формулы, определяющие координаты центра тяжести [см. § 54, формулы (74)], к виду, явно содержащему массу. Для этого положим в указанных формулах $p_k = m_k g$, $P = Mg$, после чего, сократив на g, будем иметь

$$x_C = \frac{\sum m_k x_k}{M}, \quad y_C = \frac{\sum m_k y_k}{M}, \quad z_C = \frac{\sum m_k z_k}{M}. \tag{1}$$

В полученные равенства входят только массы m_k материальных точек (частиц), образующих тело, и координаты x_k, y_k, z_k этих точек. Следовательно, положение точки $C(x_C, y_C, z_C)$ действительно характеризует распределение масс в теле или в любой механической системе, если под m_k, x_k, y_k, z_k понимать соответственно массы и координаты точек этой системы.

Геометрическая точка C, координаты которой определяются формулами (1), называется *центром масс* или *центром инерции* механической системы.

Если положение центра масс определять его радиусом-вектором, $\boldsymbol{r}_C$, то из равенств (1) для $\boldsymbol{r}_C$ получается формула

$$\boldsymbol{r}_C = \frac{\sum m_k \boldsymbol{r}_k}{M}, \tag{1'}$$

где $\boldsymbol{r}_k$ — радиусы-векторы точек, образующих систему.

Хотя положение центра масс совпадает с положением центра тяжести тела, находящегося в однородном поле тяжести, понятия эти не являются тождественными. Понятие о центре тяжести, как о точке, через которую проходит линия действия равнодействующей сил тяжести, по существу имеет смысл только для твердого тела, находящегося в однородном поле тяжести. Понятие же о центре масс, как о характеристике распределения масс в системе, имеет смысл для любой системы материальных точек или тел, причем это понятие сохраняет свой смысл независимо от того, находится ли данная система под действием каких-нибудь сил или нет.

§ 131. Момент инерции тела относительно оси. Радиус инерции. Положение центра масс характеризует распределение масс системы не полностью. Например (рис. 296), если расстояния h от оси Oz каждого из одинаковых шаров A и B увеличить на одну и ту же величину, то положение центра масс системы не изменится, а распределение масс станет другим, и это скажется на движении системы (вращение вокруг оси Oz при прочих равных условиях будет происходить медленнее).

Поэтому в механике вводится еще одна характеристика распределения масс — момент инерции. *Моментом инерции тела* (*системы*)

относительно данной оси Oz (или *осевым моментом инерции*) *называется скалярная величина, равная сумме произведений масс всех точек тела* (*системы*) *на квадраты их расстояний от этой оси*

$$J_z = \sum m_k h_k^2. \qquad (2)$$

Из определения следует, что момент инерции тела (или системы) относительно любой оси является величиной положительной и не равной нулю.

В дальнейшем будет показано, что осевой момент инерции играет при вращательном движении тела такую же роль, какую масса при поступательном, т. е. что *осевой момент инерции является мерой инертности тела при вращательном движении.*

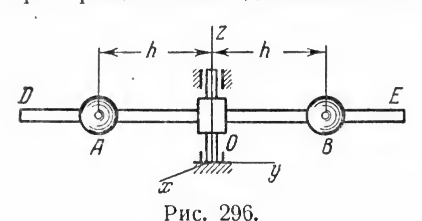


Рис. 296.

Согласно формуле (2) момент инерции тела равен сумме моментов инерции всех его частей относительно той же оси. Для одной материальной точки, находящейся на расстоянии h от оси, $J_z = mh^2$. Единицей измерения момента инерции в системе *СИ* будет 1 $кгм^2$, а в системе *МкГС* — 1 $кГм\ сек^2$.

Для вычисления осевых моментов инерции можно расстояния точек от осей выражать через координаты x_k, y_k, z_k этих точек (например, квадрат расстояния от оси Ox будет $y_k^2 + z_k^2$ и т. д.). Тогда моменты инерции относительно осей $Oxyz$ будут определяться формулами

$$J_x = \sum m_k (y_k^2 + z_k^2), \quad J_y = \sum m_k (z_k^2 + x_k^2), \quad J_z = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2). \qquad (3)$$

Часто в ходе расчетов пользуются понятием радиуса инерции. *Радиусом инерции* тела относительно оси Oz называется линейная величина $\rho_и$, определяемая равенством

$$J_z = M\rho_и^2, \qquad (4)$$

где M — масса тела. Из определения следует, что радиус инерции геометрически равен расстоянию от оси Oz той точки, в которой надо сосредоточить массу всего тела, чтобы момент инерции одной этой точки был равен моменту инерции всего тела.

Зная радиус инерции, можно по формуле (4) найти момент инерции тела и наоборот.

Формулы (2) и (3) справедливы как для твердого тела, так и для любой системы материальных точек. В случае сплошного тела, разбивая его на элементарные части, найдем, что в пределе сум-

ма, стоящая в равенстве (2), обратится в интеграл. В результате, учитывая, что $dm = \rho\, dV$, где ρ — плотность, а V — объем, получим

$$J_z = \int_{(V)} h^2 dm \quad \text{или} \quad J_z = \int_{(V)} \rho h^2 dV. \tag{5}$$

Интеграл здесь распространяется на весь объем V тела, а плотность ρ и расстояние h зависят от координат точек тела. Аналогично формулы (3) для сплошных тел примут вид

$$J_x = \int_{(V)} \rho (y^2 + z^2)\, dV \quad \text{и т. д.} \tag{5'}$$

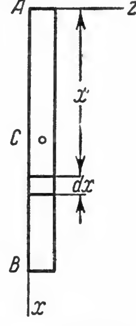


Рис. 297.

Формулами (5) или (5′) удобно пользоваться при вычислении моментов инерции однородных тел правильной формы. При этом плотность ρ будет постоянной и выйдет из-под знака интеграла.

Найдем моменты инерции некоторых однородных тел.

1. Тонкий однородный стержень длины l и массы M. Вычислим его момент инерции относительно оси Az, перпендикулярной к стержню и проходящей через его конец A (рис. 297). Направим вдоль AB координатную ось Ax. Тогда для любого элементарного отрезка длины dx величина $h = x$, а масса $dm = \rho_1 dx$, где $\rho_1 = M/l$ — масса единицы длины стержня. В результате формула (5) дает [1]

$$J_A = \int_0^l x^2 dm = \rho_1 \int_0^l x^2 dx = \rho_1 \frac{l^3}{3}.$$

Заменяя здесь ρ_1 его значением, найдем окончательно:

$$J_A = \frac{1}{3} M l^2. \tag{6}$$

2. Тонкое круглое однородное кольцо радиуса R и массы M. Найдем его момент инерции относительно оси Cz, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его центр (рис. 298, *а*). Так как все точки кольца находятся от оси Cz на расстоянии $h_k = R$, то формула (2) дает

$$J_C = \sum m_k R^2 = \left(\sum m_k\right) R^2 = MR^2.$$

Следовательно, для кольца

$$J_C = MR^2. \tag{7}$$

[1]) Здесь, и везде далее, J_A обозначает момент инерции относительно оси, проходящей через точку A и направленной перпендикулярно к плоскости изображенного на чертеже сечения тела.

Очевидно, такой же результат получится для момента инерции тонкой цилиндрической оболочки массы M и радиуса R относительно ее оси.

3. Круглая однородная пластина или цилиндр радиуса R и массы M. Вычислим момент инерции круглой пластины относительно оси Cz, перпендикулярной к пластине и проходящей через ее центр (см. рис. 298, *а*). Для этого выделим элементарное

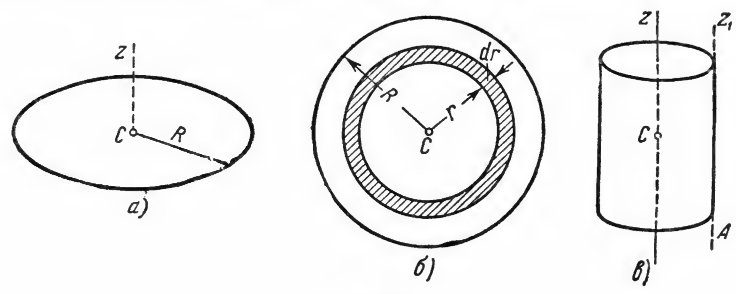


Рис. 298.

кольцо радиуса r и ширины dr (рис. 298, *б*). Площадь этого кольца равна $2\pi r\,dr$, а масса $dm=\rho_2 2\pi r\,dr$, где $\rho_2=\frac{M}{\pi R^2}$ — масса единицы площади пластины. Тогда по формуле (7) для выделенного элементарного кольца будет

$$dJ_C=r^2dm=2\pi\rho_2 r^3dr,$$

а для всей пластины

$$J_C=2\pi\rho_2\int_0^R r^3dr=\frac{1}{2}\pi\rho_2 R^4.$$

Заменяя здесь ρ_2 его значением, найдем окончательно

$$J_C=\frac{1}{2}MR^2. \qquad (8)$$

Такая же формула получится, очевидно, и для момента инерции J_z однородного круглого цилиндра массы M и радиуса R относительно его оси Cz (рис. 298, *в*).

4. Прямоугольная пластина, конус, шар. Опуская выкладки, приведем формулы, определяющие моменты инерции следующих тел (читатель может получить эти формулы самостоятельно):

а) сплошная прямоугольная пластина массы M со сторонами $AB=a$ и $BD=b$ (ось x направлена вдоль стороны AB, ось y — вдоль BD):

$$J_x=\frac{1}{3}Mb^2,\quad J_y=\frac{1}{3}Ma^2;$$

б) прямой сплошной круглый конус массы M с радиусом основания R (ось z направлена вдоль оси конуса):

$$J_z = 0{,}3MR^2;$$

в) сплошной шар массы M и радиуса R (ось z направлена вдоль диаметра):

$$J_z = 0{,}4MR^2.$$

Моменты инерции неоднородных тел и тел сложной конфигурации можно определять экспериментально с помощью соответствующих приборов. Один из таких методов рассмотрен в § 155.

§ 132. Моменты инерции тела относительно параллельных осей. Теорема Гюйгенса. Моменты инерции данного тела относительно разных осей будут, вообще говоря, разными. Покажем, как зная момент инерции относительно какой-нибудь одной оси, проведенной в теле, найти момент инерции относительно любой другой оси, ей параллельной.

Проведем через центр масс C тела произвольные оси $Cx'y'z'$, а через любую точку O на оси Cx' — оси $Oxyz$, такие, что $Oy \parallel Cy'$, $Oz \parallel Cz'$ (рис. 299). Расстояние между осями Cz' и Oz обозначим через d. Тогда по формулам (3) будет

$$J_{Oz} = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2),$$
$$J_{Cz'} = \sum m_k (x_k'^2 + y_k'^2).$$

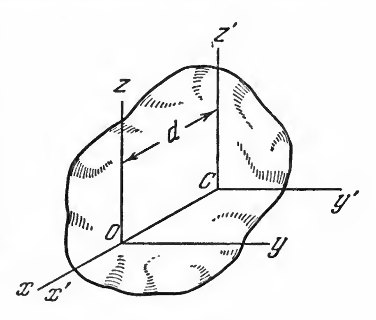


Рис. 299.

Но, как видно из рисунка, для любой точки тела $x_k = x_k' - d$ или $x_k^2 = x_k'^2 + d^2 - 2x_k'd$, а $y_k = y_k'$. Подставляя эти значения x_k, y_k в выражение для J_{Oz} и вынося общие множители d^2 и $2d$ за скобки, получим

$$J_{Oz} = \sum m_k (x_k'^2 + y_k'^2) + \left(\sum m_k\right) d^2 - 2d \left(\sum m_k x_k'\right).$$

В правой части равенства первая сумма равна $J_{Cz'}$, а вторая — массе тела M. Найдем значение третьей суммы. На основании формул (1) для координат центра масс $\sum m_k x_k' = Mx_C'$. Так как в нашем случае точка C является началом координат, то $x_C' = 0$ и, следовательно, $\sum m_k x_k' = 0$. Окончательно получаем:

$$J_{Oz} = J_{Cz'} + Md^2. \tag{9}$$

Формула (9) выражает следующую теорему Гюйгенса[1]): *момент инерции тела относительно данной оси равен моменту инерции относительно оси, ей параллельной, проходящей через центр масс тела, сложенному с произведением массы всего тела на квадрат расстояния между осями.*

Из формулы (9) следует, что $J_{Oz} > J_{Cz'}$. Следовательно, из всех осей данного направления наименьший момент инерции будет относительно той оси, котороя проходит через центр масс.

Теорема Гюйгенса позволяет найти момент инерции тела относительно данной оси Oz_1 и в том случае, когда известен его момент инерции относительно *любой* оси Az_2, параллельной данной.

При этом надо знать расстояния d_1 и d_2 каждой из этих осей от центра масс тела. Тогда, зная J_{Az_2} и d_2, мы по формуле (9) определяем $J_{Cz'}$, а затем по той же формуле находим искомый момент инерции J_{Oz_1}.

Задача 122. Определить момент инерции тонкого стержня относительно оси Cz, перпендикулярной стержню и проходящей через его центр масс.

Решение. Проведем через конец A стержня ось Az (см. рис. 297; ось Cz на нем не показана). Тогда по формуле (9)

$$J_C = J_A - Md^2.$$

В данном случае $d = \frac{l}{2}$, где l — длина стержня, а величина J_A определяется формулой (6). Следовательно,

$$J_C = \frac{1}{3}Ml^2 - \frac{1}{4}Ml^2 = \frac{1}{12}Ml^2.$$

Задача 123. Определить момент инерции цилиндра относительно оси Az_1, проходящей через его образующую (см. рис. 298, *в*).

Решение. По теореме Гюйгенса $J_{Az_1} = J_{Cz} + Md^2$. В данном случае $d = R$, а по формуле (8) $J_{Cz} = \frac{1}{2}MR^2$.

Подставляя эти значения, получим:

$$J_{Az_1} = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2.$$

§ 133*. Центробежные моменты инерции. Главные оси инерции тела. Момент инерции тела относительно оси также не характеризует распределение масс системы полностью. Например, если стержень DE на рис. 296 повернуть в плоскости Oyz так, чтобы угол между ним и осью Oz не был прямым, а расстояния h шаров A и B от оси сохранить, сместив их к концам стержня, то ни положение центра

[1]) Христиан Гюйгенс (1629—1695) — выдающийся голландский ученый, механик, физик и астроном. Изобрел первые маятниковые часы. В связи с этим изучал колебания физического маятника (см. § 155) и ввел понятие о моменте инерции тела.

масс, ни момент инерции шаров относительно оси Oz не изменятся. Между тем, распределение масс станет другим (симметрия относительно оси Oz нарушится) и это скажется при вращении системы вокруг оси Oz (возникнут дополнительные боковые давления на подшипники).

Поэтому в механике в качестве характеристик, учитывающих подобную асимметрию в распределении масс, вводят еще так называемые центробежные моменты инерции. Если через точку O провести координатные оси $Oxyz$, то по отношению к этим осям *центробежными моментами инерции* (или *произведениями инерции*) *называют величины J_{xy}, J_{yz}, J_{zx}, определяемые равенствами*:

$$J_{xy}=\sum m_k x_k y_k, \quad J_{yz}=\sum m_k y_k z_k, \quad J_{zx}=\sum m_k z_k x_k, \tag{10}$$

где m_k — массы точек, x_k, y_k, z_k — их координаты; при этом очевидно, что $J_{xy}=J_{yx}$ и т. д.

Для сплошных тел формулы (10) по аналогии с (5′) принимают вид

$$J_{xy}=\int\limits_{(V)}\rho xy\,dV \text{ и т. д.} \tag{10′}$$

В отличие от осевых, центробежные моменты инерции могут быть как положительными, так и отрицательными величинами и, в частности, при определенным образом выбранных осях $Oxyz$ могут обращаться в нули.

Рассмотрим однородное тело, имеющее ось симметрии. Проведем координатные оси $Oxyz$ так, чтобы ось Oz была направлена вдоль оси симметрии (см., например, рис. 342). Тогда в силу симметрии каждой точке тела с массой m_k и координатами (x_k, y_k, z_k) будет соответствовать точка с другим индексом, но с такой же массой и с координатами, равными $-x_k$, $-y_k$, z_k. В результате получим, что $\sum m_k x_k z_k=0$ и $\sum m_k y_k z_k=0$, так как в этих суммах все слагаемые попарно одинаковы по модулю и противоположны по знаку; отсюда, учитывая равенства (10), находим:

$$J_{xz}=0, \quad J_{yz}=0. \tag{11}$$

Таким образом, симметрия в распределении масс относительно оси Oz характеризуется обращением в нуль двух центробежных моментов инерции J_{xz} и J_{yz}. ***Ось Oz, для которой центробежные моменты инерции J_{xz}, J_{yz}, содержащие в своих индексах наименование этой оси, равны нулю, называется главной осью инерции тела для точки O.***

Из изложенного следует, что *если тело имеет ось симметрии, то эта ось является главной осью инерции тела для любой своей точки.*

Главная ось инерции не обязательно является осью симметрии. Рассмотрим однородное тело, имеющее плоскость симметрии. Проведем

в этой плоскости какие-нибудь оси Oxy и перпендикулярную к ним ось Oz. Тогда в силу симметрии каждой точке с массой m_k и координатами (x_k, y_k, z_k) будет соответствовать точка с такой же массой и координатами, равными $x_k, y_k, -z_k$. В результате, как и в предыдущем случае, найдем, что $\sum m_k x_k z_k = 0$ и $\sum m_k y_k z_k = 0$ или $J_{xz} = 0$, $J_{yz} = 0$. Следовательно, *если тело имеет плоскость симметрии, то любая ось, перпендикулярная к этой плоскости, будет главной осью инерции тела для точки O, в которой ось пересекает плоскость.*

Равенства (11) выражают условия того, что ось Oz является главной осью инерции тела для точки O (начала координат). Аналогично, если $J_{xy} = 0$, $J_{xz} = 0$, то ось Ox будет для точки O главной осью инерции и т. д. Следовательно, *если все центробежные моменты инерции равны нулю, т. е.*

$$J_{xy} = 0, \quad J_{yz} = 0, \quad J_{zx} = 0, \tag{12}$$

то каждая из координатных осей Oxyz является главной осью инерции тела для точки O (начала координат).

Например, на рис. 342 все три оси $Oxyz$ являются для точки O главными осями инерции (ось Oz как ось симметрии, а оси Ox и Oy как перпендикулярные к плоскостям симметрии).

Моменты инерции тела относительно главных осей инерции называются *главными моментами инерции тела.*

Главные оси инерции, построенные для центра масс тела, называют *главными центральными осями инерции тела.* Из доказанного выше следует, что если тело имеет ось симметрии, то эта ось является одной из главных центральных осей инерции тела, так как центр масс лежит на этой оси (см. § 56). Если же тело имеет плоскость симметрии, то ось, перпендикулярная к этой плоскости и проходящая через центр масс тела, будет также одной из главных центральных осей инерции тела.

В приведенных примерах рассматривались симметричные тела. Однако можно доказать, что *через любую точку какого угодно тела можно провести по крайней мере три такие взаимно перпендикулярные оси, для которых будут выполняться равенства* (12), *т. е. которые будут главными осями инерции тела для этой точки* (доказательство дано ниже петитом).

Понятие о главных осях инерции играет важную роль в динамике твердого тела. Если по ним направить координатные оси $Oxyz$, то все центробежные моменты инерции обращаются в нули и соответствующие уравнения или формулы существенно упрощаются (см. § 158). С этим понятием связано также решение задач о динамическом уравновешивании масс (§ 169), о центре удара (§ 165) и др.

Покажем, что главные оси инерции существуют в любой точке тела. Для этого докажем сначала следующую теорему: *ось Oz, момент инерции относительно которой имеет наибольшее или наименьшее значение по*

сравнению с моментами инерции относительно соседних с ней осей, проходящих через точку O, является главной осью инерции тела для этой точки. Следовательно, надо доказать, что если при любом элементарном повороте оси Oz вокруг точки O будет $dJ_z=0$ (условие экстремума), то эта ось является для точки O главной осью инерции.

Проведем через точку O координатные оси $Oxyz$ и повернем их (не меняя положения тела) вокруг оси Ox на угол $d\theta_1$ (рис. 300). Как известно из аналитической геометрии, при таком повороте осей координата y_k любой точки B_k тела преобразуется по формуле

$$y'_k = y_k \cos d\theta_1 + z_k \sin d\theta_1$$

или, так как $d\theta_1$ — элементарный угол, $y'_k = y_k + z_k d\theta_1$, что видно и непосредственно из рисунка. Отсюда $y'^2_k = y^2_k + 2y_k z_k\, d\theta_1 + z^2_k\, d\theta^2_1$. Тогда, отбрасывая малые высшего порядка, т. е. члены с $d\theta^2_1$, и учитывая, что $x'_k = x_k$, получим:

$$J_{z'} = \sum m_k (x'^2_k + y'^2_k) = \\ = \sum m_k (x^2_k + y^2_k) + 2 \sum m_k y_k z_k\, d\theta_1.$$

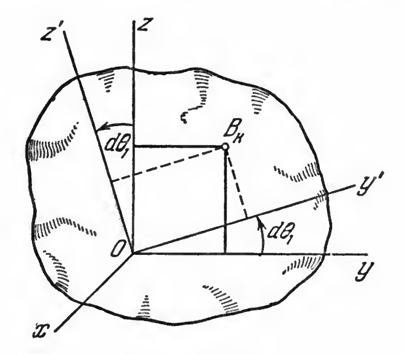


Рис. 300.

Вынося здесь общий множитель $d\theta_1$ за скобку, будем иметь

$$J_{z'} = J_z + 2J_{yz}\, d\theta_1$$

или

$$(dJ_z)_1 = J_{z'} - J_z = 2J_{yz}\, d\theta_1,$$

где $(dJ_z)_1$ — элементарное приращение J_z при рассматриваемом повороте. Аналогично при элементарном повороте вокруг оси Oy на угол $d\theta_2$ получим $(dJ_z)_2 = 2J_{xz}\, d\theta_2$. Поскольку любое элементарное перемещение оси Oz складывается из таких двух поворотов, то условие экстремума J_z примет вид

$$(dJ_z)_1 = 0, \quad (dJ_z)_2 = 0.$$

Следовательно, если это условие выполняется, то поскольку $d\theta_1 \neq 0$, $d\theta_2 \neq 0$, должно быть

$$J_{xz} = 0, \quad J_{yz} = 0,$$

т. е. ось Oz будет для точки O главной осью инерции. Тем самым теорема доказана.

Заметим теперь, что если непрерывно изменять направление оси Oz, проходящей через точку O тела, то одновременно будет непрерывно изменяться и осевой момент инерции J_z. Но в ходе этого изменения J_z не может ни возрастать, ни убывать неограниченно, поскольку для реальных тел $\infty > J_z > 0$. Отсюда на основании соответствующих теорем анализа следует, что среди всех направлений оси Oz существует по крайней мере одно, для которого величина J_z имеет максимум (по сравнению с ее значениями для соседних осей), и одно, для которого эта величина имеет минимум. Тогда из доказанной теоремы вытекает, что через любую точку тела проходят по крайней мере две главные оси инерции. При этом можно показать, что они

взаимно перпендикулярны [1]). Но по определению [равенства (11)], если две взаимно перпендикулярные оси, проведенные из точки O (например, Ox и Oy) являются для нее главными, то $J_{xz}=0$, $J_{yz}=0$ и третья, перпендикулярная к ним ось (Oz) будет также главной осью инерции для точки O. Следовательно, через любую точку тела действительно проходят по крайней мере три взаимно перпендикулярные главные для этой точки оси инерции тела.

ГЛАВА XXIV

ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС СИСТЕМЫ

§ 134. Дифференциальные уравнения движения системы. Рассмотрим систему, состоящую из n материальных точек. Выделим какую-нибудь точку системы с массой m_k. Обозначим равнодействующую всех приложенных к точке внешних сил (и активных и реакций связей) через $\boldsymbol{F}_k^e$, а равнодействующую всех внутренних сил — через $\boldsymbol{F}_k^i$. Если точка имеет при этом ускорение $\boldsymbol{w}_k$, то по основному закону динамики

$$m_k\boldsymbol{w}_k=\boldsymbol{F}_k^e+\boldsymbol{F}_k^i.$$

Аналогичный результат получим для любой точки. Следовательно, для всей системы будет:

$$\left.\begin{aligned} m_1\boldsymbol{w}_1&=\boldsymbol{F}_1^e+\boldsymbol{F}_1^i,\\ m_2\boldsymbol{w}_2&=\boldsymbol{F}_2^e+\boldsymbol{F}_2^i,\\ &\dots\dots\\ m_n\boldsymbol{w}_n&=\boldsymbol{F}_n^e+\boldsymbol{F}_n^i. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Эти уравнения, из которых можно определить закон движения каждой точки системы, называются *дифференциальными уравнениями движения системы* в векторной форме. Уравнения (13) являются дифференциальными, так как $\boldsymbol{w}_k=\frac{d\boldsymbol{v}_k}{dt}=\frac{d^2\boldsymbol{r}_k}{dt^2}$; входящие в правые

---

[1]) Пусть эти главные оси будут Oz и Oz' и угол между ними $\alpha\neq 0$. Проведем в плоскости zOz' оси $Oy\perp Oz$ и $Oy'\perp Oz'$ (см. рис. 300, на котором надо лишь считать угол $d\theta_1$ равным α). Тогда $y_k'=y_k\cos\alpha+z_k\sin\alpha$, $z_k'=z_k\cos\alpha-y_k\sin\alpha$ и $J_{y'z'}=\sum m_ky_k'z_k'=\sum m_k(z_k^2-y_k^2)\sin\alpha\cdot\cos\alpha$, так как $\sum m_ky_kz_k=J_{yz}=0$ (ось Oz главная). Пользуясь равенствами (3), легко найти почленным вычитанием, что $J_y-J_z=\sum m_k(z_k^2-y_k^2)$; следовательно, $J_{y'z'}=0{,}5\,(J_y-J_z)\sin 2\alpha$. Но ось Oz' также является главной; поэтому должно быть $J_{y'z'}=0$ или $(J_y-J_z)\sin 2\alpha=0$. Отсюда, если $J_y\neq J_z$, то $\alpha=90°$, что и требовалось доказать. Если же $J_y=J_z$, то любая ось, лежащая в плоскости zOz', будет главной, в том числе и ось, перпендикулярная к Oz.

части уравнений силы будут в общем случае зависеть от времени, координат точек системы и их скоростей (см. § 99 и § 107).

Проектируя равенства (13) на какие-нибудь координатные оси, мы можем получить дифференциальные уравнения движения системы в проекциях на эти оси.

Полное решение основной задачи динамики для системы состояло бы в том, чтобы, зная заданные силы, проинтегрировать соответствующие дифференциальные уравнения и определить таким путем закон движения каждой из точек системы в отдельности.

Однако такой путь решения обычно не применяется по двум причинам. Во-первых, этот путь слишком сложен и почти всегда связан с непреодолимыми математическими трудностями. Во-вторых, в большинстве случаев при решении задач механики бывает достаточно знать некоторые суммарные характеристики движения системы в целом, а не движение каждой из ее точек в отдельности. Эти суммарные характеристики определяются с помощью *общих теорем* динамики системы, к изучению которых мы и перейдем.

Основная роль уравнений (13) состоит в том, что они, или следствия из них, являются исходными для получения соответствующих общих теорем.

§ 135. Теорема о движении центра масс. В ряде случаев для определения характера движения системы (особенно твердого тела), достаточно знать закон движения ее центра масс. Чтобы найти этот закон, обратимся к уравнениям движения системы (13) и сложим почленно их левые и правые части. Тогда получим:

$$\sum m_k \boldsymbol{w}_k = \sum \boldsymbol{F}_k^e + \sum \boldsymbol{F}_k^i. \tag{14}$$

Преобразуем левую часть равенства. Из формулы (1′) для радиуса-вектора центра масс имеем:

$$\sum m_k \boldsymbol{r}_k = M\boldsymbol{r}_C.$$

Беря от обеих частей этого равенства вторую производную по времени и замечая, что производная от суммы равна сумме производных, найдем:

$$\sum m_k \frac{d^2\boldsymbol{r}_k}{dt^2} = M\frac{d^2\boldsymbol{r}_C}{dt^2},$$

или

$$\sum m_k \boldsymbol{w}_k = M\boldsymbol{w}_C, \tag{15}$$

где $\boldsymbol{w}_C$ — ускорение центра масс системы. Так как по свойству внутренних сил системы (§ 129) $\sum \boldsymbol{F}_k^i = 0$, то, подставляя все найденные

значения в равенство (14), получим окончательно:

$$M\boldsymbol{w}_C = \sum \boldsymbol{F}_k^e. \tag{16}$$

Уравнение (16) и выражает теорему о движении центра масс системы: *произведение массы системы на ускорение ее центра масс равно геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил.* Сравнивая уравнение (16) с уравнением движения материальной точки (§ 100, формула (3)), получаем другое выражение теоремы: *центр масс системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему.*

Проектируя обе части равенства (16) на координатные оси, получим:

$$M\frac{d^2x_C}{dt^2} = \sum F_{kx}^e, \quad M\frac{d^2y_C}{dt^2} = \sum F_{ky}^e, \quad M\frac{d^2z_C}{dt^2} = \sum F_{kz}^e. \tag{16'}$$

Эти уравнения представляют собою *дифференциальные уравнения движения центра масс* в проекциях на оси декартовой системы координат.

Значение доказанной теоремы состоит в следующем.

1) Теорема дает обоснование методам динамики точки. Из уравнений (16′) видно, что *решения, которые мы получаем, рассматривая данное тело как материальную точку, определяют закон движения центра масс этого тела,* т. е. имеют вполне конкретный смысл.

В частности, если тело движется поступательно, то его движение полностью определяется движением центра масс. Таким образом, поступательно движущееся тело можно всегда рассматривать как материальную точку с массой, равной массе тела. В остальных случаях тело можно рассматривать как материальную точку лишь тогда, когда практически для определения положения тела достаточно знать положение его центра масс.

2) Теорема позволяет при определении закона движения центра масс любой системы исключать из рассмотрения все наперед неизвестные внутренние силы. В этом состоит ее практическая ценность.

§ 136. Закон сохранения движения центра масс. Из теоремы о движении центра масс можно получить следующие важные следствия.

1) Пусть сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю

$$\sum \boldsymbol{F}_k^e = 0.$$

Тогда из уравнения (16) следует, что $\boldsymbol{w}_C = 0$ или $\boldsymbol{v}_C = \text{const}$.

Следовательно, *если сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то центр масс этой системы движется с постоянной по модулю и направлению скоростью, т. е. равно-*

мерно и прямолинейно. В частности, если вначале центр масс был в покое, то он и останется в покое. Действие внутренних сил, как мы видим, движение центра масс системы изменить не может.

2) Пусть сумма внешних сил, действующих на систему, не равна нулю, но эти силы таковы, что сумма их проекций на какую-нибудь ось (например, ось Ox) равна нулю:

$$\sum F_{kx}^{e}=0.$$

Тогда первое из уравнений (16′) дает:

$$\frac{d^2x_C}{dt^2}=0 \quad \text{или} \quad \frac{dx_C}{dt}=v_{Cx}=\text{const}.$$

Следовательно, *если сумма проекций всех действующих внешних сил на какую-нибудь ось равна нулю, то проекция скорости центра масс системы на эту ось есть величина постоянная.* В частности, если в начальный момент $v_{Cx}=0$, то и в любой последующий момент $v_{Cx}=0$, т. е. центр масс системы в этом случае вдоль оси Ox перемещаться не будет ($x_C=\text{const}$).

Все эти результаты выражают собою *закон сохранения движения центра масс системы.* Рассмотрим некоторые примеры, иллюстрирующие его приложения.

а) Движение центра масс солнечной системы. Так как притяжением звезд можно практически пренебречь, то можно считать, что на солнечную систему никакие внешние силы не действуют. Следовательно, в первом приближении ее центр масс движется в мировом пространстве равномерно и прямолинейно.

б) Действие пары сил на тело (см., например, рис. 42). Если на свободное твердое тело начнет действовать пара сил (**F**, **F**′), то геометрическая сумма этих внешних сил будет равна нулю ($\mathbf{F}+\mathbf{F}'=0$). Следовательно, центр масс C тела, если он вначале был неподвижен, должен остаться неподвижным и при действии пары. Таким образом, где бы к свободному твердому телу ни была приложена пара сил, тело начнет вращаться вокруг своего центра масс (см. § 19).

в) Движение по горизонтальной плоскости. При отсутствии трения человек с помощью своих мускульных усилий (силы внутренние) не мог бы двигаться вдоль горизонтальной плоскости, так как в этом случае сумма проекций на любую горизонтальную ось Ox всех приложенных к человеку внешних сил (сила тяжести и реакция плоскости) будет равна нулю и центр масс человека вдоль плоскости перемещаться не будет ($x_C=\text{const}$).

Если, например, человек вынесет правую ногу вперед, то левая его нога скользнет назад, а общий центр масс останется на месте.

При наличии же трения скольжению левой ноги назад будет препятствовать сила трения, которая в этом случае будет направлена *вперед*. Эта сила и будет той внешней силой, которая позволяет человеку перемещаться в сторону ее действия (в данном случае вперед).

Аналогично происходит движение паровоза или автомобиля. Сила давления пара или газа в двигателе является силой внутренней и сама по себе не может переместить центр масс системы. Движение происходит потому, что двигатель передает соответствующим колесам, называемым ведущими, *вращающий момент*. При этом точка касания B ведущего колеса (рис. 301) стремится скользить влево. Тогда на колесо будет действовать сила трения, направленная вправо. Эта внешняя сила и позволит центру тяжести паровоза или автомобиля двигаться вправо. Когда этой силы нет или когда она недостаточна для преодоления сопротивления, испытываемого ведомыми колесами [1]), движения вправо не будет; ведущие колеса будут при этом вращаться на месте (буксовать).

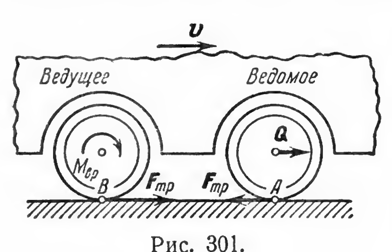


Рис. 301.

г) Торможение. Для торможения к барабану, жестко связанному с катящимся колесом, прижимают тормозную колодку. Возникающая при этом сила трения колодки о барабан будет силой внутренней и сама по себе не изменит движение центра масс, т. е. не затормозит поезд или автомобиль. Однако трение колодки о барабан будет замедлять вращение колеса вокруг его оси и увеличит силу трения колеса о рельс (или грунт), направленную противоположно движению. Эта внешняя сила и будет замедлять движение центра масс поезда или автомобиля, т. е. создавать торможение (см. задачу 148, § 156).

§ 137. Решение задач. Пользуясь теоремой о движении центра масс, можно, зная внешние силы, найти закон движения центра масс, и наоборот, зная движение центра масс, определить главный вектор действующих на систему внешних сил. Первой задачей мы занимались в динамике точки. Примеры решения второй задачи рассмотрим ниже.

---

[1]) На ведомое колесо действует не вращающий момент, а сила Q, приложенная к оси. Под ее действием все колесо, а с ним и точка касания A колеса о грунт стремятся сдвинуться вперед. При этом на колесо будет действовать сила трения, направленная назад. Эта внешняя сила и тормозит движение.

Теорема позволяет при этом исключить из рассмотрения все внутренние силы. Поэтому рассматриваемую систему надо стараться выбирать так, чтобы ряд наперед неизвестных сил сделать *внутренними*.

В случаях, когда имеет место закон сохранения движения центра масс, теорема позволяет по перемещению одной части системы найти перемещение другой ее части.

Мы доказали, что когда $\sum F_{kx}^e = 0$ и в начальный момент $v_{Cx} = 0$, то при движении системы $x_C = \text{const}$. Пусть для определенности система состоит из трех тел с массами m_1, m_2, m_3 и начальными координатами их центров масс x_1, x_2, x_3. Если под действием внутренних (или внешних) сил тела совершат абсолютные перемещения, проекции которых на ось Ox будут ξ_1, ξ_2, ξ_3, то соответствующие координаты станут равны $x_1 + \xi_1$, $x_2 + \xi_2$, $x_3 + \xi_3$. Тогда по формулам (1) координата центра масс x_C всей системы в начальном и конечном положениях будет:

$$x_{C_0} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{M};$$

$$x_{C_1} = \frac{m_1 (x_1 + \xi_1) + m_2 (x_2 + \xi_2) + m_3 (x_3 + \xi_3)}{M}.$$

Так как $x_C = \text{const}$, то $x_{C_0} = x_{C_1}$ и, следовательно,

$$m_1 \xi_1 + m_2 \xi_2 + m_3 \xi_3 = 0 \tag{17}$$

или

$$p_1 \xi_1 + p_2 \xi_2 + p_3 \xi_3 = 0. \tag{17'}$$

Таким образом, когда имеет место закон сохранения движения центра масс вдоль оси Ox, то алгебраическая сумма произведений масс (или весов) тел системы на проекции абсолютных перемещений их центров масс должна быть равна нулю, если только в начальный момент $v_{Cx} = 0$. При вычислении ξ_1, ξ_2, ... следует всегда учитывать их знаки.

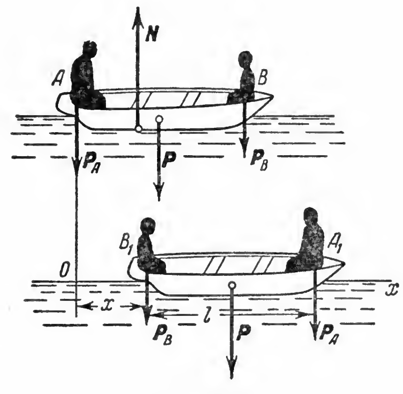


Рис. 302.

Задача 124. На носу и корме лодки весом P сидят на расстоянии l друг от друга два человека весом p_A и p_B каждый (рис. 302). Пренебрегая сопротивлением воды, определить, куда и насколько переместится лодка, если люди поменяются местами.

Решение. Чтобы исключить из рассмотрения неизвестные нам силы трения подошв о дно лодки и мускульные усилия людей, будем рассматривать лодку и людей как одну систему (при этом названные силы станут внутренними). Внешними силами, действующими на систему, будут вертикальные силы $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{p}_A$, $\boldsymbol{p}_B$, $\boldsymbol{N}$. Тогда $\sum F_{kx}^e = 0$ и, так как в начальный момент $v_C = 0$, то $x_{Cx} = \text{const}$. Следовательно, абсолютные перемещения всех тел связаны зависимостью (17).

Изображая лодку и людей в начальном и конечном положениях, мы видим, что перемещение лодки $\xi_л = x$[1]). Далее, для первого человека абсолютное перемещение $\xi_A = x + l$; абсолютное перемещение второго человека равно BB_1, а проекция этого перемещения на ось Ox будет $\xi_B = -(l - x)$. Тогда по уравнению (17′)

$$Px + p_A(x + l) + p_B[-(l - x)] = 0.$$

Отсюда находим, что перемещение лодки

$$x = \frac{p_B - p_A}{P + p_A + p_B} l.$$

Если $p_B > p_A$, то $x > 0$, т. е. лодка смещается вправо; при $p_B < p_A$ смещение лодки произойдет влево. Когда $p_B = p_A$, лодка остается на месте.

Подчеркиваем еще раз важный вывод: *систему, движение которой надо рассмотреть при решении подобных задач, следует выбирать так, чтобы наперед неизвестные силы сделать внутренними.*

Рис. 303.

Задача 125. Центр масс вала мотора смещен от оси вращения на величину $AB = a$. Масса вала равна m_1, а масса всех остальных частей мотора равна m_2. Определить, по какому закону будет двигаться мотор, поставленный на гладкую горизонтальную плоскость, когда вал вращается с постоянной угловой скоростью ω. Найти дополнительно, какое максимальное усилие будет испытывать болт D, если с его помощью неподвижно закрепить мотор.

Решение. Чтобы исключить силы, вращающие вал, сделав их внутренними, рассмотрим весь мотор с валом как одну систему.

1) При незакрепленном моторе все действующие на него силы ($\boldsymbol{P} = m_2\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{p} = m_1\boldsymbol{g}$ и реакции плоскости) будут вертикальными и здесь, как и в предыдущей задаче, будет иметь место закон сохранения движения центра масс вдоль оси Ox. Изображаем мотор в произвольном положении (рис. 303), считая начальным то положение, когда точки B и A лежат на одной вертикали (на оси Oy). Тогда в произвольном положении $\xi_A = x$, $\xi_B = x + a\sin\varphi$. Отсюда, учитывая, что $\varphi = \omega t$, найдем по формуле (17)

$$m_2 x + m_1(x + a\sin\omega t) = 0,$$

откуда

$$x = -\frac{m_1 a}{m_2 + m_1}\sin\omega t.$$

Следовательно, мотор будет совершать гармонические колебания с круговой частотой ω.

---

[1]) Во избежание ошибок в знаках рекомендуется независимо от того, куда фактически происходит смещение, изображать лодку (систему) в смещенном положении так, чтобы координата x была положительной (см. рис. 302). Если после подсчетов значение x получится отрицательным, то это будет означать, что при условиях задачи смещение происходит в другую сторону.

2) Когда мотор закреплен, то по первому из уравнений (16′) горизонтальная реакция R_x болта будет равна

$$R_x = M\frac{d^2x_C}{dt^2}, \quad \text{где} \quad x_C = \frac{m_2x_A + m_1x_B}{M}.$$

В этом случае точка A неподвижна и $x_A = h$ ($h = \text{const}$), а $x_B = h + a\sin\omega t$. В результате, дифференцируя выражение x_C и умножая его на M (M здесь всюду — масса всей системы), находим:

$$R_x = M\frac{d^2x_C}{dt^2} = m_1\frac{d^2x_B}{dt^2} = -m_1a\omega^2\sin\omega t.$$

Сила давления на болт равна по модулю $|R_x|$ и направлена в противоположную сторону. Ее максимальное значение будет $m_1a\omega^2$.

Задача 126. Кривошип AB длиной r и весом p, вращающийся с постоянной угловой скоростью ω, приводит в движение кулису и связанный с нею поршень D, общий вес которых равен P (рис. 304). На поршень при его движении действует постоянная сила Q. Пренебрегая трением о направляющие, найти наибольшее горизонтальное давление на ось A кривошипа.

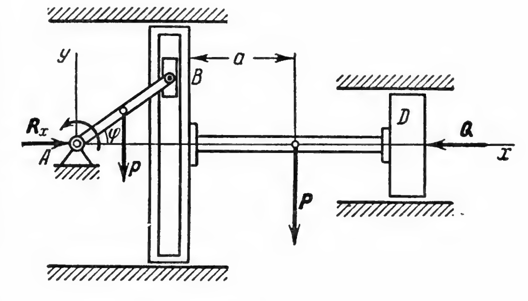


Рис. 304.

Решение. Чтобы исключить силы, вращающие кривошип, и давление на него со стороны кулисы, рассмотрим движение всей системы. Тогда по первому из уравнений (16′), если обозначить горизонтальную реакцию оси A через R_x, будем иметь:

$$M\frac{d^2x_C}{dt^2} = R_x - Q,$$

где согласно формулам (1) $Mx_C = m_1x_1 + m_2x_2$.

В нашем случае

$$m_1 = \frac{p}{g}, \quad x_1 = \frac{r}{2}\cos\omega t; \quad m_2 = \frac{P}{g}, \quad x_2 = a + r\cos\omega t,$$

так как $\varphi = \omega t$. В результате находим:

$$R_x = Q + M\frac{d^2x_C}{dt^2} = Q - \frac{r\omega^2}{g}\left(\frac{p}{2} + P\right)\cos\omega t.$$

Сила давления на ось равна по модулю $|R_x|$ и направлена в противоположную сторону. Давление будет максимальным, когда $\varphi = 180°$ и будет равно $Q + \frac{r\omega^2}{g}\left(\frac{p}{2} + P\right)$.

ГЛАВА XXV

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ

§ 138. Количество движения системы. *Количеством движения системы будем называть векторную величину Q, равную геометрической сумме (главному вектору) количеств движения всех точек системы* (рис. 305):

$$Q = \sum m_k v_k. \tag{18}$$

Из чертежа видно, что независимо от величин скоростей точек системы (если только эти скорости не параллельны) вектор Q может принимать любые значения и даже оказаться равным нулю, когда многоугольник, построенный из векторов $m_k v_k$, замкнется. Следовательно, по величине Q нельзя полностью судить о характере движения системы.

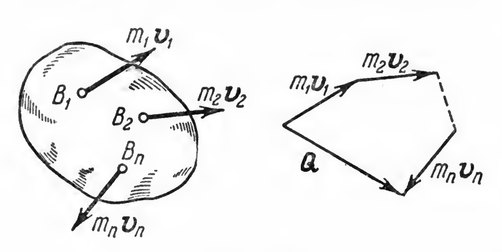


Рис. 305.

Найдем формулу, с помощью которой значительно легче вычислять величину Q, а также уяснить ее смысл. Из равенства (1′) следует, что

$$\sum m_k r_k = M r_C.$$

Беря от обеих частей производную по времени, получим

$$\sum m_k \frac{dr_k}{dt} = M \frac{dr_C}{dt} \quad \text{или} \quad \sum m_k v_k = M v_C.$$

Отсюда находим, что

$$Q = M v_C, \tag{19}$$

т. е. *количество движения системы равно произведению массы всей системы на скорость ее центра масс.* Этим результатом особенно удобно пользоваться при вычислении количеств движения твердых тел.

Из формулы (19) видно, что если тело (или система) движется так, что центр масс остается неподвижным, то количество движения тела равно нулю. Например, количество движения тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, проходящей через его центр масс, будет равно нулю.

Если же движение тела является сложным, то величина Q не будет характеризовать вращательную часть движения вокруг центра масс. Например, для катящегося колеса $Q = M v_C$, независимо от того, как вращается колесо вокруг его центра масс C.

Таким образом, *количество движения характеризует только поступательное движение системы*. При сложном же движении величина $\boldsymbol{Q}$ характеризует только поступательную часть движения системы вместе с центром масс.

§ 139. Теорема об изменении количества движения. Рассмотрим систему, состоящую из n материальных точек. Составим для этой системы дифференциальные уравнения движения (13) и сложим их почленно. Тогда получим:

$$\sum m_k \boldsymbol{w}_k = \sum \boldsymbol{F}_k^e + \sum \boldsymbol{F}_k^i.$$

Последняя сумма по свойству внутренних сил равна нулю. Кроме того,

$$\sum m_k \boldsymbol{w}_k = \frac{d}{dt}\left(\sum m_k \boldsymbol{v}_k\right) = \frac{d\boldsymbol{Q}}{dt}.$$

Окончательно находим:

$$\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} = \sum \boldsymbol{F}_k^e. \qquad (20)$$

Уравнение (20) выражает теорему об изменении количества движения системы в дифференциальной форме: *производная по времени от количества движения системы равна геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил.* В проекциях на координатные оси будем иметь:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e, \quad \frac{dQ_y}{dt} = \sum F_{ky}^e, \quad \frac{dQ_z}{dt} = \sum F_{kz}^e. \qquad (21)$$

Найдем другое выражение теоремы. Пусть в момент $t=0$ количество движения системы равно $\boldsymbol{Q}_0$, а в момент t_1 становится равным $\boldsymbol{Q}_1$. Тогда, умножая обе части равенства (20) на dt и интегрируя, получим:

$$\boldsymbol{Q}_1 - \boldsymbol{Q}_0 = \sum \int_0^{t_1} \boldsymbol{F}_k^e dt$$

или

$$\boldsymbol{Q}_1 - \boldsymbol{Q}_0 = \sum \boldsymbol{S}_k^e, \qquad (22)$$

так как интегралы, стоящие справа, дают импульсы внешних сил.

Уравнение (22) выражает теорему об изменении количества движения системы в интегральной форме: *изменение количества движения системы за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов действующих на систему внешних сил за тот же промежуток времени.*

В проекциях на координатные оси будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} Q_{1x} - Q_{0x} = \sum S_{kx}^e, \qquad Q_{1y} - Q_{0y} = \sum S_{ky}^e, \\ Q_{1z} - Q_{0z} = \sum S_{kz}^e. \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

Укажем на связь между доказанной теоремой и теоремой о движении центра масс. Так как $\boldsymbol{Q}=M\boldsymbol{v}_C$, то, подставляя это значение в равенство (20) и учитывая, что $\frac{d\boldsymbol{v}_C}{dt}=\boldsymbol{w}_C$, мы получим $M\boldsymbol{w}_C=\sum \boldsymbol{F}_k^e$, т. е. уравнение (16).

Следовательно, теорема о движении центра масс и теорема об изменении количества движения системы представляют собой, по существу, две разные формы одной и той же теоремы. В тех случаях, когда изучается движение твердого тела (или системы тел), можно в равной мере пользоваться любой из этих форм, причем уравнением (16) обычно пользоваться удобнее.

Однако для непрерывной среды (жидкость, газ) понятие о центре масс всей системы практически теряет смысл. В этих случаях для решения задач пользуются теоремой об изменении количества движения системы. Важные приложения эта теорема имеет также в теории удара (глава XXIX) и при изучении реактивного движения (§ 142).

Практическая ценность теоремы состоит в том, что она позволяет исключить из рассмотрения наперед неизвестные внутренние силы (например, силы давления друг на друга частиц жидкости).

§ 140. Закон сохранения количества движения. Из теоремы об изменении количества движения системы можно получить следующие важные следствия:

1) Пусть сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю:

$$\sum \boldsymbol{F}_k^e=0.$$

Тогда из уравнения (20) следует, что при этом $\boldsymbol{Q}=\text{const}$. Таким образом, *если сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то вектор количества движения системы будет постоянен по модулю и направлению.*

2) Пусть внешние силы, действующие на систему, таковы, что сумма их проекций на какую-нибудь ось (например Ox) равна нулю:

$$\sum F_{kx}^e=0.$$

Тогда из уравнений (21) следует, что при этом $Q_x=\text{const}$. Таким образом, *если сумма проекций всех действующих внешних сил на какую-нибудь ось равна нулю, то проекция количества движения системы на эту ось есть величина постоянная.*

Эти результаты и выражают *закон сохранения количества движения системы.* Из них следует, что внутренние силы изменить суммарное количество движения системы не могут. Рассмотрим некоторые примеры.

а) Явление отдачи или отката. Если рассматривать винтовку и пулю как одну систему, то давление пороховых газов при выстреле будет силой внутренней. Эта сила не может изменить суммарное количество движения системы. Но так как пороховые газы, действуя на пулю, сообщают ей некоторое количество движения, направленное вперед, то они одновременно должны сообщить винтовке такое же количество движения в обратном направлении. Это вызовет движение винтовки назад, т. е. так называемую отдачу. Аналогичное явление получается при стрельбе из орудия (откат).

б) Работа гребного винта (пропеллера). Винт сообщает некоторой массе воздуха (или воды) движение вдоль оси винта, отбрасывая эту массу назад. Если рассматривать отбрасываемую массу и самолет (или судно) как одну систему, то силы взаимодействия винта и среды как внутренние не могут изменить суммарное количество движения этой системы. Поэтому при отбрасывании массы воздуха (воды) назад самолет (или судно) получает соответствующую скорость движения вперед, такую, что общее количество движения рассматриваемой системы останется равным нулю, так как оно было нулем до начала движения.

Аналогичный эффект достигается действием весел или гребных колес.

в) Реактивное движение. В реактивном снаряде (ракете) газообразные продукты горения топлива с большой скоростью выбрасываются из отверстия в хвостовой части ракеты (из сопла реактивного двигателя). Действующие при этом силы давления будут силами внутренними, и они не могут изменить суммарное количество движения системы ракета — продукты горения топлива. Но так как вырывающиеся газы имеют известное количество движения, направленное назад, то ракета получает при этом соответствующую скорость движения вперед. Величина этой скорости будет определена в § 142.

Обращаем внимание на то, что винтовой двигатель (предыдущий пример) сообщает объекту, например самолету, движение за счет отбрасывания назад частиц той среды, в которой он движется. В безвоздушном пространстве такое движение невозможно. Реактивный же двигатель сообщает движение за счет отброса назад масс, вырабатываемых в самом двигателе (продукты горения). Движение это в равной мере возможно и в воздухе, и в безвоздушном пространстве.

§ 141. Решение задач. Теоремой об изменении количества движения обычно пользуются для изучения движения среды (жидкости, газа).

Применение теоремы позволяет исключить из рассмотрения все внутренние силы. Поэтому рассматриваемую систему надо стараться выбирать так, чтобы все (или часть) заранее неизвестных сил сделать внутренними.

Закон сохранения количества движения удобно применять в тех случаях, когда по изменению поступательной скорости одной части системы надо определить скорость другой части. В частности, этот закон широко используется в теории удара.

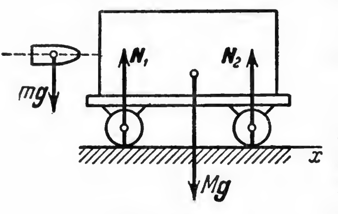


Рис. 306.

Задача 127. Пуля массы m, летящая горизонтально со скоростью u, попадает в установленный на тележке ящик с песком (рис. 306). С какой скоростью начнет двигаться тележка после удара, если масса тележки вместе с ящиком равна M?

Решение. Будем рассматривать пулю и тележку как одну систему. Это позволит при решении задачи исключить силы, которые возникают при ударе пули о ящик. Сумма проекций приложенных к системе внешних сил на горизонтальную ось Ox равна нулю. Следовательно, $Q_x = \text{const}$ или $Q_{0x} = Q_{1x}$, где Q_0 — количество движения системы до удара, Q_1 — после удара. Так как до удара тележка неподвижна, то $Q_{0x} = mu$.

После удара тележка и пуля движутся с общей скоростью, которую мы обозначим через v. Тогда

$$Q_{1x} = (m + M)\, v.$$

Приравнивая правые части выражений Q_{0x} и Q_{1x}, найдем:

$$v = \frac{m}{m + M}\, u.$$

Задача 128. Определить скорость свободного отката орудия, если вес откатывающихся частей равен P, вес снаряда p, а скорость снаряда по отношению к каналу ствола равна в момент вылета u.

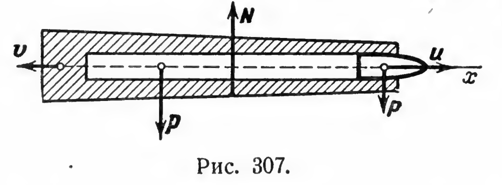


Рис. 307.

Решение. Для исключения неизвестных сил давления пороховых газов рассмотрим снаряд и откатывающиеся части как одну систему.

Пренебрегая за время движения снаряда в канале ствола сопротивлением откату и силами P и N, которые очень малы по сравнению с силами давления пороховых газов, вызывающих откат, найдем, что сумма приложенных к системе внешних сил равна нулю (рис. 307; откатывающиеся вместе со стволом части на нем не показаны). Тогда $\boldsymbol{Q} = \text{const}$ и $Q_x = \text{const}$, а так как до выстрела система неподвижна ($Q_0 = 0$), то и в любой момент времени $Q_x = 0$.

Обозначим скорость откатывающихся частей в конечный момент через $\boldsymbol{v}$. Тогда абсолютная скорость снаряда в этот момент равна $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$. Следовательно,

$$Q_x = \frac{P}{g}\, v_x + \frac{p}{g}\,(u_x + v_x) = 0. \qquad \text{(a)}$$

Отсюда находим:

$$v_x = -\frac{p}{p + P}\, u_x.$$

Если бы была известна абсолютная скорость вылета снаряда u_a, то в равенство (а) вместо $u_x + v_x$ вошла бы сразу величина u_{ax}, откуда

$$v_x = -\frac{p}{P} u_{ax}.$$

Знак минус в обоих случаях указывает, что направление v противоположно u.

Подчеркиваем, что при вычислении полного количества движения системы надо учитывать *абсолютные* скорости движения ее частей.

Задача 129. Давление струи. Струя воды вытекает из брандспойта со скоростью $u = 10$ *м/сек* и ударяет под прямым углом о твердую стенку (рис. 308). Диаметр вытекающей струи $d = 4$ *см*. Пренебрегая сжатием струи, определить силу давления ее на стенку.

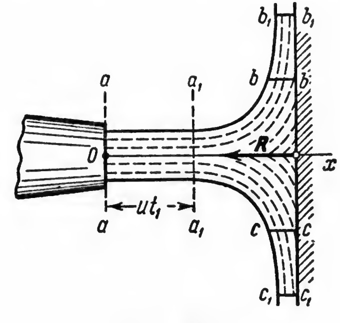


Рис. 308.

Решение. Чтобы исключить из рассмотрения внутренние силы давления частиц жидкости друг на друга при ударе их о стенку, применим первое из уравнений (23)

$$Q_{1x} - Q_{0x} = \sum S_{kx}^e \qquad \text{(a)}$$

к части струи, заключенной в данный момент в объеме *abc*. Вычислим для выделенного объема разность $Q_{1x} - Q_{0x}$ за некоторый промежуток времени t_1. За время t_1 этот объем перемещается в положение $a_1b_1c_1$. При этом значение Q_x уменьшается на величину mu, где m — масса объема aa_1. Жидкость же, притекающая в объемы bb_1 и cc_1, движется перпендикулярно оси Ox и величину Q_x не увеличит. Так как мы имеем только уменьшение Q_x, то

$$Q_{1x} - Q_{0x} = -mu.$$

Внешней силой, действующей на выделенный объем и дающей проекцию на ось x, будет только реакция стенки R. Считая величину R постоянной, получим:

$$\sum S_{kx}^e = R_x t_1 = -Rt_1.$$

В результате уравнение (а) дает:

$$mu = Rt_1. \qquad \text{(б)}$$

Вычислим величину m. Так как перемещение $aa_1 = ut_1$, то

$$m = \rho \frac{\pi d^2}{4} ut_1,$$

где ρ — масса единицы объема, т. е. плотность жидкости. Подставляя это значение в равенство (б) и учитывая, что для воды $\rho = 1000$ *кг/м*^{3}, найдем окончательно:

$$R = \rho \frac{\pi d^2}{4} u^2 = 125{,}6 \text{ н} \approx 12{,}8 \text{ кГ}.$$

Сила давления струи на стенку равна этой же величине.

§ 142*. Тело переменной массы. Движение ракеты. В классической механике масса каждой точки или частицы системы считается при движении величиной постоянной. Однако в некоторых случаях состав частиц, образующих данную систему или тело, может с течением времени изменяться (отдельные частицы могут отделяться от тела или присоединяться к нему извне); вследствие этого будет изменяться и суммарная масса рассматриваемого тела. Задачи, в которых имеет место подобное присоединение или отделение единичных масс, нам уже встречались (см. выше задачи 127, 128 или задачу 94 в § 103). В этом параграфе будет рассмотрен другой практически важный случай, когда процесс отделения от тела или присоединения к нему частиц происходит непрерывно. Тело, масса M которого непрерывно изменяется с течением времени вследствие присоединения к нему или отделения от него материальных частиц, будем называть *телом переменной массы* [1]). Для тела переменной массы

$$M = F(t),$$

где $F(t)$ — непрерывная функция времени.

Примерами подобных тел являются ракета или реактивный самолет, масса которых практически непрерывно убывает вследствие расхода топлива.

Если при движении тела переменной массы его размерами по сравнению с проходимыми расстояниями можно пренебречь, то данное тело можно рассматривать как материальную точку переменной массы.

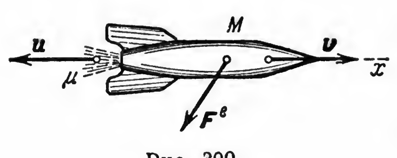


Рис. 309.

Найдем уравнение движения ракеты, масса которой непрерывно убывает, рассматривая ее, в указанном выше смысле, как точку переменной массы. Обозначим *относительную* (по отношению к корпусу ракеты) *скорость истечения продуктов горения* из ракеты через $\boldsymbol{u}$. Чтобы исключить силы давления, выталкивающие продукты горения, сделав их внутренними, рассмотрим в некоторый момент времени t систему, состоящую из самой ракеты и частицы, отделяющейся от нее в течение промежутка времени dt (рис. 309). Масса μ этой частицы численно равна величине dM, на которую за время dt изменяется масса ракеты. Так как M — величина убывающая, то $dM < 0$ и, следовательно, $\mu = |dM| = -dM$.

Уравнение (20) для рассматриваемой системы можно представить в виде

$$d\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{F}^e dt, \tag{24}$$

[1]) Переменность массы понимается здесь совершенно в ином смысле, чем в механике теории относительности, и является, как было указано, следствием изменения состава частиц, образующих рассматриваемое тело.

где $\boldsymbol{F}^e$ — геометрическая сумма приложенных к ракете внешних сил.

Если скорость $\boldsymbol{v}$ ракеты за время dt изменяется на величину $d\boldsymbol{v}$, то количество движения рассматриваемой системы получает при этом приращение $M\,d\boldsymbol{v}$. Отделяющаяся частица приобретает за то же время дополнительную (по отношению к ранее имевшейся) скорость $\boldsymbol{u}$, где $\boldsymbol{u}$, как было указано, — относительная скорость истечения продуктов горения топлива. В результате этого количество движения системы возрастет на величину $\boldsymbol{u}\mu = -\boldsymbol{u}\,dM$. Следовательно, $d\boldsymbol{Q} = M\,d\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\,dM$. Подставляя это значение в равенство (24) и деля обе его части на dt, получим:

$$M\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F}^e + \boldsymbol{u}\frac{dM}{dt}. \tag{25}$$

Уравнение (25) представляет собою в векторной форме *дифференциальное уравнение движения точки переменной массы* или *уравнение Мещерского*[1].

Учитывая, что последнее слагаемое в правой части (25) по размерности также является силой, и обозначая его через $\boldsymbol{\Phi}$, мы можем уравнение (25) представить еще в виде

$$M\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F}^e + \boldsymbol{\Phi}. \tag{26}$$

Таким образом, реактивный эффект сводится к тому, что на ракету при ее движении дополнительно действует сила $\boldsymbol{\Phi}$, называемая *реактивной силой*.

Величина $\frac{dM}{dt}$ численно равна массе топлива, расходуемого за единицу времени, т. е. секундному расходу топлива $G_{\text{сек}}$.

Таким образом, если учесть знак, то

$$\frac{dM}{dt} = -G_{\text{сек}}.$$

Отсюда следует, что

$$\boldsymbol{\Phi} = -\boldsymbol{u}G_{\text{сек}}, \tag{27}$$

т. е. *реактивная сила равна произведению секундного расхода массы топлива на относительную скорость истечения продуктов его сгорания и направлена противоположно этой скорости.*

Примечание. Полученные результаты были бы строго справедливы, если отделяющиеся частицы не оказывали бы никакого взаимного действия друг на друга (например, являлись бы последовательно отбрасываемыми дробинками). Фактически же у ракеты продукты горения топлива выбрасы-

[1]) Мещерский И. В. (1859—1935) — выдающийся русский ученый-механик. Уравнение (25) дано в работе 1897 г. См. Мещерский И. В., Работы по механике тел переменной массы, изд. 2-е, Гостехиздат, 1952.

ваются в виде непрерывной газовой струи, частицы которой оказывают взаимное давление друг на друга. Поэтому при полете в атмосфере на ракету будут дополнительно действовать направленная в сторону движения сила $p_г\sigma$ и направленная против движения сила $p_а\sigma$, где σ — площадь выходного сечения сопла двигателя, $p_г$ — давление газа в этом сечении, $p_а$ — атмосферное давление. Так как $p_г > p_а$, то реактивная сила будет больше определяемой формулой (27) на величину $(p_г - p_а)\sigma$ (при полете в безвоздушном пространстве $p_а = 0$). Это обстоятельство учитывается введением вместо u некоторой эффективной скорости u_e, большей чем u (например, при $u = 1900$ *м/сек* $u_e = 2200$ *м/сек*).

Найдем, как происходит движение ракеты под действием только одной реактивной силы, считая $F^e = 0$, а относительную скорость истечения u постоянной. Направим координатную ось x в сторону движения (см. рис. 309). Тогда $v_x = v$, $u_x = -u$ и уравнение (25) в проекции на ось x, если в нем положить $F^e = 0$, примет вид

$$M\frac{dv}{dt} = -u\frac{dM}{dt} \quad \text{или} \quad dv = -u\frac{dM}{M}.$$

Интегрируя это уравнение и считая, что в начальный момент масса $M = M_0$, а скорость $v = v_0$ и направлена вдоль оси Ox, получим

$$v = v_0 + u\ln\frac{M_0}{M}. \tag{28}$$

Обозначим массу корпуса ракеты со всем оборудованием через $M_к$, а всю массу топлива через $M_т$. Тогда, очевидно, $M_0 = M_к + M_т$, а масса ракеты, когда все топливо будет израсходовано, будет равна $M_к$. Подставляя эти значения в равенство (28), получим *формулу Циолковского*[1]), определяющую скорость ракеты, когда все ее топливо будет израсходовано (скорость в конце так называемого *активного участка*):

$$v_1 = v_0 + u\ln\left(1 + \frac{M_т}{M_к}\right). \tag{29}$$

Строго этот результат справедлив в безвоздушном пространстве и вне поля сил. Из формулы (29) видно, что предельная скорость ракеты зависит: 1) от ее начальной скорости v_0; 2) от относительной скорости истечения (вылета) продуктов горения u; 3) от относительного запаса топлива $M_т/M_к$ (число Циолковского). Очень интересен тот факт, что *от режима работы ракетного двигателя, т. е. от того, насколько быстро или медленно сжигается все топливо, скорость ракеты в конце периода горения не зависит*. Для наглядности зависимость v_1/u от $M_т/M_к$ (при $v_0 = 0$) дана в таблице 1.

---

[1]) Циолковский К. Э. (1857—1935) — выдающийся русский ученый и изобретатель. Работа, в которой дана формула (29), была опубликована в мае 1903 г. в журнале «Научное обозрение».

Важное практическое значение формулы Циолковского состоит в том, что она указывает возможные пути получения больших скоростей, необходимых для космических полетов. Этими путями являются увеличение $M_т/M_к$, u и v_0, причем путь увеличения u и v_0 более эффективен. Увеличение u и $M_т/M_к$ связано с видом топлива и конструкцией ракеты (у крупных ракет с жидким топливом $M_т/M_к = 3 \div 4$, $u = 2000 \div 2500$ *м/сек*). Увеличение v_0 возможно путем использования составной (многоступенчатой) ракеты, части (ступени) которой по мере израсходования содержащегося в них топлива автоматически отделяются от последней ступени, получающей в результате дополнительную (начальную) скорость.

Таблица 1

$M_т/M_к$	v_1/u
1	0,69
2	1,10
3	1,39
4	1,61
5	1,79
10	2,40
20	3,00

Подобная многоступенчатая ракета была применена для запуска первых в мире советских искусственных спутников Земли (4 октября и 3 ноября 1957 г.), а также при многочисленных пусках других космических объектов, в том числе кораблей, на которых совершили свои выдающиеся полеты советские космонавты.

ГЛАВА XXVI

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ

§ 143. Главный момент количеств движения системы. Понятие о моменте количества движения для одной материальной точки было введено в § 116. *Главным моментом количеств движения* (или *кинетическим моментом*) *системы относительно данного центра O называется величина K_O, равная геометрической сумме моментов количеств движения всех точек системы относительно этого центра*[1]):

$$K_O = \sum m_O(m_k v_k). \tag{30}$$

Аналогично определяются моменты количеств движения системы относительно координатных осей:

$$K_x = \sum m_x(m_k v_k), \quad K_y = \sum m_y(m_k v_k), \quad K_z = \sum m_z(m_k v_k). \tag{31}$$

[1]) Чаще для краткости величину K_O мы будем называть кинетическим моментом или просто моментом количеств движения системы.

При этом по теореме, доказанной в § 44, K_x, K_y, K_z представляют собою одновременно проекции вектора $\boldsymbol{K}_O$ на координатные оси.

Подобно тому, как количество движения системы является характеристикой ее поступательного движения (см. § 138), *главный момент количеств движения системы является характеристикой вращательного движения системы.*

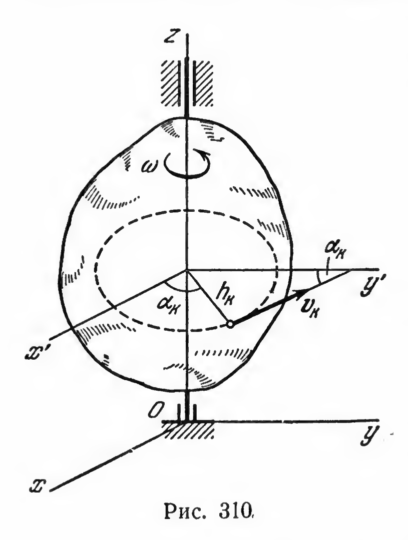


Рис. 310.

Чтобы уяснить механический смысл величины $\boldsymbol{K}_O$ и иметь необходимые формулы для решения задач, вычислим кинетический момент тела, вращающегося вокруг неподвижной оси (рис. 310). При этом, как обычно, определение вектора $\boldsymbol{K}_O$ сводится к определению его проекций K_x, K_y, K_z.

Найдем сначала наиболее важную для приложений формулу, определяющую величину K_z, т. е. кинетический момент вращающегося тела относительно оси вращения.

Для любой точки тела, отстоящей от оси вращения на расстоянии h_k, скорость $v_k = \omega h_k$. Следовательно, для этой точки $m_z(m_k\boldsymbol{v}_k) = m_k v_k h_k = m_k \omega h_k^2$. Тогда для всего тела, вынося общий множитель ω за скобку, получим

$$K_z = \sum m_z(m_k\boldsymbol{v}_k) = \left(\sum m_k h_k^2\right)\omega.$$

Величина, стоящая в скобке, представляет собою момент инерции тела относительно оси z (§ 131). Окончательно находим

$$K_z = J_z\omega. \tag{32}$$

Таким образом, *кинетический момент вращающегося тела относительно оси вращения равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на угловую скорость тела.*

Если система состоит из нескольких тел, вращающихся вокруг одной и той же оси, то, очевидно, будет

$$K_z = J_{1z}\omega_1 + J_{2z}\omega_2 + \ldots + J_{nz}\omega_n. \tag{33}$$

Легко видеть аналогию между формулами (19) и (32): количество движения равно произведению массы (величина, характеризующая инертность тела при поступательном движении) на скорость; кинетический момент равен произведению момента инерции (величина, ха-

рактеризующая инертность тела при вращательном движении) на угловую скорость.

Вычислим теперь величины K_x и K_y. Для определения $m_x(m_k v_k)$ надо, как и при нахождении момента силы, спроектировать вектор $m_k v_k$ на плоскость Oyz, т. е. на ось y', и взять момент этой проекции относительно точки O (см. § 43). Получим $m_x(m_k v_k) = -(m_k v_k \cos\alpha_k) z_k$. Но $v_k \cos\alpha_k = \omega h_k \cos\alpha_k = \omega x_k$, так как из рис. 310 видно, что $h_k \cos\alpha_k = x_k$. В результате, вынося общий множитель ω за скобку, найдем, что

$$K_x = \sum m_x(m_k v_k) = -\left(\sum m_k x_k z_k\right)\omega.$$

Сумма, стоящая в скобке, представляет собою центробежный момент инерции J_{xz} (§ 133). Аналогичное выражение получится для K_y, но только всюду вместо x_k войдет y_k. Окончательно будем иметь

$$K_x = -J_{xz}\omega, \quad K_y = -J_{yz}\omega. \tag{34}$$

Таким образом, кинетический момент вращающегося тела относительно центра O, лежащего на оси вращения Oz, представляет собою вектор K_O, проекции которого на оси $Oxyz$ определяются формулами (32) и (34). В общем случае, как видим, вектор K_O не направлен по оси вращения Oz. Но если ось вращения Oz будет для точки O главной осью инерции тела (в частности, осью симметрии), то $J_{xz} = J_{yz} = 0$. При этом $K_x = K_y = 0$ и $K_O = K_z$. Следовательно, *если тело вращается вокруг оси, являющейся для точки O главной осью инерции тела (или вокруг оси симметрии тела), то вектор K_O направлен вдоль оси вращения и численно равен K_z*, т. е. $J_z\omega$.

§ 144. Теорема об изменении главного момента количеств движения системы (теорема моментов). Теорема моментов, доказанная для одной материальной точки (§ 116), будет справедлива для каждой из точек системы. Следовательно, если рассмотреть точку системы с массой m_k, имеющую скорость v_k, то для нее будет

$$\frac{d}{dt}[m_O(m_k v_k)] = m_O(F_k^e) + m_O(F_k^i),$$

где F_k^e и F_k^i — равнодействующие всех внешних и внутренних сил, действующих на данную точку.

Составляя такие уравнения для всех точек системы и складывая их почленно, получим:

$$\frac{d}{dt}\left[\sum m_O(m_k v_k)\right] = \sum m_O(F_k^e) + \sum m_O(F_k^i).$$

Но последняя сумма по свойству внутренних сил системы (§ 129) равна нулю. Тогда, учитывая равенство (30), найдем окончательно:

$$\frac{dK_O}{dt} = \sum m_O(F_k^e). \tag{35}$$

Полученное уравнение выражает следующую теорему моментов для системы: *производная по времени от главного*

момента количеств движения системы относительно некоторого неподвижного центра, равна сумме моментов всех внешних сил системы относительно того же центра.

Проектируя обе части равенства (35) на неподвижные оси $Oxyz$ и принимая во внимание теорему, доказанную в § 44, получим:

$$\frac{dK_x}{dt}=\sum m_x(F_k^e),\quad \frac{dK_y}{dt}=\sum m_y(F_k^e),\quad \frac{dK_z}{dt}=\sum m_z(F_k^e). \qquad (36)$$

Уравнения (36) выражают теорему моментов относительно любой неподвижной оси.

Доказанной теоремой широко пользуются при изучении вращательного движения тела, а также в теории гироскопа и в теории удара. Но значение теоремы этим не ограничивается. В кинематике было показано, что движение твердого тела в общем случае слагается из поступательного движения вместе с некоторым полюсом и вращательного движения вокруг этого полюса. Если за полюс выбрать центр масс, то поступательная часть движения тела может быть изучена с помощью теоремы о движении центра масс, а вращательная — с помощью теоремы моментов. Это показывает важность теоремы для изучения движения свободного тела (летящий самолет, снаряд, ракета; см. § 158) и, в частности, для изучения плоскопараллельного движения (§ 156).

Практическая ценность теоремы моментов состоит еще в том, что она, аналогично теореме об изменении количества движения, позволяет при изучении вращательного движения системы исключать из рассмотрения все наперед неизвестные внутренние силы.

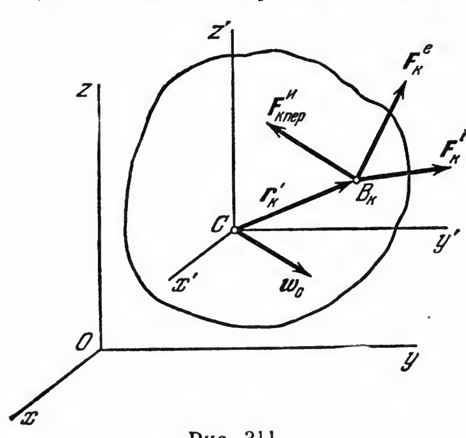


Рис. 311.

Теорема моментов относительно центра масс*. Чтобы применять теорему моментов к изучению плоскопараллельного движения или движения свободного твердого тела, надо найти выражение этой теоремы для движения системы относительно центра масс. Пусть $Oxyz$ — неподвижные оси, по отношению к которым движется рассматриваемая механическая система, а $Cx'y'z'$ — оси, перемещающиеся поступательно вместе с центром масс C этой системы (рис. 311); при этом оси $Cx'y'z'$ имеют ускорение w_C, равное ускорению центра масс. В § 120 было пока-

зано, что все уравнения динамики можно составлять в осях $Cx'y'z'$ так же, как в неподвижных, если к действующим на каждую из точек системы силам F_k^e и F_k^i прибавить переносную силу инерции $F_{k\,\text{пер}}^{\text{и}}$ (кориолисовы силы инерции в данном случае равны нулю, так как оси $Cx'y'z'$ движутся поступательно). Следовательно, уравнение (35) в осях $Cx'y'z'$ примет вид

$$\frac{dK_C}{dt}=\sum m_C(F_k^e)+\sum m_C(F_{k\,\text{пер}}^{\text{и}}), \tag{37}$$

поскольку сумма моментов внутренних сил относительно любого центра равна нулю. При этом величина K_C вычисляется по формуле

$$K_C=\sum m_C(m_k v_k'), \tag{38}$$

где v_k' — скорости точек системы по отношению к осям $Cx'y'z'$.

Найдем значение последней суммы в равенстве (37). По определению, $F_{k\,\text{пер}}^{\text{и}}=-m_k w_{k\,\text{пер}}$. Так как оси $Cx'y'z'$ движутся поступательно, то для любой из точек B_k системы $w_{k\,\text{пер}}=w_C$; следовательно, $F_{k\,\text{пер}}^{\text{и}}=-m_k w_C$ и используя формулу (49) из § 42, будем иметь $m_C(F_{k\,\text{пер}}^{\text{и}})=r_k'\times(-m_k w_C)=-m_k r_k'\times w_C$. Тогда, вынося общий множитель w_C за скобку и учитывая, что по формуле (1') $\sum m_k r_k'=Mr_C'$, получим

$$\sum m_C(F_{k\,\text{пер}}^{\text{и}})=-\left(\sum m_k r_k'\right)\times w_C=-Mr_C'\times w_C. \tag{39}$$

Но поскольку точка C является в системе осей $Cx'y'z'$ началом координат, то $r_C'=0$ и выражение (39) обращается в нуль. В результате равенство (37) дает

$$\frac{dK_C}{dt}=\sum m_C(F_k^e). \tag{40}$$

Сравнивая этот результат с уравнением (35), приходим к выводу, что *для осей, движущихся поступательно вместе с центром масс системы, теорема моментов относительно центра масс сохраняет тот же вид, что и относительно неподвижного центра.* Точно так же для моментов относительно осей $Cx'y'z'$ из (40) получаются уравнения, аналогичные уравнениям (36).

Заметим, что в любой другой подвижной системе отсчета будет или $r_C'\neq 0$ или не будут равны нулю кориолисовы силы инерции и уравнение моментов не будет иметь вид, совпадающий с (35).

§ 145. Закон сохранения главного момента количеств движения. Из теоремы моментов можно получить следующие важные следствия.

1) Пусть сумма моментов относительно центра O всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю:

$$\sum m_O(F_k^e) = 0.$$

Тогда из уравнения (35) следует, что при этом $K_O = \text{const}$. Таким образом, *если сумма моментов относительно данного центра всех приложенных к системе внешних сил равна нулю, то главный момент количеств движения системы относительно этого центра будет численно и по направлению постоянен.* Приложение этого результата к случаю движения планеты было рассмотрено в § 117.

2) Пусть внешние силы, действующие на систему, таковы, что сумма их моментов относительно некоторой неподвижной оси Oz равна нулю:

$$\sum m_z(F_k^e) = 0.$$

Тогда из уравнений (36) следует, что при этом $K_z = \text{const}$. Таким образом, *если сумма моментов всех действующих на систему внешних сил относительно какой-нибудь оси равна нулю, то главный момент количеств движения системы относительно этой оси будет величиной постоянной.*

Эти результаты выражают собою *закон сохранения главного момента количеств движения системы.* Из них следует, что внутренние силы изменить главный момент количеств движения системы не могут.

Случай вращающейся системы. Рассмотрим систему, вращающуюся вокруг неподвижной (или проходящей через центр масс) оси Oz. Тогда, по формуле (32), $K_z = J_z\omega$. Если в этом случае $\sum m_z(F_k^e) = 0$, то

$$J_z\omega = \text{const}.$$

Отсюда приходим к следующим выводам.

а) Если система *неизменяема* (абсолютно твердое тело), то $J_z = \text{const}$ и, следовательно, $\omega = \text{const}$, т. е. твердое тело, закрепленное на оси, вращается в этом случае с постоянной угловой скоростью.

б) Если система *изменяема,* то под действием внутренних (или внешних) сил отдельные ее точки могут удаляться от оси, что вызывает увеличение J_z, или приближаться к оси, что приведет к уменьшению J_z. Но поскольку $J_z\omega = \text{const}$, то при увеличении момента инерции угловая скорость системы будет уменьшаться, а при уменьшении момента инерции — увеличиваться. Таким образом, действием внутренних сил можно изменить угловую скорость вращения системы, так как постоянство K_z не означает вообще постоянства ω.

Рассмотрим некоторые примеры.

а) Опыты с платформой Жуковского. Для демонстрации закона сохранения момента количеств движения удобно пользоваться простым прибором, называемым «платформой Жуковского». Это — круглая горизонтальная платформа на шариковых опорных подшипниках, которая может с малым трением вращаться вокруг вертикальной оси z. Для человека, стоящего на такой платформе,

$$\sum m_z(F_k^e) = 0$$

и, следовательно, $J_z\omega = \text{const}$. Если человек, разведя руки в стороны, сообщит себе толчком вращение вокруг вертикальной оси, а затем опустит руки, то величина J_z уменьшится и, следовательно, угловая скорость вращения возрастет. Таким способом увеличения угловой скорости вращения широко пользуются в балете, при прыжках в воздухе (сальто) и т. п.

Далее, человек, стоящий на платформе неподвижно ($K_z = 0$), может повернуться в любую сторону, вращая вытянутую горизонтально руку в противоположном направлении. Угловая скорость вращения человека при этом будет такой, чтобы в сумме величина K_z системы осталась равной нулю.

б) Раскачивание качелей. Давлением ног (сила внутренняя) человек, стоящий на качелях, раскачать их не может. Сделать это можно следующим образом. Когда качели находятся в левом верхнем положении A_0, человек приседает. При прохождении через вертикаль он быстро выпрямляется. Тогда массы приближаются к оси вращения z, величина J_z уменьшается и угловая скорость ω скачком возрастает. Это увеличение ω приводит в конечном счете к тому, что качели поднимутся выше начального уровня A_0. В правом верхнем положении, когда $\omega = 0$, человек опять приседает (на величине ω это, очевидно, не скажется); при прохождении через вертикаль он снова выпрямляется и т. д. В результате размахи качелей будут возрастать.

Происходящие при этом вынужденные колебания качелей называются *параметрическими*, так как они совершаются не под действием периодически меняющейся силы (§ 125), а вследствие периодического изменения параметров системы: ее момента инерции и положения центра тяжести.

в) Вращение снаряда в канале ствола. Если рассматривать ствол и снаряд как одну систему, то силы давления пороховых газов при выстреле будут внутренними и не могут изменить величины момента количеств движения системы, который до выстрела был равен нулю. Следовательно, если при выстреле снаряд, благодаря наличию нарезов, начнет вращаться, например, вправо, то весь ствол при этом будет стремиться вращаться влево так, чтобы в каждый момент времени было $J_{\text{сн}}\omega_{\text{сн}} = J_{\text{ств}}\omega_{\text{ств}}$. Этому вращению препятствуют цапфы, которыми ствол укреплен в лафете. В результате появляется дополнительное давление на цапфы.

г) Реактивный момент винта. Воздушный винт, установленный на вертолете, не только отбрасывает воздух вниз (см. § 140, пример «б»), но и сообщает отбрасываемой массе вращение. Суммарный момент количеств движения отбрасываемой массы воздуха и вертолета должен при этом остаться равным нулю, так как система вначале была неподвижна, а силы взаимодействия между винтом и средой внутренние. Поэтому вертолет начинает вращаться в сторону, противоположную направлению вращения винта. Действующий при этом на вертолет вращающий момент называют *реактивным моментом*.

Чтобы предотвратить реактивное вращение корпуса одновинтового вертолета, на его хвостовой части устанавливают соответствующий рулевой винт. У многовинтового вертолета винты делают вращающимися в разные стороны.

Появление реактивного момента можно использовать для экспериментального определения вращающего момента авиационного двигателя, так как эти моменты равны друг другу по модулю, а реактивный момент можно измерить, установив двигатель с вращающимся винтом на соответствующих весах.

§ 146. Решение задач. Теоремой моментов пользуются для изучения вращательного движения тел (§§ 154, 158) или для изучения движения систем, включающих вращающиеся и поступательно движущиеся тела (задача 133).

Закон сохранения момента количеств движения позволяет по величине или скорости перемещения одной части системы определить изменение угловой скорости (или угол поворота) другой ее части. При этом из рассмотрения исключаются все наперед неизвестные внутренние силы, а также внешние силы, пересекающие ось вращения или ей параллельные.

Задача 130. Два диска насажены на общий вал (рис. 312). В некоторый момент вал слегка закручивают и предоставляют самому себе. Пренебрегая массой вала, определить зависимость между угловыми скоростями и углами поворотов дисков при их крутильных колебаниях, если моменты инерции дисков J_1 и J_2 относительно оси x известны.

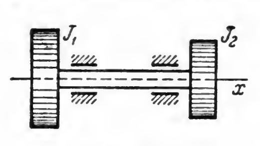


Рис. 312.

Решение. Чтобы исключить неизвестные нам упругие силы, вызывающие колебания дисков, рассмотрим оба диска и вал как одну систему. Действующие на эту систему внешние силы (реакции подшипников и сила тяжести) пересекают ось x; поэтому $\sum m_x(F_k^e)=0$ и $K_x=\text{const}$. Но так как в начальный момент $K_x=0$, то и во все время колебаний должно быть $K_x=J_1\omega_1+J_2\omega_2=0$ (момент количества движения системы относительно оси x равен сумме моментов количеств движения каждого из дисков относительно той же оси). Отсюда

$$\omega_1=-\frac{J_2}{J_1}\omega_2 \text{ и } \varphi_1=-\frac{J_2}{J_1}\varphi_2,$$

где φ_1 и φ_2 — углы закручивания дисков, отсчитываемые от начального положения (последний результат получается интегрированием первого равенства).

Таким образом, колебания будут происходить в противоположные стороны, а угловые амплитуды колебаний будут обратно пропорциональны моментам инерций дисков. Неподвижное сечение будет ближе к диску, момент инерции которого больше.

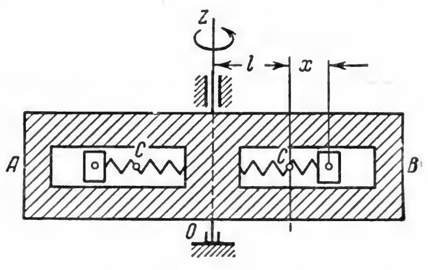


Рис. 313.

Задача 131. В регуляторе AB, имеющем вертикальную ось вращения Oz (величина J_z регулятора известна), помещены два симметрично расположенных груза массы m каждый, прикрепленных к пружинам (рис. 313). В момент $t_0 = 0$ угловая скорость регулятора получает значение ω_0, а каждый из грузов при этом начинает совершать одинаковые затухающие колебания около центра C (расстояние центра C от оси Oz равно l). Пренебрегая трением в оси и считая грузы материальными точками, найти, как будет изменяться угловая скорость ω регулятора в зависимости от положений грузов.

Решение. Чтобы исключить неизвестные нам упругие силы пружин, рассмотрим регулятор и грузы как одну систему. Тогда $\sum m_z(F_k^e) = 0$ и должно быть $K_z = \text{const}$. В момент $t_0 = 0$ расстояние $x = 0$ и $K_{z0} = (J_z + 2ml^2)\,\omega_0$. В произвольный момент времени t величина $K_z = [J_z + 2m(l+x)^2]\,\omega$. Так как $K_z = K_{z0}$, то отсюда

$$\omega = \frac{J_z + 2ml^2}{J_z + 2m(l+x)^2}\,\omega_0.$$

Следовательно, когда $x > 0$, значение $\omega < \omega_0$, а когда $x < 0$, то $\omega > \omega_0$, т. е. угловая скорость ω колеблется около среднего значения ω_0. С течением времени при затухании колебаний грузов x стремится к нулю и ω стремится к ω_0.

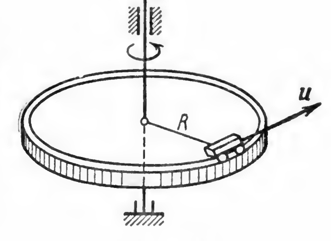
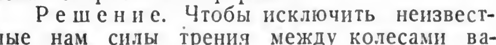


Рис. 314.

Задача 132. По ободу круглой горизонтальной платформы весом P и радиуса R проложены рельсы (рис. 314). Платформа вместе со стоящим на рельсах заводным вагончиком весом p вращается вокруг вертикальной оси Oz с угловой скоростью ω_0. В некоторый момент времени вагончик начинает двигаться по рельсам с относительной (по отношению к платформе) скоростью u в сторону вращения платформы. Как изменится при этом угловая скорость платформы?


Решение. Чтобы исключить неизвестные нам силы трения между колесами вагончика и платформой, будем рассматривать платформу и вагончик как одну систему. Моменты действующих на эту систему внешних сил относительно оси z равны нулю. Следовательно, $K_z = \text{const}$. Будем считать платформу однородным круглым диском ($J_z = 0{,}5MR^2$), а вагончик — материальной точкой. Тогда

$$K_{z0} = \left(0{,}5\frac{P}{g}R^2 + \frac{p}{g}R^2\right)\omega_0.$$

Когда вагончик начинает двигаться, его абсолютная скорость будет равна $v_a = u + \omega R$, где ω — новая угловая скорость платформы. Момент количества движения вагончика относительно оси z будет при этом равен $mv_aR = m(uR + \omega R^2)$, а для всей системы получим:

$$K_{z1} = 0{,}5\frac{P}{g}R^2\omega + \frac{p}{g}(uR + R^2\omega).$$

Так как $K_z = \text{const}$, то $K_{z1} = K_{z0}$, откуда находим:

$$\omega = \omega_0 - \frac{p}{0{,}5P + p}\frac{u}{R}.$$

Угловая скорость платформы, как видим, уменьшается. Если вагончик будет двигаться в противоположную сторону, то значение ω увеличится. Обращаем внимание на то, что при вычислении величины K_z надо брать *абсолютные скорости* всех движущихся точек или тел системы.

Задача 133. На барабан весом P и радиуса r (рис. 315) намотана нить с грузом A весом Q на конце. Пренебрегая массой нити и трением в оси, определить угловое ускорение барабана при вертикальном движении груза, если радиус инерции барабана относительно его оси равен $\rho_и$.

Рис. 315.

Решение. Применяя теорему моментов относительно оси O, будем иметь

$$\frac{dK_O}{dt} = \sum m_O(F_k^e). \qquad (a)$$

Движущаяся система состоит из двух тел. Поэтому

$$K_O = K_{бар} + K_{гр}.$$

Груз, движущийся поступательно, рассматриваем как материальную точку. Его скорость $v = \omega r$. Барабан вращается вокруг неподвижной оси. Следовательно,

$$K_{гр} = \frac{Q}{g}vr = \frac{Q}{g}r^2\omega; \quad K_{бар} = J_O\omega = \frac{P}{g}\rho_и^2\omega$$

и

$$K_O = (Qr^2 + P\rho_и^2)\frac{\omega}{g}.$$

Подставляя это значение K_O в равенство (a), получим:

$$\frac{Qr^2 + P\rho_и^2}{g}\frac{d\omega}{dt} = Qr.$$

Отсюда

$$\varepsilon = \frac{Qrg}{Qr^2 + P\rho_и^2}.$$

ГЛАВА XXVII

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ СИСТЕМЫ

§ 147. Кинетическая энергия системы. *Кинетической энергией системы называется скалярная величина T, равная арифметической сумме кинетических энергий всех точек системы*

$$T=\sum\frac{m_k v_k^2}{2}. \tag{41}$$

Кинетическая энергия является характеристикой и поступательного и вращательного движения системы, поэтому теоремой об изменении кинетической энергии особенно часто пользуются при решении задач. Главное отличие величины T от введенных ранее характеристик $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{K}_O$ состоит в том, что кинетическая энергия является величиной скалярной и притом существенно положительной. Поэтому она не зависит от направлений движения частей системы и не характеризует изменений этих направлений.

Отметим еще следующее важное обстоятельство. Внутренние силы действуют на части системы по взаимно противоположным направлениям. По этой причине они, как мы видели, не изменяют векторных характеристик $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{K}_O$. Но если под действием внутренних сил будут изменяться модули скоростей точек системы, то при этом будет изменяться и величина T. Следовательно, кинетическая энергия системы отличается от величин $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{K}_O$ еще и тем, что на ее изменение влияет действие и внешних и внутренних сил.

Если система состоит из нескольких тел, то ее кинетическая энергия равна, очевидно, сумме кинетических энергий этих тел:

$$T=\sum T_k.$$

Найдем формулы для вычисления кинетической энергии тела в разных случаях движения.

1. Поступательное движение. В этом случае все точки тела движутся с одинаковыми скоростями, равными скорости движения центра масс. Следовательно, для любой точки $v_k=v_C$ и формула (41) дает

$$T_{\text{пост}}=\sum\frac{m_k v_C^2}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum m_k\right)v_C^2$$

или

$$T_{\text{пост}}=\frac{1}{2}Mv_C^2. \tag{42}$$

Таким образом, *кинетическая энергия тела при поступательном движении равна половине произведения массы тела на квадрат скорости центра масс.* От направления движения значение T не зависит.

2. Вращательное движение. Если тело вращается вокруг какой-нибудь оси Oz (см. рис. 310), то скорость любой его точки $v_k = \omega h_k$, где h_k — расстояние точки от оси вращения, а ω — угловая скорость тела. Подставляя это значение в формулу (41) и вынося общие множители за скобку, получим:

$$T_{\text{вр}} = \sum \frac{m_k \omega^2 h_k^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum m_k h_k^2\right)\omega^2.$$

Величина, стоящая в скобке, представляет собою момент инерции тела относительно оси z. Таким образом, окончательно найдем:

$$T_{\text{вр}} = \frac{1}{2} J_z \omega^2, \tag{43}$$

т. е. *кинетическая энергия тела при вращательном движении равна половине произведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат его угловой скорости.* От направления вращения значение T не зависит.

3. Плоскопараллельное движение[1]. При этом движении скорости всех точек тела в каждый момент времени распределены так, как если бы тело вращалось вокруг оси, перпендикулярной к плоскости движения и проходящей через мгновенный центр скоростей P (рис. 316). Следовательно, по формуле (43)

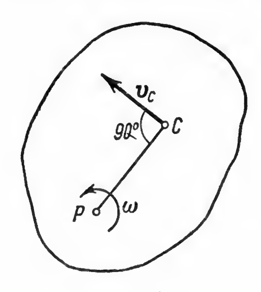


Рис. 316.

$$T_{\text{плоск}} = \frac{1}{2} J_P \omega^2, \tag{43'}$$

где J_P — момент инерции тела относительно названной выше оси, ω — угловая скорость тела.

Величина J_P в формуле (43′) будет переменной, так как положение центра P при движении тела все время меняется. Введем вместо J_P постоянный момент инерции J_C, относительно оси, проходящей через центр масс C тела. По теореме Гюйгенса (§ 132) $J_P = J_C + Md^2$, где $d = PC$. Подставим это выражение для J_P в (43′). Учитывая, что точка P — мгновенный центр скоростей, и, следовательно, $\omega d = \omega \cdot PC = v_C$, где v_C — скорость центра масс C, окончательно найдем:

$$T_{\text{плоск}} = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega^2. \tag{44}$$

[1]) Этот случай может быть получен как частный из рассмотренного в следующем пункте общего случая движения твердого тела.

Следовательно, *при плоскопараллельном движении кинетическая энергия тела равна энергии поступательного движения со скоростью центра масс, сложенной с кинетической энергией вращательного движения вокруг центра масс.*

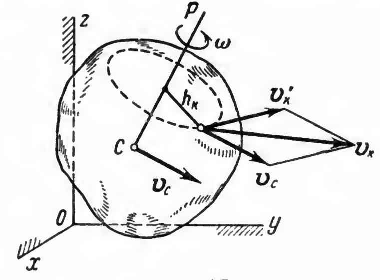


Рис. 317.

4.* Общий случай движения. Если за полюс взять центр масс C тела (рис. 317), то движение тела в общем случае будет слагаться из поступательного движения со скоростью полюса $\boldsymbol{v}_C$ и из вращения вокруг мгновенной оси CP, проходящей через этот полюс (см. § 88). Тогда, по доказанному в кинематике, скорость $\boldsymbol{v}_k$ любой точки тела будет равна геометрической сумме скорости полюса $\boldsymbol{v}_C$ и скорости $\boldsymbol{v}'_k$, которую точка получает при вращении вместе с телом вокруг оси CP

$$\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}'_k.$$

При этом по модулю $v'_k = \omega h_k$, где h_k — расстояние точки от оси CP, а ω — *абсолютная* угловая скорость вращения тела вокруг этой оси. Отсюда следует, что [1])

$$v_k^2 = \boldsymbol{v}_k^2 = (\boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}'_k)^2 = v_C^2 + v_k'^2 + 2\boldsymbol{v}_C \cdot \boldsymbol{v}'_k.$$

Подставляя это значение в равенство (41) и учитывая, что $v'_k = \omega h_k$, найдем:

$$T = \frac{1}{2}\left(\sum m_k\right) v_C^2 + \frac{1}{2}\left(\sum m_k h_k^2\right)\omega^2 + \boldsymbol{v}_C \cdot \sum m_k \boldsymbol{v}'_k,$$

где общие множители сразу вынесены за скобки.

В полученном равенстве первая скобка дает массу M тела, а вторая скобка равна моменту инерции тела J_{CP} относительно мгновенной оси CP. Величина же $\sum m_k \boldsymbol{v}'_k = 0$, так как она представляет собою количество движения, получаемое телом при его вращении вокруг оси CP, проходящей через центр масс тела (см. § 138).

Окончательно получаем:

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} J_{CP}\omega^2. \tag{45}$$

Следовательно, *кинетическая энергия тела в общем случае движения* (в частности и при плоскопараллельном движении) *равна*

[1]) Из определения скалярного произведения двух векторов (см. подстрочное примечание на стр. 269) следует, что $\boldsymbol{v}^2 = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = vv \cos 0° = v^2$, т. е. скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля. Этот результат здесь и использован.

кинетической энергии поступательного движения со скоростью центра масс, сложенной с кинетической энергией вращательного движения вокруг оси, проходящей через центр масс.

Если за полюс взять не центр масс, а какую-нибудь другую точку A, причем ось AA' не будет проходить через центр масс, то для этой оси $\sum m_k v' \neq 0$, и формулы вида (45) мы не получим (см. задачу 136).

Рассмотрим примеры.

Задача 134. Вычислить кинетическую энергию катящегося без скольжения сплошного цилиндрического колеса массы M, если скорость его центра равна v_C (см. рис. 321, *a*).

Решение. Колесо совершает плоскопараллельное движение. По формуле (44) или (45)

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega^2 .$$

Считая колесо сплошным однородным цилиндром, будем иметь (см. § 131) $J_C = 0{,}5MR^2$, где R — радиус колеса. С другой стороны, так как точка B является для колеса мгновенным центром скоростей, то $v_C = \omega \cdot BC = \omega R$, откуда $\omega = v_C / R$.

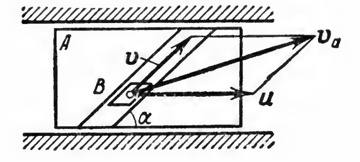


Рис. 318.

Подставляя все эти значения, найдем:

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{4} MR^2 \frac{v_C^2}{R^2} = \frac{3}{4} M v_C^2 .$$

Задача 135. В детали A, движущейся поступательно со скоростью $\boldsymbol{u}$, имеются направляющие, по которым со скоростью $\boldsymbol{v}$ перемещается тело B массы M. Зная угол α (рис. 318), определить кинетическую энергию тела B.

Решение. Абсолютное движение тела B будет поступательным со скоростью $\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ (см. § 93). Тогда

$$T = \frac{1}{2} M v_a^2 = \frac{1}{2} M (u^2 + v^2 + 2uv \cos \alpha).$$

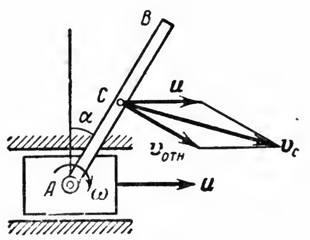


Рис. 319.

Заметим, что, *если тело совершает сложное движение, то его полная кинетическая энергия не равна в общем случае сумме кинетических энергий относительного и переносного движений.* Так, в данном примере

$$T_{\text{отн}} + T_{\text{пер}} = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} M u^2 \neq T.$$

Задача 136. Часть механизма состоит из движущейся поступательно со скоростью $\boldsymbol{u}$ детали (рис. 319) и прикрепленного к ней на оси A стержня AB длины l и массы M. Стержень вращается вокруг оси A (в направлении, указанном дуговой стрелкой) с угловой скоростью ω. Определить кинетическую энергию стержня при данном угле α.

Решение. Стержень совершает сложное (плоскопараллельное) движение. По формуле (44) или (45)

$$T=\frac{1}{2}Mv_C^2+\frac{1}{2}J_C\omega^2.$$

Скорость точки C складывается из скорости u и скорости $v_{\text{отн}}$, модуль которой $v_{\text{отн}}=\omega\frac{l}{2}$. Следовательно (см. рис. 319), $v_C^2=u^2+v_{\text{отн}}^2+2uv_{\text{отн}}\cos\alpha$. Угловая скорость вращения стержня вокруг центра C такая же, как и вокруг конца A, так как ω не зависит от выбора полюса (см. § 77). Кроме того, в задаче 122 (§ 132) было показано, что $J_C=\frac{1}{12}Ml^2$.

Подставляя все эти данные, получим:

$$T=\frac{1}{2}M\left(u^2+\omega^2\frac{l^2}{4}+u\omega l\cos\alpha\right)+\frac{1}{24}Ml^2\omega^2=$$
$$=\frac{1}{2}Mu^2+\frac{1}{6}Ml^2\omega^2+\frac{1}{2}Ml\omega u\cos\alpha.$$

Заметим, что в данном случае нельзя считать

$$T=T_{\text{пост}}+T_{\text{вр}}=\frac{1}{2}Mu^2+\frac{1}{2}J_A\omega^2=\frac{1}{2}Mu^2+\frac{1}{6}Ml^2\omega^2.$$

Результат этот не верен, так как по доказанной теореме формула $T=T_{\text{пост}}+T_{\text{вр}}$ справедлива только тогда, когда ось вращения проходит через центр масс тела, а ось A через центр масс не проходит.

§ 148. Некоторые случаи вычисления работы. Работа сил вычисляется по формулам, полученным в §§ 112, 113. Рассмотрим дополнительно следующие случаи.

1) Работа сил тяжести, действующих на систему. Работа силы тяжести, действующей на частицу весом p_k, будет равна $p_k(z_{k0}-z_{k1})$, где z_{k0} и z_{k1} — координаты, определяющие начальное и конечное положение частицы (см. § 113). Тогда сумма работ всех сил тяжести, действующих на систему, согласно формулам (74) § 54 будет равна

$$A=\sum p_k z_{k0}-\sum p_k z_{k1}=P(z_{C_0}-z_{C_1})=\pm Ph_C,$$

где P — вес системы, h_C — вертикальное перемещение центра тяжести (или центра масс). Следовательно, *работа сил тяжести, действующих на систему, вычисляется как работа их равнодействующей P на перемещении центра тяжести (или центра масс) системы.*

2) Работа сил, приложенных к вращающемуся телу. Элементарная работа приложенной к телу силы F (рис. 320) будет равна (см. § 112)

$$dA=F_\tau ds=F_\tau h\,d\varphi,$$

так как $ds=h\,d\varphi$, где $d\varphi$ — угол поворота тела.

Но, как легко видеть, $F_\tau h = m_z(\boldsymbol{F})$. Будем называть величину $M_z = m_z(\boldsymbol{F})$ *вращающим моментом*. Тогда получим:

$$dA = M_z d\varphi. \tag{46}$$

Следовательно, в рассматриваемом случае *элементарная работа равна произведению вращающего момента на элементарный угол поворота*. Формула (46) справедлива и при действии нескольких сил, если считать $M_z = \sum m_z(\boldsymbol{F}_k)$.

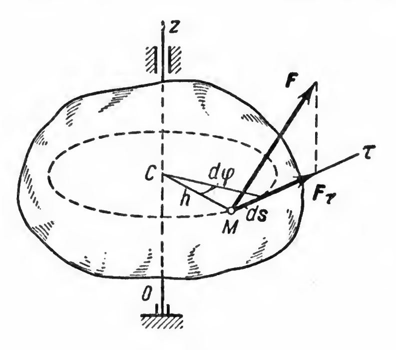


Рис. 320.

При повороте на конечный угол φ_1 работа будет равна

$$A = \int_0^{\varphi_1} M_z d\varphi, \tag{47}$$

а в случае постоянного момента ($M_z = \text{const}$)

$$A = M_z \varphi_1. \tag{47'}$$

Если на тело действует пара сил, лежащая в плоскости, перпендикулярной к оси Oz, то M_z в формулах (46) — (47') будет, очевидно, означать момент этой пары.

Укажем еще, как в данном случае определяется мощность (см. § 112). Пользуясь равенством (46), находим:

$$W = \frac{dA}{dt} = M_z \frac{d\varphi}{dt} = M_z \omega.$$

Следовательно, при действии сил на вращающееся тело *мощность равна произведению вращающего момента на угловую скорость тела*. При той же самой мощности вращающий момент будет тем больше, чем меньше угловая скорость.

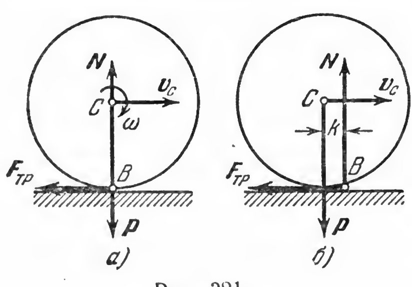


Рис. 321.

3) Работа сил трения, действующих на катящееся тело. На колесо радиуса R (рис. 321), катящееся по некоторой плоскости (поверхности) без скольжения, действует сила трения $F_{тр}$, препятствующая скольжению точки касания B вдоль плоскости. Элементарная работа этой силы $dA = -F_{тр} \cdot ds_B$. Но точка B в данном случае является мгновенным центром скоро-

стей (§ 81) и $v_B=0$. Так как $ds_B=v_B dt$, то $ds_B=0$ и для каждого элементарного перемещения $dA=0$.

Следовательно, *при качении без скольжения, работа силы трения, препятствующей скольжению, на любом перемещении тела равна нулю.* По той же причине в этом случае равна нулю и работа нормальной реакции N, если считать тела недеформируемыми и силу N приложенной в точке B (как на рис. 321, *а*).

Сопротивление качению, возникающее вследствие деформации поверхностей (рис. 321, *б*), создает пару (N, P), момент которой $M=kN$, где k — коэффициент трения качения (см. § 41). Тогда по формуле (46), учитывая, что при качении угол поворота колеса $d\varphi=\frac{ds_C}{R}$, получим:

$$dA^{\text{кач}}=-kNd\varphi=-\frac{k}{R}Nds_C, \tag{48}$$

где ds_C — элементарное перемещение центра C колеса.

Если $N=\text{const}$, то полная работа сил сопротивления качению будет равна

$$A^{\text{кач}}=-kN\varphi_1=-\frac{k}{R}Ns_C. \tag{48'}$$

Так как величина k/R мала, то при наличии других сопротивлений сопротивлением качению можно в первом приближении пренебрегать.

§ 149. Теорема об изменении кинетической энергии системы.

Доказанная в § 114 теорема справедлива для любой из точек системы. Следовательно, если рассмотреть какую-нибудь точку системы с массой m_k, имеющую скорость v_k, то для этой точки будет

$$d\left(\frac{m_k v_k^2}{2}\right)=dA_k^e+dA_k^i,$$

где dA_k^e и dA_k^i — элементарные работы действующих на точку внешних и внутренних сил. Составляя такие уравнения для каждой из точек системы и складывая их почленно, получим

$$d\left(\sum\frac{m_k v_k^2}{2}\right)=\sum dA_k^e+\sum dA_k^i,$$

или

$$dT=\sum dA_k^e+\sum dA_k^i. \tag{49}$$

Равенство (49) выражает **теорему об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме**. Проинтегрировав обе части этого равенства в пределах, соответствующих перемещению системы из некоторого начального

положения, где кинетическая энергия равна T_0, в положение, где значение кинетической энергии становится равным T_1, будем иметь

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i. \tag{50}$$

Полученное уравнение выражает теорему об изменении кинетической энергии в конечном виде: *изменение кинетической энергии системы при некотором ее перемещении равно сумме работ на этом перемещении всех приложенных к системе внешних и внутренних сил.*

В отличие от предыдущих теорем, внутренние силы в уравнениях (49) или (50) не исключаются. В самом деле, если $\boldsymbol{F}_{12}^i$ и $\boldsymbol{F}_{21}^i$ — силы взаимодействия между точками B_1 и B_2 системы (см. рис. 322), то $\boldsymbol{F}_{12}^i + \boldsymbol{F}_{21}^i = 0$. Но при этом точка B_1 может перемещаться по направлению к B_2, а точка B_2 — по направлению к B_1. Работа каждой из сил будет тогда положительной и сумма работ нулем не будет. Примером может служить явление отката (задача 128, рис. 307). Внутренние силы (силы давления), действующие и на снаряд и на откатывающиеся части, совершают здесь положительную работу. Сумма этих работ, не равная нулю, и изменяет кинетическую энергию системы от величины $T_0 = 0$ в начале выстрела до величины $T_1 = T_{\text{снар}} + T_{\text{отк}}$ в конце.

Рассмотрим два важных частных случая.

1) Неизменяемая система. *Неизменяемой* будем называть систему, в которой расстояния между точками приложения внутренних сил при движении системы не изменяются. В частности, такой системой является абсолютно твердое тело или нерастяжимая нить.

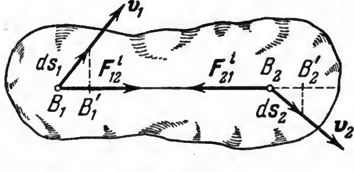


Рис. 322.

Пусть две точки B_1 и B_2 неизменяемой системы (рис. 322), действующие друг на друга с силами $\boldsymbol{F}_{12}^i$ и $\boldsymbol{F}_{21}^i$ ($\boldsymbol{F}_{21}^i = -\boldsymbol{F}_{12}^i$), имеют в данный момент скорости $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$. Тогда за промежуток времени dt эти точки совершат элементарные перемещения $ds_1 = v_1 dt$ и $ds_2 = v_2 dt$, направленные вдоль векторов $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$. Но так как отрезок B_1B_2 является неизменяемым, то по известной теореме кинематики проекции векторов $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$, а, следовательно, и перемещений ds_1 и ds_2 на направление отрезка B_1B_2 будут равны друг другу, т. е. $B_1B_1' = B_2B_2'$. Тогда элементарные работы сил $\boldsymbol{F}_{12}^i$ и $\boldsymbol{F}_{21}^i$ будут одинаковы по модулю и противоположны по знаку и в сумме дадут нуль. Этот результат справедлив для всех внутренних сил при любом перемещении системы.

Отсюда заключаем, что *для неизменяемой системы сумма работ всех внутренних сил равна нулю* и уравнения (49) или (50) принимают вид

$$dT = \sum dA_k^e \quad \text{или} \quad T_1 - T_0 = \sum A_k^e. \tag{51}$$

2) Система с идеальными связями. Рассмотрим систему, на которую наложены связи, не изменяющиеся со временем. Разделим все действующие на точки системы внешние и внутренние силы на *активные* и *реакции связей*. Тогда уравнение (49) можно представить в виде

$$dT = \sum dA_k^{\text{a}} + \sum dA_k^{\text{r}},$$

где dA_k^{a} — элементарная работа действующих на k-ю точку системы внешних и внутренних активных сил, а dA_k^{r} — элементарная работа реакций наложенных на ту же точку внешних и внутренних связей.

Как видим, изменение кинетической энергии системы зависит от работы и активных сил и реакций связей. Однако можно ввести понятие о таких «идеальных» механических системах, у которых наличие связей не влияет на изменение кинетической энергии системы при ее движении. Для таких связей должно, очевидно, выполняться условие:

$$\sum dA_k^{\text{r}} = 0. \qquad (52)$$

Если для связей, не изменяющихся со временем, сумма работ всех реакций при элементарном перемещении системы равна нулю, то такие связи называют *идеальными*. Укажем ряд известных нам видов идеальных связей.

В § 114 было установлено, что если связью является неподвижная поверхность (или кривая), трением о которую можно пренебречь, то при скольжении тел вдоль такой поверхности (кривой) работа реакции $\boldsymbol{N}$ равна нулю. Затем в § 148 было показано, что если пренебречь деформациями, то при качении без скольжения тела по шероховатой поверхности работа нормальной реакции $\boldsymbol{N}$ и силы трения $\boldsymbol{F}$ (т. е. касательной составляющей реакции) равна нулю. Далее, работа реакции $\boldsymbol{R}$ шарнира (см. рис. 10), если пренебречь трением, будет также равна нулю, поскольку точка приложения силы $\boldsymbol{R}$ при любом перемещении системы остается неподвижной. Наконец, если на рис. 322 материальные точки B_1 и B_2 рассматривать как связанные жестким (нерастяжимым) стержнем B_1B_2, то силы $\boldsymbol{F}_{12}^{i}$ и $\boldsymbol{F}_{21}^{i}$ будут реакциями стержня; работа каждой из этих реакций при перемещении системы не равна нулю, но сумма этих работ по доказанному дает нуль. Таким образом, все перечисленные связи можно с учетом сделанных оговорок считать идеальными.

Для механической системы, на которую наложены только не изменяющиеся со временем идеальные связи, будем, очевидно, иметь

$$dT = \sum dA_k^{\text{a}} \quad \text{или} \quad T_1 - T_0 = \sum A_k^{\text{a}}. \qquad (53)$$

Таким образом, изменение кинетической энергии системы с идеальными, не изменяющимися со временем связями при любом ее перемещении равно сумме работ на этом перемещении, приложенных к системе внешних и внутренних *активных сил*.

Все предыдущие теоремы позволяли исключить из уравнений движения внутренние силы, но все внешние силы, в том числе и наперед

неизвестные реакции внешних связей, в уравнениях сохранялись. Практическая ценность теоремы об изменении кинетической энергии состоит в том, что при не изменяющихся со временем идеальных связях она позволяет исключить из уравнений движения *все* наперед неизвестные реакции связей.

§ 150. Решение задач. Теоремой об изменении кинетической энергии удобнее всего пользоваться в случаях, когда движущаяся система является неизменяемой. В этом случае теорема позволяет исключить из рассмотрения все неизвестные внутренние силы, а при идеальных, не изменяющихся со временем связях — и наперед неизвестные реакции внешних связей.

В случае изменяемой системы теорема дает решение задачи только тогда, когда внутренние силы наперед известны. Если же эти силы не известны (задачи 124, 128 и им подобные), то получить решение с помощью одной только теоремы энергии нельзя.

Уравнение (50) позволяет легко решать те задачи, в которых в число данных и искомых величин входят: 1) действующие силы; 2) *перемещение системы*; 3) скорости тел (линейные или угловые) в начале и в конце перемещения. При этом действующие силы должны быть постоянными или зависеть только от перемещений (расстояний).

Важно также иметь в виду, что с помощью теоремы об изменении кинетической энергии можно (когда положение системы определяется одним параметром) составлять *дифференциальные уравнения движения системы* и, в частности, находить ускорения движущихся тел. Для этого надо, составив уравнение (50), продифференцировать обе его части по времени и исключить скорость (см. задачи 139, 140). При произвольных действующих силах уравнение удобнее составлять в виде (49), т. е. в дифференциальной форме (см. задачи 141, 148).

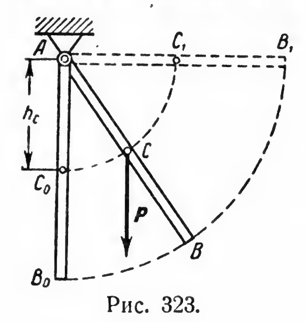


Рис. 323.

Задача 137. Стержень AB длиною l подвешен на шарнире в точке A (рис. 323). Пренебрегая трением в шарнире, найти, какую наименьшую угловую скорость ω_0 надо сообщить стержню, чтобы он отклонился до горизонтального положения.

Решение. В число данных и искомых в задаче величин входят ω_0, $\omega_1 = 0$ и *перемещение системы*, определяемое углом B_0AB_1. Следовательно, для решения задачи удобнее всего воспользоваться теоремой об изменении кинетической энергии. Учитывая, что система не изменяема, составим уравнение (51)

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^e. \qquad \text{(a)}$$

Обозначая массу стержня через M, вычислим все входящие в это уравнение

величины. По формулам (43) и (6) находим:

$$T_0 = \frac{1}{2} J_A \omega_0^2 = \frac{1}{6} Ml^2\omega_0^2.$$

Так как в конечном положении скорость стержня равна нулю, то $T_1 = 0$. Наложенная связь является идеальной (шарнир A); следовательно, работу совершает только активная сила $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$ и $A^e = -Ph_C = -Mg\frac{l}{2}$. Подставляя все эти значения в уравнение (а), найдем:

$$-\frac{1}{6} Ml^2\omega_0^2 = -Mg\frac{l}{2}, \quad \text{откуда} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{l}}.$$

Задача 138. Шкивы A и B, соединенные ремнем (рис. 324), вращаются после выключения двигателя так, что шкив A имеет угловую скорость ω_0. Общий вес шкивов равен P, а вес ремня p. Чтобы затормозить вращение, к шкиву A радиуса R прижимают с силой Q тормозную колодку; коэффициент трения колодки о шкив равен f. Пренебрегая трением в осях и считая шкивы сплошными дисками, найти, сколько оборотов сделает шкив A до остановки.

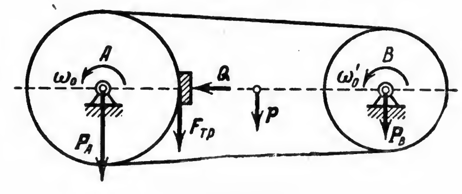


Рис. 324.

Р е ш е н и е. Для определения искомого числа оборотов $N_{об}$ воспользуемся уравнением (51)

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^e. \qquad \text{(а)}$$

При вычислении кинетической энергии надо всегда иметь в виду, что *кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий всех входящих в нее тел*. По условиям задачи $T_1 = 0$, а $T_0 = T_A + T_B + T_р$. Учитывая, что начальные скорости всех точек ремня $v_{р0} = \omega_0 R = \omega_0' r$, где ω_0' и r — начальная угловая скорость и радиус шкива B, найдем по формулам (43) и (8):

$$T_A = \frac{1}{2}\left(\frac{P_A}{2g}R^2\right)\omega_0^2, \quad T_B = \frac{1}{2}\left(\frac{P_B}{2g}r^2\right)\omega_0'^2 = \frac{1}{4}\frac{P_B}{g}R^2\omega_0^2,$$

$$T_р = \frac{1}{2}\frac{p}{g}v_{р0}^2 = \frac{1}{2}\frac{p}{g}R^2\omega_0^2.$$

Последнее равенство следует из того, что все точки ремня движутся с одной и той же по модулю скоростью. Окончательно, так как $P_A + P_B = P$, получаем:

$$T_0 = \frac{P + 2p}{4g}R^2\omega_0^2.$$

Вычисляем работы сил. В данном случае работа сил тяжести равна нулю, так как центры тяжести колес и ремня при движении системы не перемещаются. Сила трения $F_{тр} = fQ$. Ее работу найдем по формуле (47′)

$$A_{тр} = -(fQR)\cdot\varphi_1 = -fQR\cdot 2\pi N_{об}.$$

Подставляя все найденные значения в уравнение (а), получим окончательно:

$$N_{об} = \frac{(P + 2p)R\omega_0^2}{8\pi g f Q}.$$

Задача 139. Тележку тянут вверх по наклонной плоскости, образующей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом, приложив к ней постоянную силу $Q = 16$ *кГ* (рис. 325). Вес платформы тележки $P = 18$ *кГ*, вес каждого из четырех ее сплошных колес $p = 2$ *кГ*. Определить: 1) какую поступательную скорость v_1 будет иметь тележка, пройдя путь $l = 4$ *м*, если $v_0 = 0$; 2) с каким ускорением движется тележка. Качение колес происходит без скольжения; сопротивлением качению пренебречь.

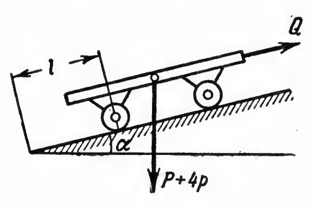


Рис. 325.

Решение. 1) Для определения v_1 воспользуемся уравнением (51)

$$T_1 - T_0 = \Sigma A_k^e. \qquad \text{(а)}$$

В данном случае $T_0 = 0$, а $T_1 = T_{пл} + 4T_{кол}$. Тележка движется поступательно, а кинетическая энергия сплошного катящегося колеса была вычислена в задаче 134; следовательно:

$$T_1 = \frac{1}{2}\frac{P}{g}v_1^2 + 4\left(\frac{3}{4}\frac{p}{g}v_1^2\right) = \frac{1}{2g}(P + 6p)v_1^2.$$

Работу совершают сила $\boldsymbol{Q}$ и сила тяжести $\boldsymbol{P}_1$, равная $(\boldsymbol{P} + 4\boldsymbol{p})$. Работа силы трения, препятствующей скольжению, и нормальных реакций плоскости равна нулю (§ 148). Вычисляя, находим:

$$A(Q) = Ql; \quad A(P_1) = -(P + 4p)h_C = -(P + 4p)\,l\sin\alpha.$$

Подставляя все эти данные в уравнение (а), получаем:

$$\frac{1}{2g}(P + 6p)v_1^2 = [Q - (P + 4p)\sin\alpha]\,l, \qquad \text{(б)}$$

откуда

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gl\,[Q - (P + 4p)\sin\alpha]}{P + 6p}} = 2{,}8 \text{ м/сек}.$$

2) Для определения ускорения w будем считать в равенстве (б) величины $v_1 = v$ и l (параметр, определяющий положение всей системы) переменными. Тогда, продифференцировав по времени обе части равенства, найдем:

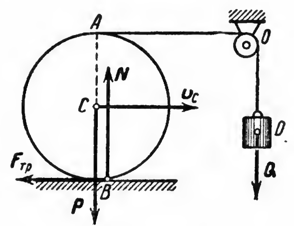


Рис. 326.

$$\frac{1}{g}(P + 6p)\,v\,\frac{dv}{dt} = [Q - (P + 4p)\sin\alpha]\,\frac{dl}{dt}.$$

Но $\frac{dl}{dt} = v$, а $\frac{dv}{dt} = w$. Окончательно, сокращая на v, будем иметь:

$$w = \frac{Q - (P + 4p)\sin\alpha}{P + 6p}\,g = 0{,}98 \text{ м/сек}^2.$$

Обращаем внимание на использованный в этой задаче прием определения ускорения с помощью теоремы об изменении кинетической энергии.

Задача 140. На цилиндрический каток радиуса R и веса P намотана нить, перекинутая через блок O (рис. 326) и несущая на конце груз D весом Q. Определить, какую скорость v_C будет иметь центр C катка, пройдя

путь s, если $v_{C_0}=0$, и найти, чему равно ускорение w_C этого центра. Коэффициент трения качения катка равен k, радиус инерции катка относительно его оси $\rho_и$. Массой нити и блока O пренебречь.

Решение. 1) Для определения скорости v_C воспользуемся уравнением

$$T-T_0=\sum A_k^e. \quad \text{(a)}$$

В данном случае $T_0=0$, а $T=T_{кат}+T_D$, причем по формулам (42), (44) и (4)

$$T_D=\frac{1}{2}\frac{Q}{g}v_D^2, \quad T_{кат}=\frac{1}{2}\frac{P}{g}v_C^2+\frac{1}{2}\left(\frac{P}{g}\rho_и^2\right)\omega^2.$$

Так как точка B является мгновенным центром скоростей, то $\omega=v_C/R$ и $v_D=v_A=2v_C$. Следовательно,

$$T=\frac{1}{2g}\left[4Q+P\left(1+\frac{\rho_и^2}{R^2}\right)\right]v_C^2.$$

Работу совершают сила Q и пара (N, P). Поскольку $v_D=2v_C$, то перемещение груза D, т. е. $h=2s$, где s — перемещение центра C катка, и $A(Q)=Q\cdot 2s$. Работу сил сопротивления качению вычисляем по формуле (48'), так как $N=P=\text{const}$. Тогда

$$\sum A_k^e=2Qs-\frac{k}{R}Ps.$$

Подставляя найденные значения в уравнение (а), получим:

$$\frac{1}{2g}\left[4Q+P\left(1+\frac{\rho_и^2}{R^2}\right)\right]v_C^2=\left(2Q-\frac{k}{R}P\right)s, \quad \text{(б)}$$

откуда

$$v_C=\sqrt{\frac{2g(2QR-kP)Rs}{4QR^2+P(R^2+\rho_и^2)}}.$$

2) Для определения w_C, как и в предыдущей задаче, дифференцируем обе части равенства (б) по t. Окончательно, учитывая, что $\frac{ds}{dt}=v_C$, найдем:

$$w_C=\frac{(2QR-kP)R}{4QR^2+P(R^2+\rho_и^2)}g.$$

Задача 141. Шестерня 1 радиуса r и веса P, насаженная на кривошип OC длины l и веса Q и связанная с ним спиральной пружиной, может кататься по неподвижной шестерне 2 радиуса $R=l-r$ (рис. 327). Момент пружины $M_{пр}=c\alpha$, где α — угол поворота шестерни 1 относительно кривошипа. Пренебрегая трением в осях, найти период колебаний, которые будет совершать кривошип, если его вывести из положения равновесия. Механизм расположен в горизонтальной плоскости.

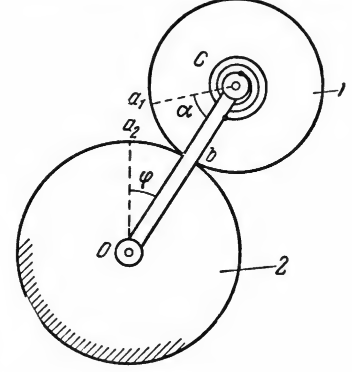


Рис. 327.

Решение. Будем определять положение кривошипа углом φ, отсчитываемым от положения равновесия. Чтобы исключить из рассмотрения

неизвестную реакцию оси C, рассмотрим шестерню 1 и кривошип как одну систему и составим дифференциальное уравнение ее движения с помощью уравнения (49).

Сначала вычисляем кинетическую энергию T системы, выражая ее через угловую скорость $\omega_{кр}$ кривошипа (так как мы ищем закон движения кривошипа). Получаем:

$$T = T_{кр} + T_{ш} = \frac{1}{2} J_{O кр} \omega^2_{кр} + \frac{1}{2} \frac{P}{g} v^2_C + \frac{1}{2} J_{C ш} \omega^2_{ш}. \qquad (а)$$

Считая кривошип однородным стержнем, а шестерню — диском и учитывая, что точка касания является для шестерни 1 мгновенным центром скоростей, будем иметь:

$$J_{O кр} = \frac{1}{3} \frac{Q}{g} l^2, \quad J_{C ш} = \frac{1}{2} \frac{P}{g} r^2,$$

$$v_C = \omega_{кр} l, \qquad \omega_{ш} = \frac{v_C}{r} = \frac{l}{r} \omega_{кр}.$$

Подчеркиваем, что в формулу (44), по которой вычисляется $T_{ш}$, входит *абсолютная* угловая скорость шестерни, а не ее относительная скорость поворота по отношению к кривошипу. Подставляя все найденные значения в равенство (а), получим окончательно

$$T = \frac{1}{12g} (2Q + 9P) l^2 \omega^2_{кр}. \qquad (б)$$

Теперь вычисляем элементарную работу. Внешние силы в данном случае работу не производят; следовательно, $dA^e = 0$. Элементарная работа силы упругости пружины (внутренняя сила) при повороте шестерни вокруг кривошипа на угол α равна $dA^i = -M_{пр} d\alpha = -c\alpha d\alpha$ (знак минус потому, что момент направлен в сторону, противоположную углу поворота шестерни). Поскольку мы ищем закон движения кривошипа, то выразим угол α через φ. Так как $\overset{\frown}{a_2 b} = \overset{\frown}{a_1 b}$, то $R\varphi = r\alpha$, или $(l - r)\varphi = r\alpha$, откуда

$$\alpha = \frac{l - r}{r} \varphi \quad \text{и} \quad dA^i = -c \frac{(l - r)^2}{r^2} \varphi \, d\varphi.$$

Составляя теперь уравнение $dT = dA^i$, получим

$$\frac{1}{6g} (2Q + 9P) l^2 \omega_{кр} \cdot d\omega_{кр} = -c \frac{(l - r)^2}{r^2} \varphi \, d\varphi.$$

Деля обе части этого равенства на dt и учитывая, что $\frac{d\varphi}{dt} = \omega_{кр}$, а $\frac{d\omega_{кр}}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$, найдем окончательно дифференциальное уравнение движения системы в виде

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + k^2 \varphi = 0,$$

где

$$k^2 = \frac{6gc (l - r)^2}{(2Q + 9P) l^2 r^2}.$$

Полученное уравнение является дифференциальным уравнением гармонических колебаний (§ 123). Следовательно, кривошип, выведенный из

положения равновесия, будет совершать гармонические колебания, период которых τ равен

$$\tau = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \frac{lr}{l-r} \sqrt{\frac{2Q+9P}{6gc}}.$$

Решенная задача показывает, какие большие возможности для изучения движения системы дает теорема об изменении кинетической энергии.

§ 151. Потенциальное силовое поле и силовая функция. Задачи, рассмотренные в предыдущем параграфе (и в § 115), удалось решить с помощью теоремы об изменении кинетической энергии по той причине, что во всех случаях работу действующих сил можно было подсчитать, не зная заранее закона происходящего движения. Важно установить, каков вообще класс сил, обладающих этим свойством.

Работа на перемещении M_1M_2 силы $\boldsymbol{F}$, приложенной к телу в точке M, вычисляется по формуле (38′) из § 112

$$A_{(M_1M_2)} = \int\limits_{(M_1)}^{(M_2)} dA = \int\limits_{(M_1)}^{(M_2)} (F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz). \qquad (54)$$

Как уже было отмечено в § 112, вычислить стоящий справа интеграл, не зная закона происходящего движения (т. е. зависимостей x, y, z от времени t), можно лишь в случае, когда сила зависит только от положения точки, т. е. от ее координат x, y, z. Про такие силы говорят, что они образуют силовое поле. *Силовым полем* называется часть пространства, в каждой точке которого на помещенную туда материальную частицу действует определенная по модулю и направлению сила, зависящая от положения частицы. Примером силового поля служит поле тяготения планеты или Солнца. Так как сила определяется ее проекциями на оси координат, то силовое поле задается уравнениями:

$$F_x = \Phi_1(x,\ y,\ z),\ F_y = \Phi_2(x,\ y,\ z),\ F_z = \Phi_3(x,\ y,\ z). \qquad (55)$$

Но в общем случае и для вычисления работы таких сил надо в формуле (54) перейти под знаком интеграла к одному переменному, т. е. например, знать зависимости $y = f_1(x)$ и $z = f_2(x)$. Эти равенства, как известно, определяют в пространстве уравнение кривой, являющейся траекторией точки M. Следовательно, в общем случае, работа сил, образующих силовое поле, зависит от вида траектории, вдоль которой перемещается точка приложения силы.

Однако, если окажется, что выражение, стоящее в формуле (54) под знаком интеграла и представляющее собою элементарную работу силы $\boldsymbol{F}$, будет полным дифференциалом некоторой функции $U(x, y, z)$, т. е. будет

$$dA = dU(x, y, z) \text{ или } F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz = dU(x, y, z), \qquad (56)$$

то работу $A_{(M_1M_2)}$ можно вычислить, не зная заранее траекторию точки M.

Функция U от координат x, y, z, дифференциал которой равен элементарной работе, называется *силовой функцией*. Силовое поле, для которого существует силовая функция, называется *потенциальным силовым полем*, а силы, действующие в этом поле, — *потенциальными силами*. В дальнейшем силовую функцию считаем однозначной функцией координат.

Если в формулу (54) подставить выражение dA из равенства (56), то будем иметь:

$$A_{(M_1M_2)} = \int\limits_{(M_1)}^{(M_2)} dU(x,\ y,\ z) = U_2 - U_1, \tag{57}$$

где $U_1 = U(x_1, y_1, z_1)$ и $U_2 = U(x_2, y_2, z_2)$ — значения силовой функции в точках M_1 и M_2 поля соответственно. Следовательно, *работа потенциальной силы равна разности значений силовой функции в конечной и начальной точках пути и от вида траектории движущейся точки не зависит*. При перемещении по замкнутой траектории $U_2 = U_1$ и работа потенциальной силы равна нулю.

Основным свойством потенциального силового поля и является то, что работа, производимая силами поля при движении в нем материальной точки, зависит только от начального и конечного положений этой точки и не зависит ни от вида траектории, вдоль которой точка перемещается, ни от закона ее движения.

Силы, работа которых зависит от вида траектории или от закона движения точки приложения силы, называются *непотенциальными*. К таким силам относятся силы трения и сопротивления среды.

Если установлено, что соотношение (56) имеет место, то силовая функция находится из равенства:

$$U = \int dA + C \quad \text{или} \quad U = \int (F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz) + C. \tag{58}$$

Постоянная C здесь может иметь любое значение (как видно из формулы (57), работа от C не зависит). Однако обычно условливаются считать в некоторой точке O, называемой «нулевой точкой», величину $U_O = 0$ и определяют C, исходя из этого условия.

Известными нам примерами потенциальных сил являются силы тяжести, упругости и тяготения (§ 113). Покажем, что для этих сил действительно существуют силовые функции, и найдем их выражения. Поскольку под знаком интегралов, из которых в § 113 были получены формулы (39), (40) и (41′), стоят элементарные работы соответствующих сил, то будем иметь:

1) для силы тяжести, если ось z направлена вертикально вверх, $dA = -P\, dz$, откуда, считая $U = 0$ при $z = 0$ (нулевая точка в начале координат), находим:

$$U = -Pz; \tag{59}$$

2) для силы упругости, действующей вдоль оси Ox, $dA = -cx\,dx$, откуда, считая $U=0$ при $x=0$, находим:

$$U = -\frac{1}{2}cx^2; \tag{59'}$$

3*) для силы тяготения $dU = kmd\left(\frac{1}{r}\right) = mgR^2d\left(\frac{1}{r}\right)$, откуда, считая $U=0$ при $r=\infty$ (нулевая точка в бесконечности), находим:

$$U = mgR^2\frac{1}{r}, \tag{59''}$$

где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Пользуясь найденными значениями функций U, можно по формуле (57) найти те же выражения для работ соответствующих сил, которые даются равенствами (39), (40) и (41′) в § 113.

Покажем, что, зная силовую функцию, можно определить силу, действующую в любой точке поля. Из равенства (56), вычисляя дифференциал от функции $U(x, y, z)$, будем иметь

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz.$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты при dx, dy, dz в обеих частях равенства, находим

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}. \tag{60}$$

Следовательно, в *потенциальном силовом поле проекции силы равны частным производным от силовой функции по соответствующим координатам.* Вектор $\boldsymbol{F}$, проекции которого определяются равенствами вида (60), называют *градиентом* скалярной функции $U(x, y, z)$. Таким образом, $\boldsymbol{F} = \operatorname{grad} U$.

Из равенств (60) находим

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} \text{ и т. д.}$$

Отсюда следует, что если для данного поля существует силовая функция, то проекции силы удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial Fy}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}. \tag{61}$$

Можно доказать справедливость и обратного вывода, т. е. что если равенства (61) имеют место, то для поля существует силовая функция U. Следовательно, условия (61) являются *необходимыми и достаточными условиями того, что силовое поле является потенциальным.*

Таким образом, если силовое поле задано уравнениями (55), то по условиям (61) можно установить, является оно потенциальным или нет. Если поле потенциально, то уравнение (58) определяет его силовую функцию, а формула (51) — работу сил поля. Наоборот, если силовая функция известна, то по формулам (60) можно найти, какое силовое поле этой функцией определяется.

Полагая $U(x, y, z)=C$, где C — некоторая постоянная, мы получим в пространстве уравнение поверхности, во всех точках которой функция U имеет одно и то же значение C. Такие поверхности называют *поверхностями уровня* или *поверхностями равного потенциала*. Если, как мы считаем, силовая функция является однозначной функцией координат, то поверхности уровня не могут пересекаться и через каждую точку поля проходит только одна поверхность уровня. При любом перемещении M_1M_2 вдоль поверхности уровня $U_1=U_2=C$, и работа сил поля, как следует из уравнения (57), будет равна нулю. Поскольку сила при этом не равна нулю, то отсюда заключаем, что в *любой точке потенциального силового поля сила направлена по нормали к поверхности уровня, проходящей через эту точку.*

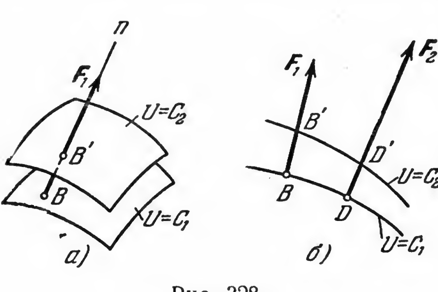


Рис. 328.

На рис. 328 показаны две поверхности уровня $U(x, y, z)=C_1$, $U(x, y, z)=C_2$, и их сечение плоскостью, проходящей через нормаль Bn. Если сила направлена в сторону, показанную на рисунке, то ее работа на перемещении BB' будет положительна. Но по формуле (57) эта работа равна C_2-C_1. Следовательно, $C_2>C_1$, т. е. *сила в потенциальном поле направлена в сторону возрастания силовой функции.* Далее, работы силы F_1 на перемещении BB' и силы F_2 на перемещении DD' одинаковы, так как равны C_2-C_1. Но поскольку $DD'<BB'$, то должно быть $F_2>F_1$. Следовательно, *величина силы в потенциальном поле больше там, где поверхности уровня проходят гуще.* Отмеченные свойства позволяют наглядно представить картину распределения сил в потенциальном силовом поле с помощью поверхностей уровня. Кроме того, как видно из равенства (57), работа потенциальной силы зависит в конечном счете только от того, с какой поверхности уровня и на какую происходит перемещение точки.

Поясним сказанное примерами.

1) Для однородного поля сил тяжести (см. рис. 254), как видно из формулы (59), $U=\text{const}$, когда $z=\text{const}$. Следовательно, поверхностями уровня являются горизонтальные плоскости. Сила тяжести P направлена по нормали к этим плоскостям в сторону возрастания U и во всех точках поля постоянна.

2) Для поля сил тяготения, согласно формуле (59''), $U=\text{const}$, когда $r=\text{const}$. Следовательно, поверхностями уровня являются концентрические сферы, центр которых совпадает с притягивающим центром. Сила в каждой точке поля направлена по нормали к соответствующей сфере в сторону возрастания U (убывания r), т. е. к центру сферы.

Если в потенциальном силовом поле движется с и с т е м а м а т е р и а л ь н ы х т о ч е к, то для каждой точки с координатами x_k, y_k, z_k можно определить свою силовую функцию $U_k(x_k, y_k, z_k)$, позволяющую вычислить элементарную работу силы, действующей на эту точку. Тогда функция от координат всех точек системы

$$U(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n)=\sum U_k(x_k, y_k, z_k)$$

будет силовой функцией для рассматриваемой механической системы.

При этом $dU = \sum dU_k$ или, согласно равенству (56), справедливому для каждой точки системы,

$$dU = \sum dA_k, \tag{62}$$

т. е. дифференциал силовой функции системы будет равен сумме элементарных работ всех действующих на систему сил.

§ 152. Потенциальная энергия. Для потенциальных сил можно ввести понятие о *потенциальной энергии*, как о величине, характеризующей «запас работы», которым обладает материальная точка в данном пункте силового поля. Чтобы сравнивать между собою эти «запасы работы», нужно условиться о выборе нулевой точки O, в которой мы будем условно считать «запас работы» равным нулю (выбор нулевой точки, как и всякого начала отсчета, производится произвольно). *Потенциальной энергией материальной точки в данном положении M называется скалярная величина Π, равная той работе, которую произведут силы поля при перемещении точки из положения M в нулевое:*

$$\Pi = A_{(MO)}.$$

Из определения следует, что потенциальная энергия Π зависит от координат x, y, z точки M, т. е., что $\Pi = \Pi(x, y, z)$.

Будем в дальнейшем считать нулевые точки для функций $\Pi(x, y, z)$ и $U(x, y, z)$ совпадающими. Тогда $U_O = 0$ и по формуле (57) $A_{(MO)} = U_O - U = -U$, где U — значение силовой функции в точке M поля. Отсюда

$$\Pi(x, y, z) = -U(x, y, z),$$

т. е. *потенциальная энергия в любой точке силового поля равна значению силовой функции в этой точке, взятому с обратным знаком.*

Отсюда видно, что при рассмотрении всех свойств потенциального силового поля вместо силовой функции можно пользоваться понятием потенциальной энергии. В частности, работу потенциальной силы вместо равенства (57) можно вычислять по формуле

$$A_{(M_1M_2)} = \Pi_1 - \Pi_2. \tag{63}$$

Следовательно, *работа потенциальной силы равна разности значений потенциальной энергии движущейся точки в начальном и конечном ее положениях.*

Выражения потенциальной энергии для известных нам потенциальных сил можно найти из равенств (59) — (59″), учитывая, что $\Pi = -U$. Так, для силы тяжести получим $\Pi = Pz$ и т. д.

§ 153. Закон сохранения механической энергии. Допустим, что все действующие на систему внешние и внутренние силы потенциальны. Тогда для каждой из точек системы работа приложенных сил равна:

$$A_k = \Pi_{k0} - \Pi_{k1}.$$

Следовательно, для всех внешних и внутренних сил

$$\sum A_k = \sum \Pi_{k0} - \sum \Pi_{k1} = \Pi_0 - \Pi_1,$$

где $\Pi = \sum \Pi_k$ — потенциальная энергия всей системы.

Подставляя это выражение работы в уравнение (50), получим:

$$T_1 - T_0 = \Pi_0 - \Pi_1$$

или

$$T_1 + \Pi_1 = T_0 + \Pi_0 = \text{const}.$$

Следовательно, *при движении под действием потенциальных сил сумма кинетической и потенциальной энергий системы в каждом ее положении остается величиной постоянной.* В этом и состоит *закон сохранения механической энергии,* являющийся частным случаем общего физического закона сохранения энергии. Величина $T + \Pi$ называется полной механической энергией системы.

Если в числе действующих сил будут непотенциальные силы, например силы трения, то полная механическая энергия системы во время движения будет убывать, преобразуясь в другие формы энергии, например в тепловую.

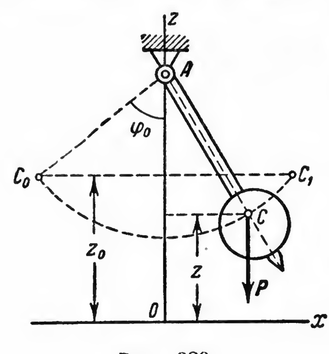


Рис. 329.

Все значение полученного закона выявляется при рассмотрении его в связи с общим физическим законом сохранения энергии. При решении же чисто механических задач можно во всех случаях непосредственно пользоваться теоремой об изменении кинетической энергии системы.

Пример. Рассмотрим маятник (рис. 329), отклоненный от вертикали на угол φ_0 и отпущенный без начальной скорости. Тогда в начальном его положении $\Pi_0 = Pz_0$ и $T_0 = 0$, где P — вес маятника, z — координата его центра тяжести. Следовательно, если пренебречь всеми сопротивлениями, то в любом другом положении будет $\Pi + T = \Pi_0$ или

$$Pz + \frac{1}{2} J_A \omega^2 = Pz_0.$$

Таким образом, выше положения z_0 центр тяжести маятника подняться не может. При опускании маятника его потенциальная энергия убывает, а кинетическая растет, при подъеме, наоборот, потенциальная энергия растет, а кинетическая убывает.

Из составленного уравнения следует, что

$$\omega^2 = \frac{2P}{J_A}(z_0 - z).$$

Таким образом, угловая скорость маятника в любой момент времени зависит только от положения, занимаемого его центром тяжести, и в данном положении всегда принимает одно и то же значение. Такого рода зависимости имеют место только при движении под действием потенциальных сил.

Благодаря трению в оси и сопротивлению воздуха (силы не потенциальные) полученные выше зависимости фактически выполняться не будут; полная механическая энергия маятника будет со временем убывать, а его колебания затухать.

ГЛАВА XXVIII

ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩИХ ТЕОРЕМ К ДИНАМИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 154. Вращательное движение твердого тела. Рассмотрим приложения общих теорем динамики к некоторым задачам о движении абсолютно твердого тела. Так как изучение поступательного движения твердого тела сводится к задачам динамики точки, то мы начнем непосредственно с рассмотрения вращательного движения.

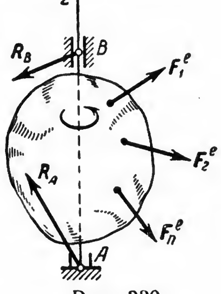


Рис. 330.

Пусть на твердое тело, имеющее неподвижную ось вращения z (рис. 330), действует система заданных сил $\boldsymbol{F}_1^e, \boldsymbol{F}_2^e, \ldots, \boldsymbol{F}_n^e$. Одновременно на тело действуют реакции подшипников $\boldsymbol{R}_A$ и $\boldsymbol{R}_B$. Чтобы исключить из уравнения движения эти наперед не известные силы, воспользуемся теоремой моментов относительно оси z (§ 144). Так как моменты сил $\boldsymbol{R}_A$ и $\boldsymbol{R}_B$ относительно оси z равны нулю, то получим:

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z^e,$$

где

$$M_z^e = \sum m_z(\boldsymbol{F}_k^e).$$

Будем в дальнейшем величину M_z^e называть *вращающим моментом*.

Подставляя в предыдущее равенство значение $K_z = J_z\omega$, найдем:

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = M_z^e \quad \text{или} \quad J_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_z^e. \tag{64}$$

Уравнение (64) представляет собою *дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела.* Из него следует, что *произведение момента инерции тела относительно оси вращения на угловое ускорение равно вращающему моменту*:

$$J_z\varepsilon = M_z^e. \tag{64'}$$

Равенство (64′) показывает, что при данном M_z^e чем больше момент инерции тела, тем меньше угловое ускорение и наоборот. Следовательно, момент инерции тела действительно играет при вращательном движении такую же роль, как масса при поступательном, т. е. является мерой инертности тела при вращательном движении (см. § 131).

Уравнение (64) позволяет: 1) зная вращающий момент, найти $\varphi = f(t)$, т. е. закон вращения тела или его угловую скорость ω; 2) зная закон вращения, т. е. $\varphi = f(t)$, найти вращающий момент M_z^e. При решении первой задачи следует иметь в виду, что в общем случае величина M_z^e может быть переменной и зависеть от t, φ и $\omega = \dot{\varphi}$.

Вместо уравнения (64) для изучения вращательного движения можно также пользоваться теоремой об изменении кинетической энергии: $T_1 - T_0 = A^e$, где T и A^e определяются по формулам (43) и (47).

Отметим следующие частные случаи:

1) Если $M_z^e = 0$, то $\omega = \text{const}$, т. е. тело вращается *равномерно.*

2) Если $M_z^e = \text{const}$, то и $\varepsilon = \text{const}$, т. е. тело вращается *равнопеременно.*

Уравнение (64) по своему виду аналогично дифференциальному уравнению прямолинейного движения точки (§ 104). Поэтому и методы интегрирования этих уравнений также аналогичны (см. задачу 143).

При решении задач уравнением (64) целесообразно пользоваться тогда, когда система состоит *только* из одного вращающегося тела. Если в системе кроме одного вращающегося тела есть еще другие движущиеся тела (см., например, задачи 133, 138 и т. п.), то уравнение движения лучше составлять с помощью общих теорем или методов, изложенных в §§ 168, 173, 178.

При решении задач, аналогичных задаче 133, следует иметь в виду, что на барабан действует не сила $\boldsymbol{Q}$, а натяжение веревки F, не равное $\boldsymbol{Q}$, и уравнение (64) для барабана имеет вид $J_O\varepsilon = Fr$. Для его решения надо дополнительно определить силу F, составив уравнение движения груза A, что удлиняет расчет.

Задача 142. Колесо массы M вращается вокруг оси O с угловой скоростью ω_0 (рис. 331). В некоторый момент к колесу прижимается тормозная колодка с силой Q. Коэффициент трения колодки о колесо равен f, радиус колеса равен R. Пренебрегая трением в оси и массой спиц, определить, через сколько секунд колесо остановится.

Решение. Составляя уравнение (64) и считая момент положительным в случае, если он направлен в сторону вращения колеса, получим:

$$J_O \frac{d\omega}{dt} = -fQr, \tag{а}$$

так как сила трения $F = fQ$. Отсюда, интегрируя, находим:

$$J_O\omega = -fQrt + C_1.$$

По начальным данным, при $t=0$ $\omega=\omega_0$, следовательно, $C_1 = J_O\omega_0$, и окончательно

$$\omega = \omega_0 - \frac{fQr}{J_O}t. \tag{б}$$

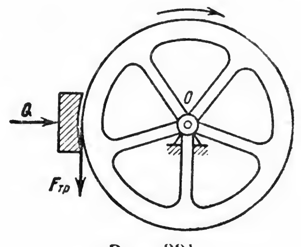


Рис. 331.

В момент остановки, когда $t = t_1$, $\omega = 0$. Подставляя значение $\omega = 0$ в уравнение (б) и учитывая, что для обода (кольца) $J_O = Mr^2$, получим:

$$t_1 = \frac{J_O\omega_0}{fQr} = \frac{Mr\omega_0}{fQ}.$$

Если понадобится найти число оборотов, сделанных колесом до остановки, то это проще сделать, не интегрируя еще раз уравнение (б), а применив теорему об изменении кинетической энергии.

Задача 143. Вертикальный цилиндрический ротор, момент инерции которого относительно оси Oz равен J_z (рис. 332), приводится во вращение приложенным к нему моментом $M_{вр}$. Найти, как изменяется при движении угловая скорость ротора ω, если $\omega_0 = 0$, а момент сил сопротивления воздуха пропорционален ω, т. е. $M_{сопр} = \mu\omega$.

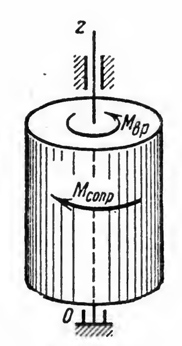


Рис. 332.

Решение. Дифференциальное уравнение вращения ротора (64) имеет вид (считаем положительными моменты, направленные в сторону вращения):

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = M_{вр} - \mu\omega.$$

Разделяя переменные и полагая $\frac{\mu}{J_z} = n$, возьмем от обеих частей равенства соответствующие определенные интегралы; получим

$$\int_0^\omega \frac{-\mu\, d\omega}{M_{вр} - \mu\omega} = -n\int_0^t dt.$$

Отсюда

$$\ln \frac{M_{вр} - \mu\omega}{M_{вр}} = -nt \quad \text{или} \quad \frac{M_{вр} - \mu\omega}{M_{вр}} = e^{-nt}.$$

Окончательно будем иметь:

$$\omega = \frac{M_{\text{вр}}}{\mu}(1 - e^{-nt}).$$

Угловая скорость ротора со временем возрастает, стремясь к предельному значению

$$\omega_{\text{пр}} = \frac{M_{\text{вр}}}{\mu}.$$

§ 155. Физический маятник. *Физическим маятником* называется твердое тело, которое может совершать колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси под действием силы тяжести.

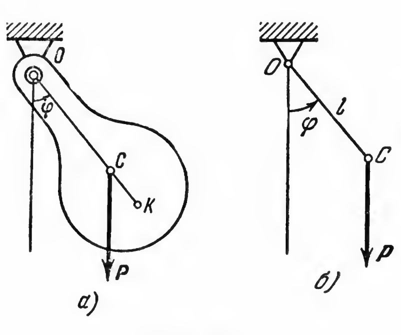


Рис. 333.

Изобразим сечение маятника плоскостью, перпендикулярной оси подвеса и проходящей через центр масс маятника C (рис. 333, *а*).

Введем обозначения: P — вес маятника, a — расстояние OC от центра масс до оси подвеса, J_O — момент инерции маятника относительно оси подвеса. Положение маятника будем определять углом φ отклонения линии OC от вертикали.

Для определения закона колебаний маятника воспользуемся дифференциальным уравнением вращательного движения (64). В данном случае $M_z = M_O = -Pa \sin \varphi$ (знак минус взят потому, что при $\varphi > 0$ момент отрицателен, а при $\varphi < 0$ — положителен) и уравнение (64) принимает вид:

$$J_O \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -Pa \sin \varphi.$$

Деля обе части равенства на J_O и вводя обозначение

$$\frac{Pa}{J_O} = k^2,$$

найдем дифференциальное уравнение колебаний маятника в виде

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + k^2 \sin \varphi = 0.$$

Полученное дифференциальное уравнение в обычных функциях не интегрируется. Ограничимся рассмотрением *малых колебаний*

маятника, считая приближенно $\sin\varphi \approx \varphi$ (это можно сделать, когда угол φ меньше одного радиана). Тогда будем иметь

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + k^2\varphi = 0.$$

Это дифференциальное уравнение совпадает по виду с дифференциальным уравнением свободных прямолинейных колебаний точки, и его общее решение по аналогии с равенством (63) из § 123 имеет вид:

$$\varphi = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt.$$

Полагая, что в начальный момент $t = 0$ маятник отклонен на малый угол $\varphi = \varphi_0$ и отпущен без начальной скорости ($\omega_0 = 0$), найдем для постоянных интегрирования значения: $C_1 = 0$, $C_2 = \varphi_0$. Тогда закон малых колебаний маятника при данных начальных условиях будет:

$$\varphi = \varphi_0 \cos kt.$$

Следовательно, малые колебания физического маятника являются гармоническими. Период малых колебаний физического маятника, если заменить k его значением, определяется формулой:

$$T_{ф} = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{J_O}{Pa}}. \tag{65}$$

Как видим, для малых колебаний период от угла начального отклонения φ_0 не зависит. Этот результат является приближенным. Если проинтегрировать составленное вначале дифференциальное уравнение колебаний маятника, не считая в нем угол φ малым (т. е. не полагая $\sin\varphi \approx \varphi$), то можно убедиться, что $T_{ф}$ зависит от φ_0. Приближенно эта зависимость имеет вид

$$T_{ф} \approx 2\pi \sqrt{\frac{J_O}{Pa}} \left(1 + \frac{\varphi_0^2}{16}\right).$$

Отсюда, например, следует, что при $\varphi_0 = 0{,}4$ радиана (около 23°) формула (65) определяет период с точностью до 1%.

Полученные результаты охватывают и случай так называемого *математического маятника*, т. е. груза малых размеров (который будем рассматривать как материальную точку), подвешенного на нерастяжимой нити длиной l, массой которой, по сравнению с массой груза, можно пренебречь (рис. 333, *б*). Для математического маятника, так как он представляет собой систему, состоящую из одной материальной точки, очевидно, будет

$$J_O = ml^2 = \frac{P}{g} l^2, \qquad a = OC = l.$$

Подставляя эти величины в равенство (65), найдем, что период малых колебаний математического маятника определяется формулой

$$T_м = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (65')$$

Из сравнения формул (65) и (65′) видно, что при длине

$$l_1 = \frac{J_O g}{Pa} = \frac{J_O}{Ma} \qquad (66)$$

период колебаний математического маятника совпадает с периодом колебаний соответствующего физического маятника.

Длина l_1 такого математического маятника, период колебаний которого равен периоду колебаний данного физического маятника, называется *приведенной длиной физического маятника.* Точка K, отстоящая от оси подвеса на расстоянии $OK = l_1$, называется *центром качаний* физического маятника (см. рис. 333).

Замечая, что по теореме Гюйгенса $J_O = J_C + Ma^2$, мы можем привести формулу (66) к виду

$$l_1 = a + \frac{J_C}{Ma}. \qquad (66')$$

Отсюда следует, что расстояние OK всегда больше чем $OC = a$, т. е. что центр качаний физического маятника всегда расположен ниже его центра масс.

Из формулы (66′) видно, что $KC = J_C/Ma$. Поэтому, если поместить ось подвеса в точке K, то приведенная длина l_2 полученного маятника согласно (66′) будет равна

$$l_2 = KC + \frac{J_C}{M \cdot KC} = \frac{J_C}{Ma} + a = l_1.$$

Следовательно, точки K и O являются взаимными, т. е. если ось подвеса будет проходить через точку K, то центром качаний будет точка O (так как $l_2 = l_1$) и период колебаний маятника не изменится. Это свойство используется в так называемом оборотном маятнике, который служит для определения ускорения силы тяжести.

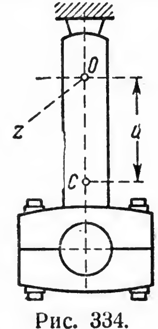
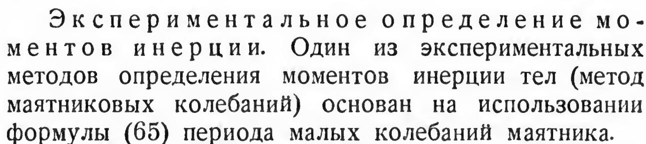
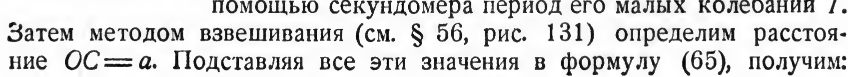


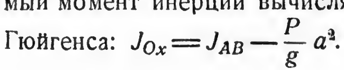
Рис. 334.


Экспериментальное определение моментов инерции. Один из экспериментальных методов определения моментов инерции тел (метод маятниковых колебаний) основан на использовании формулы (65) периода малых колебаний маятника.

Пусть требуется определить момент инерции относительно оси Oz изображенного на рис. 334 тела (шатуна), вес которого P известен. Подвесив тело так, чтобы ось Oz была горизонтальна, найдем с


помощью секундомера период его малых колебаний T. Затем методом взвешивания (см. § 56, рис. 131) определим расстояние $OC = a$. Подставляя все эти значения в формулу (65), получим:

$$J_{Oz} = \frac{PaT^2}{4\pi^2}.$$

Если требуется определить момент инерции тела относительно оси Ox, проходящей через его центр тяжести, то тело можно подвесить на двух жестко прикрепленных к телу штангах (стержнях) так, чтобы ось Ox была горизонтальна (рис. 335), и найти экспериментально момент инерции J_{AB} относительно оси AB (величина a в этом случае наперед известна). После этого искомый момент инерции вычисляется по теореме Гюйгенса:  $J_{Ox} = J_{AB} - \frac{P}{g} a^2$.

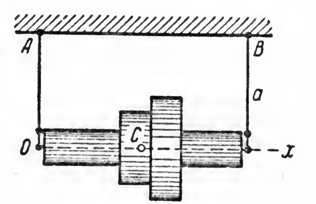


Рис. 335.

§ 156. Плоскопараллельное движение твердого тела.

Положение тела, совершающего плоскопараллельное движение, определяется в любой момент времени положением полюса и углом поворота тела вокруг полюса (§ 77). Задачи динамики будут решаться проще всего, если за полюс взять центр масс C тела (рис. 336) и определять положение тела координатами x_C, y_C и углом φ.

На рис. 361 изображено сечение тела плоскостью, параллельной плоскости движения и проходящей через центр масс C. Пусть на тело действуют внешние силы $\boldsymbol{F}_1^e$, $\boldsymbol{F}_2^e, \ldots, \boldsymbol{F}_n^e$, лежащие в плоскости этого сечения. Тогда уравнения движения точки C найдем по теореме о движении центра масс

$$M\boldsymbol{w}_C = \sum \boldsymbol{F}_k^e, \qquad (67)$$

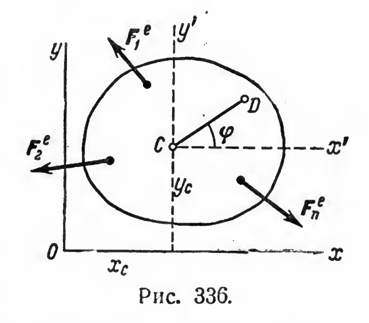


Рис. 336.

а вращательное движение вокруг центра C будет определяться уравнением (64), так как теорема, из которой получено это уравнение, справедлива и для движения системы вокруг центра масс. В результате, проектируя обе части равенства (67) на координатные оси, получим:

$$Mw_{Cx} = \sum F_{kx}^e, \qquad Mw_{Cy} = \sum F_{ky}^e, \qquad J_C \cdot \varepsilon = \sum m_C(\boldsymbol{F}_k^e) \qquad (68)$$

или

$$M\frac{d^2x_C}{dt^2} = \sum F_{kx}^e, \qquad M\frac{d^2y_C}{dt^2} = \sum F_{ky}^e, \quad J_C\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum m_C(\boldsymbol{F}_k^e). \qquad (68')$$

Уравнения (68) представляют собой *дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твердого тела*. С их помощью можно по заданным силам определить закон движения тела или, зная закон движения тела, найти главный вектор и главный момент действующих сил.

При несвободном движении, когда траектория центра масс известна, уравнения движения точки C удобнее составлять в проекциях на касательную τ и главную нормаль n к этой траектории. Тогда вместо системы (68) получим:

$$M\frac{dv_C}{dt}=\sum F_{k\tau}^e,\quad M\frac{v_C^2}{\rho_C}=\sum F_{kn}^e,\quad J_C\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\sum m_C(F_k^e),\qquad (69)$$

где ρ_C — радиус кривизны траектории центра масс.

Заметим, что если движение является несвободным, то в правые части уравнений (68) или (69) войдут еще неизвестные реакции связей. Для их определения надо будет составить дополнительные уравнения, отражающие те условия, которые налагаются на движение тела связями (см. задачу 144 и др.). Часто уравнения несвободного движения будут составляться проще с помощью теоремы об изменении кинетической энергии, которой можно воспользоваться вместо одного из уравнений (68) или (69).

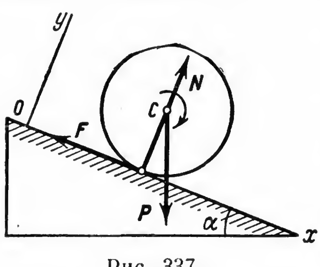


Рис. 337.

Задача 144. Сплошной однородный круговой цилиндр скатывается по наклонной плоскости без скольжения (рис. 337). Определить ускорение центра цилиндра и наименьший коэффициент трения цилиндра о плоскость, при котором возможно качение без скольжения. Сопротивлением качению пренебречь.

Решение. Обозначим: угол наклона плоскости α, вес цилиндра P, его радиус R, наименьшую силу трения, при которой возможно качение, F. Направим ось Ox вдоль наклонной плоскости, ось Oy перпендикулярно к ней.

Так как вдоль оси Oy центр масс цилиндра не перемещается, то $w_{Cy}=0$ и, согласно первому из уравнений (68), сумма проекций всех сил на эту ось также равна нулю. Таким образом,

$$N=P\cos\alpha.$$

Составляя остальные два уравнения системы (68), учтем, что $w_{Cx}=w_C$. Пренебрегая сопротивлением качению и считая положительным направлением момента силы направление в сторону вращения цилиндра, найдем:

$$Mw_C=P\sin\alpha-F,\qquad J_C\varepsilon=FR.\qquad (а)$$

Уравнения (а) содержат 3 неизвестных w_C, ε и P (здесь нельзя считать $F=fN$, так как это равенство имеет место, когда точка касания *скользит* вдоль плоскости, а при отсутствии скольжения может быть $F\leqslant fN$; см. § 37). Дополнительную зависимость между неизвестными величинами найдем, учитывая, что при чистом качении $v_C=\omega R$, откуда, дифференцируя, получим $w_C=\varepsilon R$. Тогда второе из равенств (а), если учесть, что для сплошного цилиндра $J_C=0{,}5MR^2$, примет вид

$$\frac{1}{2}Mw_C=F.\qquad (б)$$

Подставляя это значение F в первое из равенств (а), получим:

$$w_C = \frac{2}{3} g \sin \alpha. \qquad \text{(в)}$$

Теперь из выражения (б) находим

$$F = \frac{1}{3} P \sin \alpha. \qquad \text{(г)}$$

Такая сила трения должна действовать на катящийся цилиндр, чтобы он катился без скольжения. Выше было указано, что $F \leqslant fN$. Следовательно, чистое качение будет происходить, когда

$$\frac{1}{3} P \sin \alpha \leqslant fP \cos \alpha \qquad \text{или} \qquad f \geqslant \frac{1}{3} \operatorname{tg} \alpha.$$

Если коэффициент трения будет меньше этой величины, то сила F не может принять значения, определяемого равенством (г), и цилиндр будет катиться с проскальзыванием. В этом случае v_C и ω не связаны зависимостью $v_C = \omega R$ (точка касания не является мгновенным центром скоростей), но зато величина F имеет предельное значение, т. е. $F = fN = fP \cos \alpha$, и уравнения (а) принимают вид

$$\frac{P}{g} w_C = P (\sin \alpha - f \cos \alpha), \qquad \frac{1}{2} \frac{P}{g} R^2 \varepsilon = fPR \cos \alpha,$$

откуда

$$w_C = g (\sin \alpha - f \cos \alpha); \qquad \varepsilon = \frac{2gf}{R} \cos \alpha. \qquad \text{(д)}$$

Центр цилиндра в этом случае движется с ускорением w_C, а сам цилиндр вращается с угловым ускорением ε, значения которых определяются равенствами (д).

Задача 145. Решить предыдущую задачу с учетом сопротивления качению, считая коэффициент трения качения равным k.

Решение. Чтобы дать пример применения другого метода расчета, найдем w_C с помощью теоремы об изменении кинетической энергии, т. е. уравнения

$$dT = dA^e. \qquad \text{(а)}$$

В данном случае (см. задачу 134, § 147)

$$T = \frac{3}{4} M v_C^2.$$

Работу совершают только сила P и момент сопротивления; работа силы F при качении равна нулю (см. § 148). Тогда, учитывая формулу (48), получим (см. рис. 337, на котором теперь надо считать силу N смещенной в сторону движения на величину k, т. е. расположенной так, как на рис. 99)

$$dA^e = P \sin \alpha \cdot ds_C - \frac{k}{R} N \, ds_C = P \left(\sin \alpha - \frac{k}{R} \cos \alpha \right) ds_C.$$

Подставляя найденные значения в равенство (а) и деля обе его части на dt, будем иметь

$$\frac{3}{2} \frac{P}{g} v_C \frac{dv_C}{dt} = P \left(\sin \alpha - \frac{k}{R} \cos \alpha \right) \frac{ds_C}{dt}.$$

Последний множитель в правой части равен v_C, и окончательно находим:

$$w_C = \frac{2}{3} g \left(\sin\alpha - \frac{k}{R} \cos\alpha \right).$$

При $k=0$ формула дает результат предыдущей задачи.

Силу трения теперь можно найти из уравнения $Mw_C = P\sin\alpha - F$, которое не меняет своего вида.

Задача 146. По шероховатой цилиндрической поверхности радиуса R (рис. 338) из положения, определяемого углом φ_0, начинает катиться без скольжения сплошной цилиндр веса P и радиуса r.

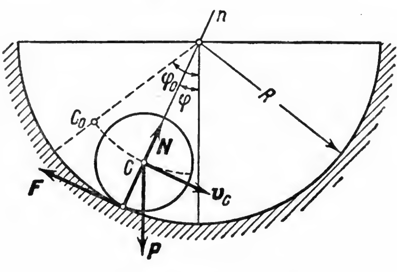


Рис. 338.

Определить: 1) силу давления цилиндра на поверхность при произвольном угле φ; 2) закон движения центра цилиндра, когда угол φ_0 мал. Сопротивлением качению пренебречь.

Решение. 1) На цилиндр в произвольном положении действуют сила P, нормальная реакция N и сила трения F, без которой качение невозможно. Траектория центра C нам известна; это окружность радиуса $R-r$. Тогда для определения N воспользуемся вторым из уравнений (69). Направляя нормаль Cn *в сторону вогнутости траектории*, получим:

$$M\frac{v_C^2}{R-r} = N - P\cos\varphi. \qquad (а)$$

Входящую сюда величину v_C найдем по теореме об изменении кинетической энергии (сравн. с § 119):

$$T - T_0 = \sum A_k^e. \qquad (б)$$

В данном случае $T_0 = 0$, а $T = \frac{3}{4} Mv_C^2$ (см. задачу 134). Работу совершает только сила P. Следовательно,

$$\sum A_k^e = Ph = P(R-r)(\cos\varphi - \cos\varphi_0),$$

и уравнение (б) принимает вид

$$\frac{3}{4} Mv_C^2 = P(R-r)(\cos\varphi - \cos\varphi_0). \qquad (в)$$

Вычисляя отсюда величину Mv_C^2 и подставляя ее в равенство (а), найдем окончательно

$$N = \frac{P}{3}(7\cos\varphi - 4\cos\varphi_0).$$

Если, например, $\varphi_0 = 60°$, а $\varphi = 0°$, то $N = \frac{5}{3}P$.

2) Для определения закона движения точки C продифференцируем равенство (в) по времени. Получим:

$$\frac{3}{2}\frac{P}{g} v_C \frac{dv_C}{dt} = -P(R-r)\sin\varphi \frac{d\varphi}{dt}.$$

В данном случае при движении цилиндра угол φ убывает и $\frac{d\varphi}{dt} < 0$. Тогда

$$v_C = (R-r)\left|\frac{d\varphi}{dt}\right| = -(R-r)\frac{d\varphi}{dt}, \qquad \frac{dv_C}{dt} = -(R-r)\frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Подставляя все эти значения в предыдущее равенство, найдем окончательно:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{2}{3}\frac{g}{R-r}\sin\varphi = 0.$$

Если угол φ_0 мал, то, так как $\varphi \leqslant \varphi_0$, можно считать $\sin\varphi \approx \varphi$, и полученное уравнение примет вид

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + k^2\varphi = 0,$$

где

$$k^2 = \frac{2}{3}\frac{g}{R-r}.$$

Следовательно (см. § 123), центр цилиндра совершает гармонические колебания с периодом

$$\tau = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{3(R-r)}{2g}}.$$

Задача 147. Тело весом P опирается в точке B на пьезоэлектрический датчик прибора, измеряющего силу давления, а в точке A поддерживается нитью AD (рис. 339). При равновесии линия AC горизонтальна, а давление в точке B равно Q_0. Вычислить, чему равен момент инерции J_C тела относительно оси, проходящей через его центр масс C, если в момент, когда нить пережигают, давление в точке B становится равным Q_1. Расстояние l известно.

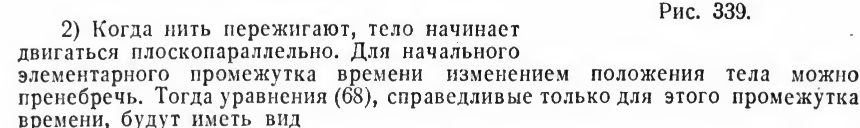


Рис. 339.

Решение. 1) В положении равновесия $Q_0 l = P(l-a)$. Отсюда находим:

$$a = \frac{P-Q_0}{P}l.$$

2) Когда нить пережигают, тело начинает двигаться плоскопараллельно. Для начального элементарного промежутка времени изменением положения тела можно пренебречь. Тогда уравнения (68), справедливые только для этого промежутка времени, будут иметь вид

$$Mw_{Cx} = P - Q_1, \qquad w_{Cy} = 0, \qquad J_C\varepsilon = Q_1 a. \tag{a}$$

Так как $w_{Cy} = 0$, то точка C начинает перемещаться по вертикали вниз, а точка B скользит горизонтально (трение в опоре считаем малым). Восставляя перпендикуляры к направлениям этих перемещений, находим, что мгновенный центр скоростей будет в точке K. Следовательно, $v_C = a\omega$. Дифференцируя это равенство и считая в течение рассматриваемого элементарного промежутка времени $a = \text{const}$, получим $w_C = a\varepsilon$. Тогда первое из уравнений (a) дает:

$$\frac{P}{g}a\varepsilon = P - Q_1.$$

Определяя отсюда ε, найдем окончательно

$$J_C = \frac{Q_1 a}{\varepsilon} = \frac{P}{g} \frac{Q_1}{P - Q_1} a^2.$$

Полученный результат можно использовать для экспериментального определения моментов инерции.

Задача 148. Вес автомобиля с колесами равен P (рис. 340); вес каждого из четырех его колес равен p, а радиус r.

К задним (ведущим) колесам приложен вращающий момент $M_{\text{вр}}$. Автомобиль, начиная движение из состояния покоя, испытывает сопротивление воздуха, пропорциональное квадрату его поступательной скорости: $R = \mu v^2$. Момент трения в оси каждого колеса равен $M_{\text{тр}}$. Пренебрегая сопротивлением качению, определить: 1) предельную скорость автомобиля; 2) силу трения скольжения, действующую на ведущие и ведомые колеса при движении.

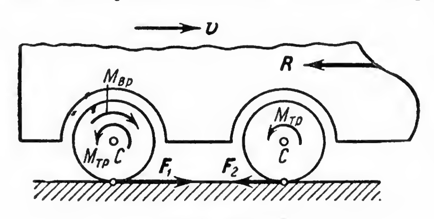


Рис. 340.

Решение. 1) Для определения предельной скорости составим дифференциальное уравнение движения автомобиля, пользуясь равенством (49)

$$dT = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i. \qquad \text{(а)}$$

Кинетическая энергия автомобиля равна энергии кузова и колес. Учитывая, что P — вес всего автомобиля, а $v_C = \omega r$, и обозначая радиус инерции колеса через $\rho_{\text{и}}$, получим:

$$T = \frac{1}{2} \frac{P}{g} v_C^2 + 4\left(\frac{1}{2} J_C \omega^2\right) = \frac{1}{2g}\left(P + 4p\frac{\rho_{\text{и}}^2}{r^2}\right) v_C^2.$$

Из внешних сил работу совершает только сила сопротивления воздуха, так как сопротивлением качению мы пренебрегаем, а работа сил трения F_1 и F_2 колес о грунт равна в этом случае нулю (§ 148). Следовательно,

$$\sum dA_k^e = -R\, ds_C = -\mu v_C^2\, ds_C.$$

Работа внутренних сил (вращающего момента и сил трения в осях) равна

$$\sum dA_k^i = (M_{\text{вр}} - 4M_{\text{тр}})\, d\varphi = (M_{\text{вр}} - 4M_{\text{тр}}) \frac{ds_C}{r}.$$

Подставляя все эти значения в равенство (а) и деля одновременно обе его части на dt, получим:

$$\frac{1}{g}\left(P + 4p\frac{\rho_{\text{и}}^2}{r^2}\right) v_C \frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{r}(M_{\text{вр}} - 4M_{\text{тр}} - \mu r v_C^2) \frac{ds_C}{dt}.$$

Отсюда, сокращая на $v_C = \frac{ds_C}{dt}$, находим:

$$\left(P + 4p\frac{\rho_{\text{и}}^2}{r^2}\right) w_C = \frac{g}{r}(M_{\text{вр}} - 4M_{\text{тр}} - \mu r v_C^2). \qquad \text{(б)}$$

Когда скорость автомобиля стремится к ее предельному значению, ускорение w_C стремится к нулю. Следовательно, $v_C^{\text{пр}}$ найдется из уравнения

$$M_{\text{вр}} - 4M_{\text{тр}} - \mu r v_C^2 = 0,$$

откуда

$$v_C^{\text{пр}} = \sqrt{\frac{M_{\text{вр}} - 4M_{\text{тр}}}{\mu r}}.$$

Этот результат можно получить сразу, приравняв нулю сумму работ всех сил. Цель предыдущих выкладок — показать, как составляется уравнение движения (б).

2) Для определения сил трения, действующих на каждое колесо, составим уравнения вращательного движения колес относительно их осей. Для ведущих колес, учитывая, что действующая на каждое из них сила трения F_1 направлена *вперед* (см. § 136, рис. 301), получим:

$$2\frac{p}{g}\rho_{\text{и}}^2\varepsilon = M_{\text{вр}} - 2M_{\text{тр}} - 2F_1 r.$$

Так как при качении $w_C = \varepsilon r$, то окончательно найдем

$$F_1 = \frac{0{,}5M_{\text{вр}} - M_{\text{тр}}}{r} - \frac{\rho_{\text{и}}^2}{r^2}\frac{p}{g}w_C. \qquad \text{(в)}$$

Действующая на каждое из ведомых колес сила трения F_2 направлена *назад*. Следовательно, для ведомого колеса будем иметь:

$$\frac{p}{g}\rho_{\text{и}}^2\varepsilon = F_2 r - M_{\text{тр}},$$

откуда

$$F_2 = \frac{M_{\text{тр}}}{r} + \frac{\rho_{\text{и}}^2}{r^2}\frac{p}{g}w_C. \qquad \text{(г)}$$

Из равенства (б) видно, что с увеличением скорости ускорение w_C убывает, стремясь к нулю, когда v_C стремится к $v_C^{\text{пр}}$. Таким образом, сила трения, действующая на ведущие колеса, при разгоне несколько возрастает и достигает наибольшего значения, когда движение установится ($w_C = 0$). Если подставить значение w_C из равенства (б), то легко видеть, что последнее слагаемое в формуле (в) будет много меньше первого, так как $P \gg p$. Поэтому практически величина F_1 изменяется незначительно.

На ведомых колесах сила трения имеет наибольшее значение в момент начала движения, а затем убывает и при равномерном движении ($w_C = 0$) равна наименьшему значению $M_{\text{тр}}/r$.

Если коэффициент трения колес о грунт не будет достаточен для того, чтобы сила трения могла принять значение F_1 и F_2, то соответствующие колеса будут буксовать. Так как $M_{\text{вр}}$ много больше $M_{\text{тр}}$, то в первую очередь буксование угрожает ведущим колесам.

При выключенном двигателе все колеса являются ведомыми и на них вначале будет действовать сила трения $F = M_{\text{тр}}/r$. Действие тормозных колодок эквивалентно увеличению момента $M_{\text{тр}}$ в осях, а следовательно, и силы трения, действующей на каждое из колес, чем и ускоряется торможение автомобиля (см. § 136).

§ 157*. Приближенная теория гироскопических явлений. Гироскопом называют твердое тело, вращающееся вокруг оси, направление которой в пространстве может со временем изменяться. В дальнейшем

мы будем рассматривать только симметричный гироскоп, т. е. гироскоп, имеющий ось материальной симметрии и вращающийся вокруг этой оси. В гироскопических приборах гироскопы обычно закрепляют в кольцевом подвесе (рис. 341) так, что при любом повороте гироскопа его центр тяжести остается неподвижным.

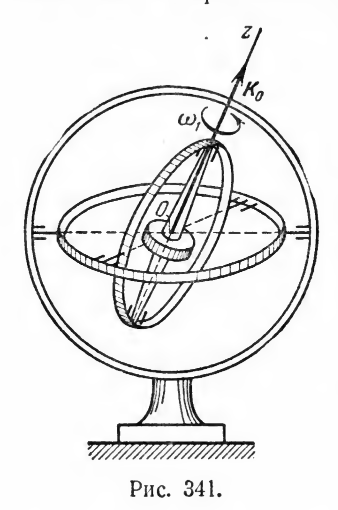


Рис. 341.

Применяемые в технике гироскопы имеют очень большую угловую скорость собственного вращения ω_1 вокруг своей оси симметрии. Это позволяет не учитывать в первом приближении дополнительные вращения, которые гироскоп получает при движении его оси, и построить приближенную теорию гироскопических явлений.

В § 143 было установлено, что если тело вращается вокруг *неподвижной* оси Oz, являющейся осью симметрии тела, то вектор $\boldsymbol{K}_O$ направлен по оси вращения и вычисляется по формуле (32). Основное допущение элементарной теории гироскопа состоит в том, что и при медленном *движении* оси в любой момент времени кинетический момент гироскопа относительно его неподвижной точки (вектор $\boldsymbol{K}_O$) считается направленным по оси гироскопа в ту же сторону, куда и вектор $\boldsymbol{\omega}_1$, и численно равным $J_z\omega_1$:

$$K_O = K_z = J_z\omega_1, \tag{70}$$

где J_z — момент инерции гироскопа относительно его оси симметрии. Это допущение тем более справедливо, чем быстрее вращается гироскоп. Найдем, исходя из принятого допущения, каковы основные свойства гироскопа.

1. Свободный гироскоп. Гироскоп, закрепленный так, что его центр тяжести неподвижен, а ось может совершать любой поворот вокруг этого центра (см. рис. 341), называется *свободным*. Для такого гироскопа, пренебрегая трением в осях подвеса, будем иметь $\sum m_O(\boldsymbol{F}_k^e) = 0$ [1]) и $\boldsymbol{K}_O = \text{const}$, т. е. модуль и направление кинети-

[1]) В число сил $\boldsymbol{F}_k^e$ здесь входят сила тяжести и реакции подшипников, в которых закреплена ось гироскопа. Когда гироскоп неподвижен, равенство $\sum \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_k^e) = 0$ имеет место как одно из условий равновесия. При вращении же гироскопа вокруг его оси симметрии реакции сохраняют те же значения, что и при покое (это доказывается в § 169); следовательно, силы, действующие на вращающийся гироскоп, тоже удовлетворяют уравнению $\sum \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_k^e) = 0$.

ческого момента гироскопа постоянны (см. § 145). Но так как вектор $\boldsymbol{K}_O$ направлен все время по оси гироскопа, то отсюда следует, что *ось свободного гироскопа сохраняет неизменное направление в пространстве по отношению к инерциальной (звездной) системе отсчета.* Это одно из важных свойств гироскопа, используемое при конструировании гироскопических приборов.

Сохраняя неизменное направление в звездной системе отсчета, ось свободного гироскопа по отношению к Земле будет совершать вращение в сторону, противоположную направлению вращения Земли. Таким образом, свободный гироскоп можно использовать для доказательства факта вращения Земли вокруг ее оси. Впервые подобный опыт произвел Фуко (1852 г.).

2. Действие силы на ось гироскопа. Пусть на ось быстро вращающегося гироскопа начинает действовать сила $\boldsymbol{F}$ (рис. 342), момент которой относительно центра O равен по модулю $M_O = Fh$. Тогда по теореме моментов (§ 144)

$$\frac{d\boldsymbol{K}_O}{dt} = \boldsymbol{M}_O \quad \text{или} \quad \frac{d\,(\overline{OB})}{dt} = \boldsymbol{M}_O,$$

где B — точка оси, совпадающая с концом вектора $\boldsymbol{K}_O$. Отсюда, учитывая, что производная от вектора $\overline{OB}$ по времени равна скорости $\boldsymbol{v}_B$ точки B, получаем:

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{M}_O. \quad (71)$$

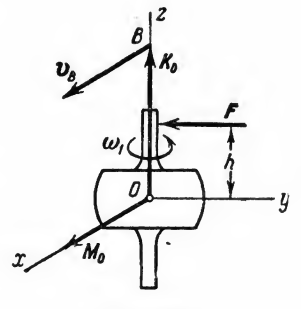
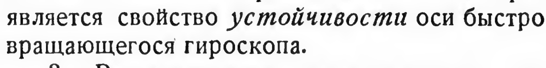


Рис. 342.

Равенство (71) указывает, что *скорость конца вектора кинетического момента тела относительно центра O равняется по модулю и по направлению главному моменту внешних сил относительно того же центра* (теорема Резаля). Следовательно, точка B, а с нею и ось гироскопа будет перемещаться по направлению вектора $\boldsymbol{M}_O$. В результате находим, что *если на ось быстро вращающегося гироскопа подействует сила, то ось начнет отклоняться не в сторону действия силы, а по направлению, которое имеет вектор* $\boldsymbol{M}_O$ *момента этой силы относительно неподвижной точки O гироскопа, т. е. перпендикулярно силе* (о том, как определяется направление вектора $\boldsymbol{M}_O$, см. § 42).

Заметим, что если бы гироскоп вращался в другую сторону (см. рис. 342), то вектор $\boldsymbol{\omega}_1$, а с ним и вектор $\boldsymbol{K}_O$, приложенный в точке O, были бы направлены вниз; тогда нижний конец оси гироскопа отклонялся бы в сторону $\boldsymbol{M}_O$, т. е. к нам, а верхний — за чертеж.

Из равенства (71) следует еще один важный результат. Когда действие силы прекращается, то $\boldsymbol{M}_O$, а следовательно, и $\boldsymbol{v}_B$ обращаются в нули и ось гироскопа останавливается. Таким образом,

гироскоп не сохраняет движения, сообщенного ему силой. Если действие силы является кратковременным (толчок), то ось гироскопа практически почти не изменяет своего направления. В этом про-

является свойство *устойчивости* оси быстро вращающегося гироскопа.

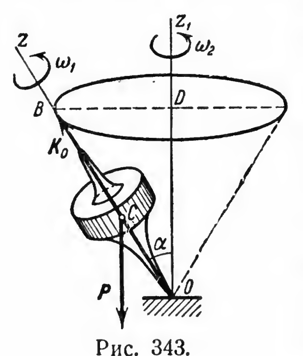


Рис. 343.

3. Регулярная прецессия тяжелого гироскопа. Рассмотрим гироскоп, у которого неподвижная точка O не совпадает с центром тяжести C (рис. 343). Тогда на ось гироскопа будет все время действовать сила $\boldsymbol{P}$, которая, по доказанному выше, будет отклонять ось Oz гироскопа не вниз (не в сторону увеличения угла α), а по направлению $\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{P})$, т. е. по направлению, перпендикулярному к плоскости Ozz_1. В результате ось гироскопа начнет вращаться вокруг вертикальной оси Oz_1, описывая коническую поверхность. Такое движение оси гироскопа называется *прецессией*.

Найдем угловую скорость прецессии ω_2. По уравнению (71) должно быть $v_B = M_O$. Вводя обозначение $OC = a$, получим, что в данном случае $M_O = Pa \sin a$. С другой стороны, $v_B = \omega_2 \cdot BD = \omega_2 \cdot OB \sin \alpha = \omega_2 K_O \sin \alpha$ или, учитывая равенство (70),

$$v_B = J_z \omega_1 \omega_2 \sin \alpha.$$

Следовательно, равенство $v_B = M_O$ дает $J_z \omega_1 \omega_2 \sin \alpha = Pa \sin \alpha$, откуда

$$\omega_2 = \frac{Pa}{J_z \omega_1}. \tag{72}$$

Так как величина ω_1 велика, то угловая скорость прецессии будет величиной малой. С уменьшением ω_1 величина ω_2 увеличивается, что видно на примере детского волчка.

Аналогичную прецессию совершает земная ось, так как вследствие отклонения формы Земли от правильной шарообразной и наклона ее оси равнодействующие сил притяжений Солнца и Луны не проходят через центр масс Земли и создают относительно этого центра некоторые моменты. Период прецессии земной оси (время одного оборота) равняется приблизительно 26 000 лет.

4. Гироскопический эффект. Рассмотрим быстро вращающийся гироскоп, укрепленный с помощью подшипников A и A' в кольце, которое в свою очередь может вращаться с некоторой угловой скоростью ω_2 ($\omega_2 \ll \omega_1$) вокруг оси DD' (рис. 344). Так как ось гироскопа совершает при этом прецессию, то точка B (конец вектора $\boldsymbol{K}_O$), как и в предыдущем случае, будет иметь скорость

$v_B = J_z\omega_1\omega_2 \sin\alpha$. На основании формулы (71) заключаем, что на ось действует при этом момент, численно равный

$$M_O = v_B = J_z\omega_1\omega_2 \sin\alpha.$$

Этот момент создают, очевидно, силы $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{Q}'$, с которыми подшипники A и A' давят на ось. Так как центр масс гироскопа неподвижен, то по теореме о движении центра масс геометрическая сумма сил $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{Q}'$ должна быть равна нулю; следовательно, названные силы образуют пару, момент которой $\boldsymbol{M}_O$ должен быть направлен так же, как скорость $\boldsymbol{v}_B$ (на рис. 344 — к читателю).

Но тогда одновременно ось гироскопа будет давить на подшипники A и A' с силами N, N', равными по модулю и противоположными по направлению силам $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{Q}'$.

Рис. 344.

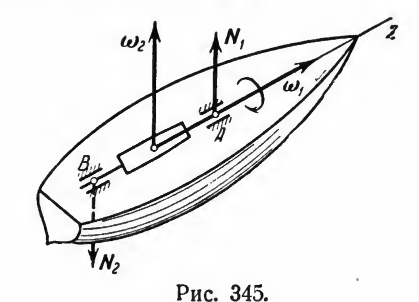


Рис. 345.

Пара сил (N, N') называется *гироскопической парой*, а ее момент — *гироскопическим моментом*. Так как по модулю $M_{\text{гир}} = M_O$, то

$$M_{\text{гир}} = J_z\omega_1\omega_2 \sin\alpha. \qquad (73)$$

Отсюда получаем следующее правило Н. Е. Жуковского: *если быстро вращающемуся гироскопу сообщить вынужденное прецессионное движение, то на подшипники, в которых закреплена ось гироскопа, будет действовать пара сил с моментом $M_{\text{гир}}$, стремящаяся кратчайшим путем установить ось собственного вращения параллельно оси прецессии так, чтобы направления векторов ω_1 и ω_2 при этом совпали.*

Кроме давления на подшипники, гироскопический эффект может вызвать движение того тела, с которым скреплены эти подшипники, если только это движение допускается наложенными связями.

Рассмотрим пример. Если судно, у которого ротор турбины вращается с угловой скоростью ω_1 (рис. 345), совершает поворот с угловой скоростью ω_2, то на подшипники A и B будут действовать

гироскопические давления N_1 и N_2, направленные так, как показано на чертеже[1]). Если при этом $AB = l$, а момент инерции ротора равен J_z, то по формуле (73)

$$M_{\text{гир}} = Nl = J_z\omega_1\omega_2 \text{ и } N = \frac{J_z\omega_1\omega_2}{l}.$$

Величины этих давлений могут достигать нескольких тонн и должны учитываться при расчете подшипников. Через подшипники гироскопические давления передаются корпусу судна и у очень легкого судна могли бы вызвать при повороте опускание киля или носа. Подобный эффект наблюдается у винтовых самолетов при виражах (поворотах в горизонтальной плоскости).

На рассмотренных в этом параграфе свойствах гироскопа основано устройство различных гироскопических стабилизаторов, гироскопических навигационных приборов и приборов специального назначения.

Примером гироскопического стабилизатора прямого действия служит успокоитель качки. Он представляет собою массивный вращающийся гироскоп (рис. 346, *а*), ось AA_1 которого закреплена в раме, имеющей свою ось вращения DD_1, скрепленную с корпусом судна. Когда на судно при волнении

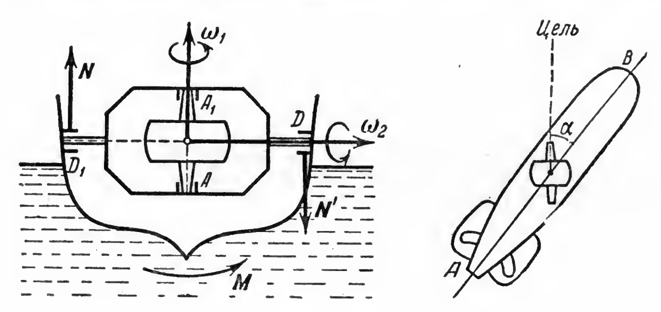


Рис. 346.

действует момент M, то снабженный специальным регулятором мотор начинает вращать раму с некоторой угловой скоростью ω_2 (см. чертеж). В результате на подшипники D, D_1 действует гироскопическая пара (N, N') с моментом $J\omega_1\omega_2$, способствующая уменьшению крена. При изменении направления момента M мотор будет вращать раму в противоположную сторону и направление пары (N, N_1') также изменится на противоположное.

Другим примером стабилизатора (не прямого действия), служит прибор Обри, стабилизирующий движение мины в горизонтальной плоскости. Стабилизирующим элементом прибора является свободный гироскоп (см. рис. 341), ось которого в момент выстрела совпадает с осью торпеды, направленной на цель. Если торпеда в некоторый момент отклонится от заданного направления на угол α (рис. 346, *б*), то ось гироскопа сохраняя свое направление

[1]) Гироскопические давления на подшипники возникают и вследствие качки судов. Направления этих давлений будут, конечно, другими.

на цель неизменным (по свойству свободного гироскопа), повернется по отношению к корпусу торпеды на такой же угол. Этот поворот вызывает смещение соответствующего регулятора, приводящего в действие рулевую машинку. В результате происходит поворот руля в соответствующую сторону, и торпеда выравнивается. Аналогичной является идея устройства различных автопилотов, фиксирующих отклонение самолета от заданного курса и приводящих в действие соответствующие рули.

К гироскопическим навигационным приборам относятся гирокомпас, гирогоризонт, указатель поворотов и др. Принципы устройства этих приборов весьма разнообразны, но в основе их также лежат рассмотренные выше свойства гироскопа.

§ 158*. Движение твердого тела вокруг неподвижной точки и движение свободного твердого тела. Для составления дифференциальных уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку, необходимо найти выражения главного момента количеств движения K_O (кинетического момента) и кинетической энергии T тела в этом случае движения.

1. Кинетический момент тела, движущегося вокруг неподвижной точки. Вектор K_O можно определить, найдя его проекции на какие-нибудь три координатные оси $Oxyz$. Чтобы получить соответствующие формулы в наиболее простом виде, возьмем в качестве осей $Oxyz$ (см. ниже рис. 347) жестко связанные с телом *главные оси инерции* этого тела в точке O (§ 133).

Начнем с вычисления K_x. По аналогии с равенством (43′) в § 116 [или формулами (52) в § 43] будем иметь

$$m_x(m_k v_k) = m_k(y_k v_{kz} - z_k v_{ky}).$$

Но по формулам Эйлера [§ 87, формулы (67′)]

$$v_{ky} = \omega_z x_k - \omega_x z_k, \quad v_{kz} = \omega_x y_k - \omega_y x_k,$$

где ω_x, ω_y, ω_z — проекции на оси $Oxyz$ мгновенной угловой скорости тела, x_k, y_k, z_k — координаты точек тела.

Подставим эти значения v_{ky} и v_{kz} в предыдущее равенство; при этом заметим, что члены с произведениями координат можно не подсчитывать, так как оси $Oxyz$ являются главными осями инерции и для них все центробежные моменты инерции равны нулю, т. е. $\Sigma m_k x_k y_k = \Sigma m_k y_k z_k = 0$. В результате, вынося общий множитель ω_x за скобку, найдем

$$K_x = \sum m_x(m_k v_k) = [\sum m_k(y_k^2 + z_k^2)]\,\omega_x,$$

где величина в квадратной скобке представляет собою согласно формулам (3) главный момент инерции тела относительно оси Ox. Аналогичные выражения получим для K_y, K_z и окончательно будем иметь:

$$K_x = J_x\omega_x, \quad K_y = J_y\omega_y, \quad K_z = J_z\omega_z. \tag{74}$$

Формулы (74) дают выражения для проекций вектора K_O *на главные оси инерции тела*, проведенные в точке O.

Если оси $Oxyz$ не будут главными, то, как нетрудно подсчитать, формулы (74) примут следующий значительно более сложный вид:

$$\left.\begin{aligned} K_x &= J_x\omega_x - J_{xy}\omega_y - J_{xz}\omega_z, \\ K_y &= -J_{xy}\omega_x + J_y\omega_y - J_{yz}\omega_z, \\ K_z &= -J_{xz}\omega_x - J_{yz}\omega_y + J_z\omega_z. \end{aligned}\right\} \tag{74′}$$

2. Кинетическая энергия тела, движущегося вокруг неподвижной точки. Поскольку движение тела, имеющего неподвижную точку, складывается из серии элементарных поворотов вокруг мгновенных осей вращения OP, проходящих через эту точку, его кинетическую энергию можно находить по формуле $T=0{,}5J_{OP}\omega^2$, где ω — угловая скорость тела в данный момент. Однако эта формула неудобна для расчетов, так как ось OP непрерывно меняет свое направление и, следовательно, будет все время изменяться значение J_{OP}. Найдем другую формулу для вычисления T, введя вместо $\boldsymbol{\omega}$ проекции этого вектора на *главные оси инерции тела Oxyz*, проведенные в точке O (см. ниже, рис. 347). По определению

$$T=\frac{1}{2}\sum m_k v_k^2=\frac{1}{2}\sum m_k\left(v_{kx}^2+v_{ky}^2+v_{kz}^2\right).$$

Воспользуемся формулами Эйлера [§ 87, равенства (67′)]:

$$v_{kx}=\omega_y z_k-\omega_z y_k,\quad v_{ky}=\omega_z x_k-\omega_x z_k,\quad v_{kz}=\omega_x y_k-\omega_y x_k.$$

Подставляя эти величины в выражение для T и учитывая, что члены с произведениями координат можно отбросить, так как оси $Oxyz$ главные и $\Sigma m_k x_k y_k=\Sigma m_k y_k z_k=\Sigma m_k z_k x_k=0$, получим, вынося общие множители за скобки,

$$T=\frac{1}{2}\left[\sum m_k\left(y_k^2+z_k^2\right)\omega_x^2+\sum m_k\left(z_k^2+x_k^2\right)\omega_y^2+\sum m_k\left(x_k^2+y_k^2\right)\omega_z^2\right].$$

Входящие в правую часть суммы равны по формулам (3) соответствующим осевым моментам инерции. Следовательно, кинетическая энергия тела, движущегося вокруг неподвижной точки O, вычисляется по формуле

$$T=\frac{1}{2}\left(J_x\omega_x^2+J_y\omega_y^2+J_z\omega_z^2\right),\tag{75}$$

где ω_x, ω_y, ω_z — проекции мгновенной угловой скорости тела на оси, являющиеся для точки *O главными осями инерции*.

Если в качестве осей $Oxyz$ взять не главные оси инерции, то, как нетрудно подсчитать, формула (75) примет следующий более сложный вид:



$$T=\frac{1}{2}\left(J_x\omega_x^2+J_y\omega_y^2+J_z\omega_z^2-\right.$$
$$\left.-2J_{xy}\omega_x\omega_y-2J_{yz}\omega_y\omega_z-2J_{zx}\omega_z\omega_x\right).\tag{75′}$$

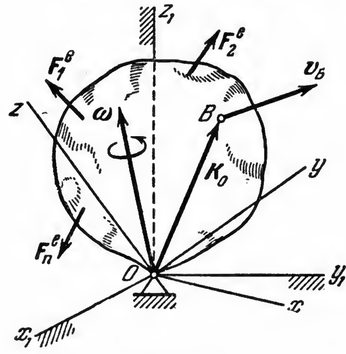


Рис. 347.

3. Динамические уравнения Эйлера. Пусть на твердое тело, имеющее неподвижную точку O, действует система заданных сил F_1^e, F_2^e, ..., F_n^e (рис. 347). Одновременно на тело будет действовать реакция R_O связи (на рис. не показана). Чтобы исключить из уравнений движения тела эту наперед не известную силу, воспользуемся теоремой моментов относительно центра O (§ 144), представив ее в виде (71), т. е. в виде теоремы Резаля. Тогда, поскольку $m_O(R)=0$, будем иметь

$$v_B=M_O^e,$$

где $M_O^e = \sum m_O(F_k^e)$, а v_B — скорость по отношению к инерциальной системе отсчета $Ox_1y_1z_1$ точки B, совпадающей с концом вектора K_O.

Движение тела изучается тоже по отношению к инерциальной системе отсчета $Ox_1y_1z_1$. Но чтобы получить уравнения этого движения в наиболее простой форме, будем проектировать обе части предыдущего равенства на жестко связанные с телом и движущиеся вместе с ним оси $Oxyz$, являющиеся *главными осями инерции* тела для точки O. Тогда выражения проекций вектора K_O будут иметь простой вид, даваемый формулами (74), а входящие в них моменты инерции J_x, J_y, J_z будут величинами постоянными.

Для вычисления проекций абсолютной скорости v_B на подвижные оси, представим v_B как сумму относительной (по отношению к осям $Oxyz$) и переносной скоростей. Тогда равенство (71) (теорема Резаля) примет вид

$$v_B^{\text{отн}} + v_B^{\text{пер}} = M_O^e. \tag{76}$$

Найдем сначала уравнение движения в проекции на ось Ox. Из равенства (76) имеем

$$v_{Bx}^{\text{отн}} + v_{Bx}^{\text{пер}} = M_x^e. \tag{76'}$$

Проекция относительной скорости на подвижные оси вычисляется так, как если бы эти оси были неподвижными, т. е. по формулам (15) из § 64. Тогда, учитывая, что координата x точки B равна проекции вектора $\overline{OB}$ или K_O на ось x, будем иметь

$$v_{Bx}^{\text{отн}} = \frac{d(\overline{OB})_x}{dt} = \frac{dK_x}{dt} = J_x \frac{d\omega_x}{dt},$$

поскольку согласно равенствам (74) $K_x = J_x\omega_x$, где ω — мгновенная угловая скорость тела, а $J_x = \text{const}$.

Далее, $v_B^{\text{пер}}$ есть скорость той неизменно связанной с осями $Oxyz$ (т. е. с телом) точки, которая в данный момент совпадает с концом вектора K_O. Следовательно, по формуле (67) из § 87 $v_B^{\text{пер}} = \omega \times \overline{OB} = \omega \times K_O$. Но, как известно из векторной алгебры, если $c = a \times b$, то $c_x = a_y b_z - a_z b_y$ (сравни формулы (49') и (50) в § 42). Следовательно, с учетом равенств (74) будем иметь

$$v_{Bx}^{\text{пер}} = \omega_y K_z - \omega_z K_y = (J_z - J_y)\,\omega_y\omega_z.$$

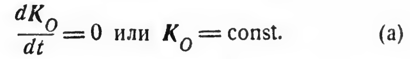
Подставляя найденные значения $v_{Bx}^{\text{отн}}$ и $v_{Bx}^{\text{пер}}$ в левую часть уравнения (76'), получим $J_x \frac{d\omega_x}{dt} + (J_z - J_y)\,\omega_y\omega_z = M_x^e$. Аналогичные выражения получаются для проекций равенства (76) на оси Oy и Oz. Окончательно найдем следующие **дифференциальные уравнения движения твердого тела вокруг неподвижной точки** в проекциях на главные оси инерции тела для этой точки:

$$\left.\begin{aligned}
J_x \frac{d\omega_x}{dt} + (J_z - J_y)\,\omega_y\omega_z &= M_x^e,\\
J_y \frac{d\omega_y}{dt} + (J_x - J_z)\,\omega_z\omega_x &= M_y^e,\\
J_z \frac{d\omega_z}{dt} + (J_y - J_x)\,\omega_x\omega_y &= M_z^e.
\end{aligned}\right\} \tag{77}$$

Уравнения (77) называются *динамическими уравнениями Эйлера*. Если положение тела определять углами Эйлера φ, ψ, θ (§ 86), то основная задача динамики будет состоять в том, чтобы, зная M_x^e, M_y^e, M_z^e, найти закон движения тела, т. е. найти $\varphi=\varphi(t)$, $\psi=\psi(t)$, $\theta=\theta(t)$. Для решения этой задачи надо к уравнениям (77) присоединить кинематические уравнения Эйлера [см. § 97, равенства (98)], устанавливающие связь между ω_x, ω_y, ω_z и углами φ, ψ, θ. Динамические и кинематические уравнения Эйлера образуют систему шести нелинейных дифференциальных уравнений 1-го порядка; интегрирование этой системы представляет собою сложную математическую задачу. В § 157 была изложена приближенная теория гироскопических явлений. Точно движение гироскопа описывается уравнениями (77). Для интегрирования этих уравнений при решении соответствующих конкретных задач обычно используют те или иные приближенные математические методы.

В случаях, когда это целесообразно, одно из уравнений (77) можно заменить теоремой об изменении кинетической энергии. Формула (75) используется также при составлении уравнений методом, изложенным в § 177 (см. задачу 176).

4. Пример. В качестве простейшего примера приложения полученных уравнений рассмотрим движение свободного гироскопа, закрепленного в центре тяжести, на который никакие силы, кроме силы тяжести, не действуют (см. § 157, п. 1). В этом случае $M_O^e=0$ и теорема моментов (§ 144) дает



$$\frac{dK_O}{dt}=0 \text{ или } K_O=\text{const}. \qquad (а)$$

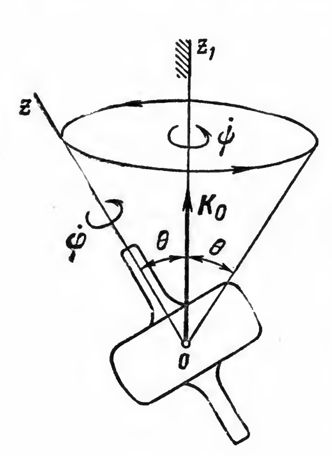
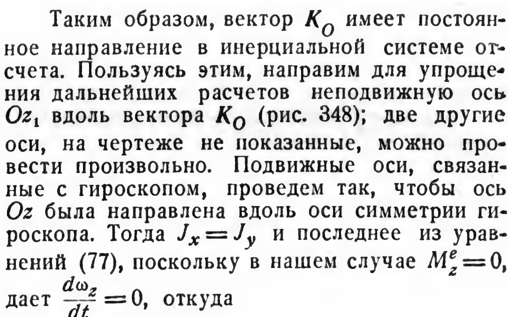


Рис. 348.



Таким образом, вектор K_O имеет постоянное направление в инерциальной системе отсчета. Пользуясь этим, направим для упрощения дальнейших расчетов неподвижную ось Oz_1 вдоль вектора K_O (рис. 348); две другие оси, на чертеже не показанные, можно провести произвольно. Подвижные оси, связанные с гироскопом, проведем так, чтобы ось Oz была направлена вдоль оси симметрии гироскопа. Тогда $J_x=J_y$ и последнее из уравнений (77), поскольку в нашем случае $M_z^e=0$, дает $\frac{d\omega_z}{dt}=0$, откуда

$$\omega_z=\text{const}. \qquad (б)$$

По этой причине из формул (74) следует, что $K_z=J_z\omega_z=\text{const}$. Но одновременно, как видно из рис. 348, $K_z=K_O\cos\theta$, где $\theta=\angle z_1Oz$ — угол нутации (см. рис. 200). Так как согласно равенству (а) $K_O=\text{const}$, то отсюда заключаем, что и $\cos\theta=\text{const}$ или

$$\theta=\text{const}=\theta_0, \qquad (в)$$

где θ_0 — начальное значение угла нутации.

Умножим теперь обе части первого из уравнений (77) на ω_x, второго — на ω_y и сложим эти равенства почленно, учитывая, что в нашем случае $M_x^e=M_y^e=0$, а $J_x=J_y$. Тогда получим

$$J_x\left(\omega_x\frac{d\omega_x}{dt}+\omega_y\frac{d\omega_y}{dt}\right)=0.$$

Отсюда, интегрируя и деля обе части на постоянный множитель, будем иметь

$$\omega_x^2+\omega_y^2=\text{const}.$$

Заменим здесь ω_x и ω_y их значениями из кинематических уравнений Эйлера [§ 97, формулы (98)]. Учитывая, что $\theta=\text{const}$ и $\dot\theta=0$, получим

$$\omega_x=\dot\psi\sin\theta\sin\varphi,\quad \omega_y=\dot\psi\sin\theta\cos\varphi,$$

откуда

$$\omega_x^2+\omega_y^2=\dot\psi^2\sin^2\theta.$$

Но, по доказанному, левая часть этого равенства и $\sin\theta$ постоянны. Следовательно, и

$$\dot\psi=\text{const}=\dot\psi_0. \qquad \text{(г)}$$

Наконец, последнее из кинематических уравнений Эйлера дает $\omega_z=\dot\varphi+\dot\psi\cos\theta$. Здесь, как мы нашли, ω_z, $\dot\psi$ и $\cos\theta$ постоянны. Следовательно, и

$$\dot\varphi=\text{const}=\dot\varphi_0. \qquad \text{(д)}$$

Итак, при любых начальных условиях рассматриваемый гироскоп вращается вокруг своей оси симметрии с постоянной угловой скоростью $\dot\varphi_0$, а сама эта ось обращается, в свою очередь, вокруг неподвижной оси Oz_1 с постоянной угловой скоростью $\dot\psi_0$, описывая коническую поверхность с постоянным углом при вершине $2\theta_0$ (см. рис. 348). Такое движение гироскопа называется ***регулярной прецессией***.

5. Движение свободного твердого тела. Как известно, движение свободного твердого тела слагается из поступательного движения вместе с полюсом, в качестве которого при решении задач динамики выбирают центр масс C тела, и из движения вокруг центра масс, как вокруг неподвижной точки (§ 88). Если на тело действуют внешние силы $\boldsymbol{F}_1^e$, $\boldsymbol{F}_2^e$, ..., $\boldsymbol{F}_n^e$, то движение полюса C описывается теоремой о движении центра масс $M\boldsymbol{w}_C=\sum \boldsymbol{F}_k^e$, где M — масса тела. В проекциях на неподвижные оси $Ox_1y_1z_1$ это равенство дает

$$M\frac{d^2x_{1C}}{dt^2}=\sum F_{kx_1}^e,\quad M\frac{d^2y_{1C}}{dt^2}=\sum F_{ky_1}^e,\quad M\frac{d^2z_{1C}}{dt^2}=\sum F_{kz_1}^e, \qquad (78)$$

где x_{1C}, y_{1C}, z_{1C} — координаты центра масс тела.

Для движения же около центра масс теорема моментов, выражаемая равенством (40), дает в проекциях на *главные центральные оси инерции тела* три уравнения, совпадающие по виду с уравнениями (77). Таким образом, система дифференциальных уравнений (78), (77) описывает движение свободного твердого тела (снаряда, самолета, ракеты и т. п.).

ГЛАВА XXIX

ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩИХ ТЕОРЕМ К ТЕОРИИ УДАРА

§ 159. Основное уравнение теории удара. При движении тела под действием обычных сил, рассматривавшихся до сих пор, скорости точек тела изменяются непрерывно, т. е. каждому бесконечно малому промежутку времени соответствует бесконечно малое

приращение скорости. Действительно, если импульс любой силы $\boldsymbol{F}_k$ за промежуток времени τ представить в виде $\boldsymbol{F}_k^{\text{ср}}\tau$, где $\boldsymbol{F}_k^{\text{ср}}$ — среднее значение этой силы за время τ, то теорема об изменении количества движения точки, на которую действуют силы $\boldsymbol{F}_k$, дает

$$m(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0) = \sum \boldsymbol{F}_k^{\text{ср}}\tau.$$

Отсюда видно, что когда время τ бесконечно мало (стремится к нулю), то при обычных силах и приращение скорости $\Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0$ будет тоже величиной бесконечно малой (стремящейся к нулю).

Однако, если в числе действующих сил будут очень большие силы (порядка $1/\tau$), то приращение скорости за малый промежуток времени τ окажется величиной конечной.

Явление, при котором скорости точек тела за очень малый промежуток времени τ изменяются на конечную величину, называется ударом. Силы, при действии которых происходит удар, будем называть *ударными силами* $\boldsymbol{F}_{\text{уд}}$. Очень малый промежуток времени τ, в течение которого происходит удар, назовем *временем удара.*

Так как ударные силы очень велики и за время удара изменяются в значительных пределах, то в теории удара в качестве меры взаимодействия тел рассматривают не сами ударные силы, а их импульсы. Ударный импульс

$$\boldsymbol{S}_{\text{уд}} = \int_0^{\tau} \boldsymbol{F}_{\text{уд}}\,dt = \boldsymbol{F}_{\text{уд}}^{\text{ср}}\tau$$

является величиною конечной. Импульсы неударных сил за время τ будут величинами очень малыми и ими практически можно пренебречь.

Будем в дальнейшем обозначать скорость точки *в начале удара* $\boldsymbol{v}$, а скорость *в конце удара* $\boldsymbol{u}$. Тогда теорема об изменении количества движения точки при ударе примет вид [1])

$$m(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) = \sum \boldsymbol{S}_k, \tag{79}$$

т. е. *изменение количества движения материальной точки за время удара равно сумме действующих на точку ударных импульсов.* Уравнение (79) является *основным уравнением теории удара* и играет в теории удара такую же роль, как основной закон динамики $m\boldsymbol{w} = \boldsymbol{F}$ при изучении движений под действием неударных сил.

В заключение отметим, что перемещение точки за время удара будет равно $v^{\text{ср}}\tau$, т. е. величине очень малой, которой практически можно пренебречь.

[1]) В дальнейшем будем ударный импульс обозначать просто символом $\boldsymbol{S}$, так как импульсы неударных сил в теории удара не рассматриваются.

Итак, из всех полученных результатов вытекает следующее:

1) действием неударных сил (таких, например, как сила тяжести) за время удара можно пренебречь;

2) перемещениями точек тела за время удара можно пренебречь и считать тело во время удара неподвижным;

3) изменения скоростей точек тела за время удара определяются основным уравнением теории удара (79).

§ 160. Общие теоремы теории удара. Рассмотрим, какой вид принимают общие теоремы динамики для системы материальных точек при ударе.

1. Теорема об изменении количества движения системы при ударе. Уравнение (22), полученное в § 139, сохраняет свой вид и для случая удара. Но так как импульсами обычных сил при ударе пренебрегают, то в правой части останутся только ударные импульсы. Следовательно, при ударе

$$\boldsymbol{Q}_1-\boldsymbol{Q}_0=\sum \boldsymbol{S}_k^e, \tag{80}$$

т. е. *изменение количества движения системы за время удара равно сумме всех внешних ударных импульсов, действующих на систему.*

В проекциях на любую координатную ось x уравнение (80) дает:

$$Q_{1x}-Q_{0x}=\sum S_{kx}^e. \tag{80'}$$

Если геометрическая сумма всех внешних ударных импульсов равна нулю, то, как видно из уравнения (80), количество движения системы за время удара не изменяется. Следовательно, внутренние ударные импульсы не могут изменить количества движения всей системы.

2. Теорема об изменении главного момента количества движения системы (теорема моментов) при ударе. Теорема моментов принимает для случая удара вид несколько отличный от полученного в § 144; объясняется это тем, что точки системы за время удара не перемещаются. Рассмотрим систему, состоящую из n материальных точек. Обозначим равнодействующую внешних ударных импульсов, действующих на точку с массой m_k, через $\boldsymbol{S}_k^e$, а равнодействующую действующих на ту же точку внутренних ударных импульсов — через $\boldsymbol{S}_k^i$. Тогда по уравнению (79) будет $m_k(\boldsymbol{u}_k-\boldsymbol{v}_k)=\boldsymbol{S}_k^e+\boldsymbol{S}_k^i$ или

$$m_k\boldsymbol{u}_k=m_k\boldsymbol{v}_k+\boldsymbol{S}_k^e+\boldsymbol{S}_k^i.$$

Входящие в это равенство векторы приложены к точке, которая, как было указано, за время удара остается неподвижной. Тогда, беря моменты этих векторов относительно какого-нибудь центра O,

мы по теореме Вариньона, справедливой для любых векторных величин, получим:

$$\boldsymbol{m}_O(m_k\boldsymbol{u}_k) = \boldsymbol{m}_O(m_k\boldsymbol{v}_k) + \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{S}_k^e) + \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{S}_k^i).$$

Составляя такие равенства для всех точек системы и складывая их почленно, будем иметь:

$$\sum \boldsymbol{m}_O(m_k\boldsymbol{u}_k) - \sum \boldsymbol{m}_O(m_k\boldsymbol{v}_k) = \sum \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{S}_k^e) + \sum \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{S}_k^i).$$

Суммы, стоящие слева, представляют собою главные моменты количеств движения системы относительно центра O в конце и в начале удара, которые обозначим $\boldsymbol{K}_1$ и $\boldsymbol{K}_0$. Стоящая справа сумма моментов внутренних ударных импульсов по свойству внутренних сил равна нулю. Окончательно находим:

$$\boldsymbol{K}_1 - \boldsymbol{K}_0 = \sum \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{S}_k^e), \tag{81}$$

т. е. *изменение за время удара главного момента количеств движения системы относительно какого-нибудь центра равно сумме моментов относительно того же центра всех действующих на систему внешних ударных импульсов.*

В проекциях на любую ось x равенство (81) дает

$$K_{1x} - K_{0x} = \sum m_x(\boldsymbol{S}_k^e). \tag{81'}$$

Из полученных уравнений следует, что если сумма моментов внешних ударных импульсов относительно какого-нибудь центра (или оси) равна нулю, то главный момент количеств движения системы относительно этого центра (или оси) за время удара не изменяется. Следовательно, внутренние ударные импульсы не могут изменить главный момент количеств движения системы.

Теорема об изменении кинетической энергии для решения основной задачи динамики в теории удара не применяется, так как точки тела за время удара считаются неподвижными, а вместо самих ударных сил рассматриваются их ударные импульсы. Поэтому подсчитать работу ударных сил непосредственно (по силе и перемещению) нельзя. В дальнейшем нами будет рассмотрен лишь вопрос об определении потери кинетической энергии тел за время удара (§ 164).

§ 161. Коэффициент восстановления при ударе. Величина ударного импульса, появляющегося при соударении двух тел, зависит не только от их масс и скоростей до удара, но и от упругих свойств соударяющихся тел; эти свойства характеризуются величиной, называемой *коэффициентом восстановления.*

Рассмотрим шар, падающий вертикально на неподвижную горизонтальную жесткую плиту (рис. 349). Для прямого удара, который при этом произойдет, можно различать две стадии. В течение первой

стадии скорости частиц шара, равные в момент начала удара v (движение шара считаем поступательным), убывают до нуля. Шар при этом деформируется и вся его начальная кинетическая энергия $\frac{1}{2}Mv^2$ переходит во внутреннюю потенциальную энергию деформированного тела. Во второй стадии удара шар под действием внутренних упругих сил начинает восстанавливать свою форму; при этом его внутренняя потенциальная энергия переходит в кинетическую энергию движения частиц шара. В конце удара скорости частиц будут равны u, а кинетическая энергия шара $\frac{1}{2}Mu^2$. Однако полностью механическая энергия шара при этом не восстанавливается, так как часть ее уходит на сообщение шару остаточных деформаций и его нагревание. Поэтому скорость u будет меньше v.

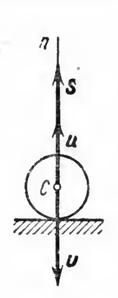


Рис. 349.

Величина k, равная при прямом ударе тела о неподвижную преграду отношению модуля скорости тела в конце удара к модулю скорости в начале удара, называется коэффициентом восстановления при ударе:

$$k = \frac{u}{v}. \qquad (82)$$

Значение коэффициента восстановления для разных тел определяется опытным путем. По данным опыта при изменении скорости v не в очень больших пределах, величина k зависит только от материала соударяющихся тел.

В качестве предельных случаев рассматривают случай *абсолютно упругого удара* ($k = 1$), при котором механическая энергия тела после удара полностью восстанавливается, и случай *абсолютно неупругого удара* ($k = 0$), когда удар заканчивается в первой стадии и вся механическая энергия тела теряется на его деформацию и нагревание.

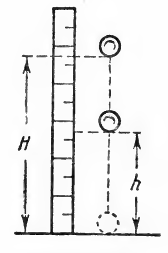


Рис. 350.

Экспериментально величину k можно найти, если рассмотреть шар, свободно падающий на плиту с предварительно измеренной высоты H, и определить с помощью стоящей рядом вертикальной рейки (рис. 350) высоту его подъема h после удара. Тогда по формуле Галилея

$$v = \sqrt{2gH}, \text{ а } u = \sqrt{2gh}$$

и

$$k = \frac{u}{v} = \sqrt{\frac{h}{H}}.$$

Для некоторых материалов значения коэффициента восстановления (при скоростях соударения порядка 3 *м/сек*) приведены в таблице 1.

Таблица 1

Соударяющиеся тела	k
Дерево о дерево	$^1/_2$
Сталь о сталь	$^5/_9$
Слоновая кость о слоновую кость	$^8/_9$
Стекло о стекло	$^{15}/_{16}$

§ 162. Удар тела о неподвижную преграду. Рассмотрим тело (шар) массы M, ударяющееся о неподвижную плиту. Действующей на тело ударной силой будет при этом реакция плиты; импульс этой силы за время удара назовем $\boldsymbol{S}$. Пусть нормаль к поверхности тела в точке его касания с плитой проходит через центр масс тела (для шара это будет всегда). Такой удар тела называется *центральным*. Если скорость $\boldsymbol{v}$ центра масс тела в начале удара направлена по нормали n к плите, то удар будет *прямым*, в противном случае *косым*.

1. Случай прямого удара. Составляя в этом случае уравнение (80′) в проекции на нормаль n (см. рис. 349) и учитывая, что $\boldsymbol{Q}_0 = M\boldsymbol{v}$, а $\boldsymbol{Q}_1 = M\boldsymbol{u}$, получим:

$$M(u_n - v_n) = S_n.$$

Но при прямом ударе $u_n = u$, $v_n = -v$, $S_n = S$; следовательно,

$$M(u + v) = S.$$

Второе уравнение, необходимое для решения задачи, дает равенство (82):

$$u = kv.$$

Из полученных уравнений, зная M, v, k, найдем неизвестные величины u и S. При этом

$$S = M(k + 1)v.$$

Как видим, ударный импульс будет тем больше, чем больше коэффициент восстановления k. На эту зависимость S от k и было указано в § 161.

Чтобы определить среднюю величину ударной силы (реакции), надо дополнительно знать время удара τ, которое можно найти экспериментально.

Пример. При падении стального шара весом $p=1$ *кГ* с высоты $H=3$ *м* на стальную плиту $(k=5/9)$ получим $v=\sqrt{2gH}\approx 7{,}7$ *м/сек* и $u=kv\approx 4{,}3$ *м/сек*. Ударный импульс будет равен

$$S=\frac{p}{g}v(1+k)\approx 1{,}2\ кГ\,сек.$$

Если время удара $\tau=0{,}0005$ *сек*, то средняя величина ударной реакции

$$N_{уд}^{ср}=\frac{S}{\tau}=2400\ кГ.$$

2. Случай косого удара. Пусть в этом случае скорость v центра масс тела в начале удара образует с нормалью к плите угол α, а скорость u в конце удара — угол β (рис. 351). Тогда уравнение (80) в проекциях на касательную τ и нормаль n даст

$$M(u_\tau-v_\tau)=0,\quad M(u_n-v_n)=S.$$

Коэффициент восстановления в данном случае равен отношению модулей $|u_n|$ и $|v_n|$, так как удар происходит только по направлению нормали к поверхности (влиянием трения пренебрегаем). Тогда с учетом знаков проекций получим $u_n=-kv_n$. В результате окончательно находим:

$$u_\tau=v_\tau,\quad u_n=-kv_n,\quad S=M|v_n|(1+k).$$

Рис. 351.

Из полученных уравнений можно найти модуль и направление скорости в конце удара и ударный импульс, если величины M, v, α и k известны. В частности, из первого равенства, замечая, что $v_\tau=|v_n|\operatorname{tg}\alpha$ и $u_\tau=|u_n|\operatorname{tg}\beta$, получаем

$$|u_n|\operatorname{tg}\beta=|v_n|\operatorname{tg}\alpha,$$

откуда

$$k=\frac{|u_n|}{|v_n|}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}.$$

Следовательно, при косом ударе отношение тангенса угла падения к тангенсу угла отражения равно коэффициенту восстановления. Так как $k<1$, то $\alpha<\beta$, т. е. угол падения всегда меньше угла отражения.

§ 163. Прямой центральный удар двух тел (удар шаров). При соударении двух тел удар называется *прямым* и *центральным*, когда общая нормаль к поверхностям тел в точке касания проходит через их центры масс и когда скорости центров масс в начале удара направлены по этой общей нормали. Таким, в частности, будет удар двух однородных шаров, центры которых до удара движутся вдоль одной и той же прямой.

Пусть массы соударяющихся тел равны M_1 и M_2, скорости их центров масс в начале удара v_1 и v_2, а в конце удара u_1 и u_2. Проведем через центры масс C_1, C_2 координатную ось C_1x, направленную

всегда от C_1 к C_2 (рис. 352). Тогда, чтобы произошел удар, должно быть $v_{1x} > v_{2x}$ (иначе первое тело не догонит второе); кроме того, будет $u_{1x} \leqslant u_{2x}$, так как ударившее тело не может опередить ударяемое.

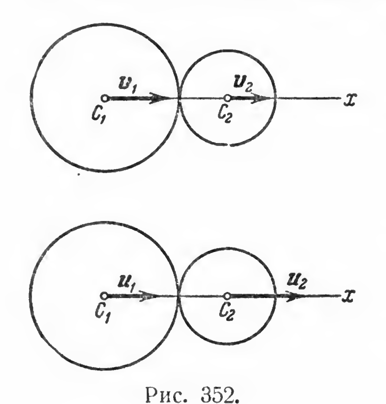


Рис. 352.

Считая M_1, M_2, v_{1x}, v_{2x} и k известными, найдем u_{1x} и u_{2x}. Для этого применим теорему об изменении количества движения к соударяющимся телам, рассматривая их как одну систему. Тогда ударные силы, действующие между телами, будут внутренними, и $\sum S_k^e = 0$. В результате уравнение (80′) дает $Q_{1x} = Q_{0x}$ или

$$M_1 u_{1x} + M_2 u_{2x} = M_1 v_{1x} + M_2 v_{2x}. \qquad (83)$$

Второе уравнение найдем из выражения для коэффициента восстановления. При соударении двух тел интенсивность удара (ударный импульс) зависит не от абсолютного значения скорости каждого из тел, а от того, насколько скорость ударяющего тела превышает скорость ударяемого, т. е. от разности $v_{1x} - v_{2x}$. Поэтому при ударе двух тел, если учесть, что всегда $v_{1x} > v_{2x}$, а $u_{1x} \leqslant u_{2x}$, получим.

$$k = \left| \frac{u_{1x} - u_{2x}}{v_{1x} - v_{2x}} \right| = -\frac{u_{1x} - u_{2x}}{v_{1x} - v_{2x}} \qquad (84)$$

или

$$u_{1x} - u_{2x} = -k(v_{1x} - v_{2x}). \qquad (84')$$

Система уравнений (83), (84) и позволяет решить поставленную задачу. Ударный импульс, действующий на соударяющиеся тела, найдем, составив уравнение (80′) для какого-нибудь одного из тел, например для первого. Тогда

$$S_{1x} = M_1(u_{1x} - v_{1x}), \quad S_{2x} = -S_{1x}. \qquad (85)$$

Рассмотрим два предельных случая.

а) Абсолютно неупругий удар ($k = 0$). В этом случае из уравнений (84) и (83) находим:

$$u_{1x} = u_{2x} = \frac{M_1 v_{1x} + M_2 v_{2x}}{M_1 + M_2}. \qquad (86)$$

Оба тела после удара движутся с одной и той же скоростью. Действующий на тела ударный импульс при этом равен

$$S_{2x} = -S_{1x} = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}(v_{1x} - v_{2x}).$$

б) Абсолютно упругий удар ($k=1$). В этом случае из уравнений (83) и (84) получаем:

$$\left.\begin{aligned} u_{1x} &= v_{1x} - \frac{2M_2}{M_1+M_2}(v_{1x}-v_{2x}), \\ u_{2x} &= v_{2x} + \frac{2M_1}{M_1+M_2}(v_{1x}-v_{2x}). \end{aligned}\right\} \qquad (87)$$

Действующий на тела ударный импульс при этом равен

$$S_{2x} = -S_{1x} = \frac{2M_1M_2}{M_1+M_2}(v_{1x}-v_{2x}).$$

Как видим, при абсолютно упругом ударе ударный импульс вдвое больше, чем при абсолютно неупругом.

В частном случае, когда $M_1=M_2$, получаем из уравнений (87) $u_{1x}=v_{2x}$, $u_{2x}=v_{1x}$; таким образом, два тела одинаковой массы при абсолютно упругом ударе обмениваются скоростями.

Задача 149. Два шара массы M_1 и M_2 подвешены так, как показано на рис. 353. Первый шар отклоняют на угол α и отпускают без начальной скорости. После удара второй шар отклоняется на угол β. Найти коэффициент восстановления для шаров при ударе.

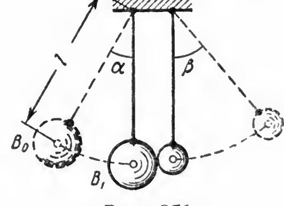


Рис. 353.

Решение. По данным задачи можно определить скорость v_1 центра первого шара в начале удара и скорость u_2 центра второго шара в конце удара. Из теоремы об изменении кинетической энергии на перемещении B_0B_1 находим для первого шара

$$\frac{1}{2}M_1v_1^2 = P_1h = M_1gl\,(1-\cos\alpha),$$

где l — расстояние центра шара от точки подвеса. Отсюда

$$v_1 = 2\sqrt{gl}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Аналогично находим, что

$$u_2 = 2\sqrt{gl}\sin\frac{\beta}{2}.$$

Так как в нашем случае $v_2=0$, уравнения (83) и (84) дают:

$$M_1u_{1x}+M_2u_{2x}=M_1v_{1x}, \quad u_{2x}-u_{1x}=kv_{1x}.$$

Исключая из этих уравнений u_{1x} и замечая, что $v_{1x}=v_1$, а $u_{2x}=u_2$, получим

$$M_1v_1(1+k)=(M_1+M_2)\,u_2.$$

Отсюда окончательно находим:

$$k=\frac{(M_1+M_2)\,u_2}{M_1v_1}-1=\frac{(M_1+M_2)\sin\frac{\beta}{2}}{M_1\sin\frac{\alpha}{2}}-1.$$

§ 164. Потеря кинетической энергии при неупругом ударе двух тел. Теорема Карно. Из рассуждений, приведенных в § 161, следует, что при неупругом ударе происходит потеря кинетической энергии соударяющихся тел. Наибольшую величину эта потеря имеет при абсолютно неупругом ударе. Подсчитаем величину потерянной системой кинетической энергии при абсолютно неупругом ударе двух тел.

Считая, что соударяющиеся тела движутся поступательно, и обозначая их общую скорость после абсолютно неупругого удара через u, получим для кинетической энергии системы в начале и в конце удара значения:

$$T_0 = \frac{1}{2}(M_1 v_{1x}^2 + M_2 v_{2x}^2), \qquad T_1 = \frac{1}{2}(M_1 + M_2) u_x^2. \tag{88}$$

Потерянная при ударе кинетическая энергия будет равна $T_0 - T_1$. Представим эту разность в виде

$$T_0 - T_1 = T_0 - 2T_1 + T_1. \tag{89}$$

Так как из формулы (86) следует, что

$$(M_1 + M_2) u_x = M_1 v_{1x} + M_2 v_{2x},$$

то отсюда

$$2T_1 = (M_1 + M_2) u_x^2 = (M_1 v_{1x} + M_2 v_{2x}) u_x. \tag{90}$$

Подставляя в правую часть равенства (89) вместо T_0 и T_1 их значения из формул (88), а вместо $2T_1$ — правую часть выражения (90), получим:

$$T_0 - T_1 = \frac{1}{2}(M_1 v_{1x}^2 + M_2 v_{2x}^2 - 2M_1 v_{1x} u_x - 2M_2 v_{2x} u_x + M_1 u_x^2 + M_2 u_x^2)$$

или

$$T_0 - T_1 = \frac{1}{2} M_1 (v_{1x} - u_x)^2 + \frac{1}{2} M_2 (v_{2x} - u_x)^2. \tag{91}$$

Разности $(v_{1x} - u_x)$ и $(v_{2x} - u_x)$ показывают, насколько уменьшилась при ударе скорость каждого из соударяющихся тел. Их можно назвать *потерянными при ударе скоростями*. Тогда из формулы (91) вытекает следующая терема Карно[1]): *кинетическая энергия, потерянная системой тел при абсолютно неупругом ударе, равна той кинетической энергии, которую имела бы система, если бы ее тела двигались с потерянными скоростями*.

---

[1]) Лаза́р Карно́ (1753—1823) — выдающийся французский ученый (математик и механик) и видный деятель эпохи Французской буржуазной революции.

Если удар не является абсолютно неупругим ($k \neq 0$), то аналогичными преобразованиями можно найти, что кинетическая энергия, потерянная при ударе двух тел, определяется равенством

$$T_0 - T_1 = \frac{1-k}{1+k}\left[\frac{1}{2} M_1 (v_{1x} - u_{1x})^2 + \frac{1}{2} M_2 (v_{2x} - u_{2x})^2\right]. \qquad (91')$$

Рассмотрим частный случай абсолютно неупругого удара по первоначально неподвижному телу. В этом случае $v_2 = 0$ и

$$T_0 = \frac{1}{2} M_1 v_1^2, \quad u = \frac{M_1 v_1}{M_1 + M_2}.$$

Тогда

$$T_1 = \frac{1}{2}(M_1 + M_2) u^2 = \frac{1}{2} \frac{M_1^2 v_1^2}{M_1 + M_2} = \frac{M_1}{M_1 + M_2} \frac{M_1 v_1^2}{2}$$

или

$$T_1 = \frac{M_1}{M_1 + M_2} T_0. \qquad (92)$$

Формула (92) показывает, какая энергия остается у системы после удара. Отметим два интересных предельных случая.

а) Масса ударяющего тела много больше массы ударяемого ($M_1 \gg M_2$). В этом случае можно считать $M_1 + M_2 \approx M_1$, и формула (92) дает $T_1 \approx T_0$. Следовательно, хотя удар и является абсолютно неупругим, потери кинетической энергии при ударе почти не происходит, и система после удара начнет двигаться почти с той же кинетической энергией, которая у нее была в начале удара.

На практике такой результат нужно, очевидно, получать при забивании гвоздей, свай и т. п. Следовательно, в этом случае нужно, чтобы масса молотка была намного больше массы гвоздя (рис. 354, *а*).

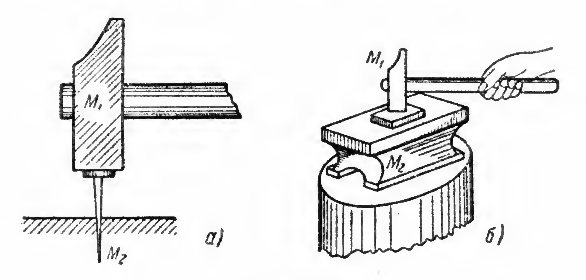


Рис. 354.

б) Масса ударяемого тела много больше массы ударяющего ($M_2 \gg M_1$). В этом случае можно считать

$$\frac{M_1}{M_1 + M_2} \approx 0,$$

и формула (92) дает $T_1 \approx 0$. Таким образом, здесь при ударе почти вся кинетическая энергия расходуется на деформацию соударяющихся тел; по окончании удара тела можно считать неподвижными.

Практически такой результат надо, очевидно, получать при ковке, клепке и т. п. Следовательно, в этих случаях нужно, чтобы масса поковки вместе с наковальней (или масса заклепки вместе с поддержкой) была много больше массы молота (рис. 354, *б*).

§ 165*. Удар по вращающемуся телу. Рассмотрим тело, имеющее ось вращения z (рис. 355). Пусть в некоторый момент времени к телу будет приложен ударный импульс $\boldsymbol{S}$. Тогда по уравнению (81′) будет

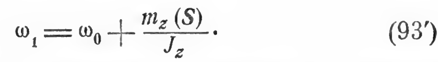
$$K_{1z} - K_{0z} = m_z(\boldsymbol{S}),$$

так как моменты относительно оси z импульсивных реакций $\boldsymbol{S}_A$ и $\boldsymbol{S}_B$, возникающих в подшипниках, будут равны нулю. Если в начале удара тело имело угловую скорость ω_0, а в конце удара его угловая скорость стала равна ω_1, то $K_{0z} = J_z\omega_0$, $K_{1z} = J_z\omega_1$ и окончательно получим:



$$J_z(\omega_1 - \omega_0) = m_z(\boldsymbol{S}) \qquad (93)$$

или



$$\omega_1 = \omega_0 + \frac{m_z(\boldsymbol{S})}{J_z}. \qquad (93')$$

Рис. 355.

Формула (93) определяет изменение угловой скорости тела при ударе. Из нее следует, что *угловая скорость тела за время удара изменяется на величину, равную отношению момента ударного импульса к моменту инерции тела относительно оси вращения.*

Импульсивные реакции. Найдем, чему равны при ударе импульсивные реакции подпятника A и подшипника B. Проведем оси $Axyz$ так, чтобы центр масс C тела лежал в плоскости Ayz (рис. 356, *а*). Изобразим искомые импульсивные реакции их составляющими вдоль этих осей.

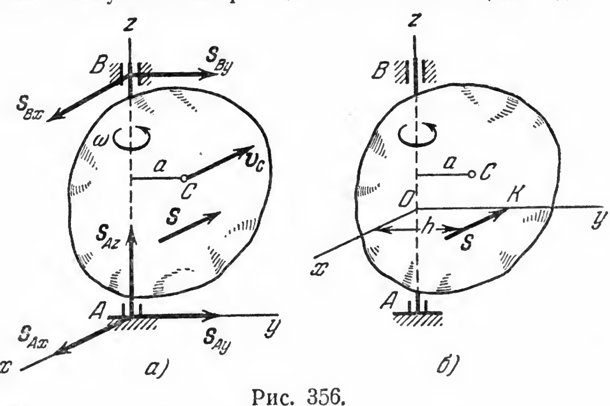


Рис. 356.

Пусть $AB = b$, а расстояние точки C от оси Az равно a. Составим уравнения (80′) в проекциях на все три оси, а уравнения (81′) в проекциях на

оси Ax и Ay [уравнение в проекции на ось Az уже использовано при получении равенства (93)]. Поскольку тело за время удара не перемещается, векторы $\boldsymbol{v}_C$ и $\boldsymbol{u}_C$ будут параллельны оси Ax; следовательно, $Q_{0x} = -Mv_C = -Ma\omega_0$, $Q_{1x} = -Ma\omega_1$, а $Q_y = Q_z = 0$. Используя одновременно при составлении уравнений (81′) формулы (34) из § 143, будем иметь

$$\left.\begin{aligned} -Ma(\omega_1 - \omega_0) &= S_{Ax} + S_{Bx} + S_x, \\ 0 = S_{Ay} + S_{By} + S_y, \quad 0 &= S_{Az} + S_z; \\ -J_{xz}(\omega_1 - \omega_0) &= -S_{By}b + m_x(\boldsymbol{S}), \\ -J_{yz}(\omega_1 - \omega_0) &= S_{Bx}b + m_y(\boldsymbol{S}). \end{aligned}\right\} \tag{94}$$

Уравнения (94) и служат для определения неизвестных импульсивных реакций S_{Ax}, S_{Ay}, S_{Az}, S_{Bx}, S_{By}. Входящая сюда разность $\omega_1 - \omega_0$ находится из равенства (93).

Центр удара. Появление при ударе импульсивных реакций нежелательно, так как может привести к ускорению износа или даже к разрушению частей конструкции (подшипников, вала и т. п.). Найдем, можно ли произвести удар по телу, закрепленному на оси, так, чтобы импульсивные реакции в подшипниках A и B вообще не возникли. Для этого найдем, при каких условиях можно удовлетворить уравнениям (94), положив в них $\boldsymbol{S}_A = \boldsymbol{S}_B = 0$. Если $\boldsymbol{S}_A = \boldsymbol{S}_B = 0$, то 2-е и 3-е из уравнений (94) примут вид: $\boldsymbol{S}_y = 0$, $\boldsymbol{S}_z = 0$. Чтобы удовлетворить этим уравнениям, надо направить импульс $\boldsymbol{S}$ перпендикулярно к плоскости Ayz, т. е. (по принятому условию) к плоскости, проходящей через ось вращения и центр масс тела. Допустим, что импульс $\boldsymbol{S}$ имеет такое направление (рис. 356, *б*). Поскольку при $\boldsymbol{S}_A = \boldsymbol{S}_B = 0$ вид системы (94) не зависит от выбора на оси Az начала координат, проведем для упрощения дальнейших расчетов плоскость Oxy так, чтобы импульс $\boldsymbol{S}$ лежал в этой плоскости. Тогда $m_x(\boldsymbol{S}) = m_y(\boldsymbol{S}) = 0$ и последние два уравнения системы (94) дадут $J_{xz} = J_{yz} = 0$. Это означает (см. § 133), что плоскость Oxy, в которой лежит импульс $\boldsymbol{S}$, должна проходить через такую точку O, для которой ось z является главной осью инерции тела; в частности, как показано в § 133, условия $J_{xz} = J_{yz} = 0$ будут выполняться, если плоскость Oxy является для тела плоскостью симметрии.

Обратимся, наконец, к 1-му из уравнений (94). Поскольку $\boldsymbol{S}_A = \boldsymbol{S}_B = 0$ и $S_x = -S$ (см. рис. 356, *б*), то оно принимает вид $Ma(\omega_1 - \omega_0) = S$. Одновременно уравнение (93), так как в нашем случае $m_z(S) = S \cdot h$, дает $J_z(\omega_1 - \omega_0) = Sh$. Исключая из этих двух равенств разность $\omega_1 - \omega_0$, находим

$$h = \frac{J_z}{Ma}. \tag{95}$$

Формула (95) определяет, на каком расстоянии h от оси z должен быть приложен ударный импульс.

Итак, для того чтобы при ударе по телу, закрепленному на оси z, в точках закрепления этой оси не возникло импульсивных реакций, надо:

1) чтобы ударный импульс был расположен в плоскости Oxy, перпендикулярной к оси z и проходящей через такую точку O тела, для которой ось z является главной осью инерции (в частности, плоскость Oxy может быть плоскостью симметрии тела);

2) чтобы удар был направлен перпендикулярно к плоскости, проходящей через ось вращения z и центр масс C тела;

3) чтобы ударный импульс был приложен на расстоянии $h=\frac{J_z}{Ma}$ от оси (по ту сторону от оси, где находится центр масс).

Точка K, через которую при этом будет проходить ударный импульс, не вызывающий ударных реакций в точках закрепления оси, называется *центром удара*.

Заметим, что согласно (95) центр удара совпадает с центром качаний физического маятника. Следовательно, как было показано в § 155, $h>a$, т. е. расстояние от оси до центра удара больше, чем до центра масс. Если ось вращения проходит через центр масс тела, то $a=0$, и мы получаем $h=\infty$. В этом случае центра удара на конечном расстоянии не существует, и любой удар по телу будет передаваться на ось.

Приложения полученных результатов иллюстрируются следующими примерами:

1. При конструировании вращающегося курка (см. задачу 150) или маятникового копра (прибор в виде маятника для испытания материалов на удар) и т. п. надо ось вращения располагать так, чтобы точка тела, производящая удар, была по отношению к этой оси центром удара.

2. При работе ручным молотом его надо брать за рукоятку в таком месте, чтобы точка, которой производится удар, была относительно руки центром удара. В противном случае руку будет «обжигать».

3. При ударе палкой, чтобы не «обжечь» руку (рис. 357), надо ударять тем местом, которое по отношению к руке будет центром удара. Если палку считать однородным стержнем длины l, а ось вращения совпадающей с его концом, то тогда $a=\frac{l}{2}$, $J_z=\frac{1}{3}Ml^2$ и $h=\frac{J_z}{Ma}=\frac{2}{3}l$.

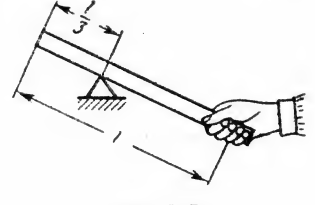


Рис. 357.

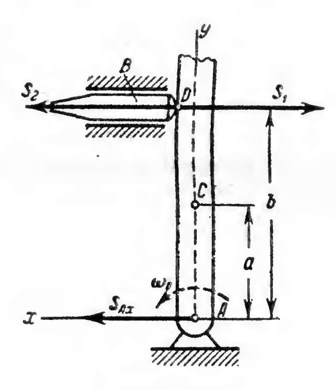


Рис. 358.

Следовательно, в случае, изображенном на рис. 357, удар надо производить тем местом стержня, которое находится на расстоянии $\frac{2}{3}l$ от руки или $\frac{1}{3}l$ от другого конца стержня.

Задача 150. Вращающийся курок AD в момент начала удара по ударнику B (рис. 358) имеет угловую скорость ω_0. Определить скорость ударника в конце удара и импульсивное давление на ось A. Массы M и m курка и ударника, момент инерций J_A курка относительно оси A и расстояния a и b известны (точка C — центр масс курка).

Решение. Обозначим ударные импульсы, действующие на курок и ударник при ударе через $\boldsymbol{S}_1$ и $\boldsymbol{S}_2$. Тогда для курка [по уравнению (93)] и

для ударника [по уравнению (80')], учитывая, что $S_1 = S_2 = S$, а $v_B = 0$, получим:

$$J_A(\omega_1 - \omega_0) = -Sb,\ mu_B = S. \qquad \text{(а)}$$

У момента Sb взят знак минус, так как момент направлен противоположно направлению вращения курка. Кроме того, поскольку для точки D курка $v_D = \omega_0 b$, а $u_D = \omega_1 b$ (v_D — скорость в начале удара, u_D — в конце), то формула (84), определяющая коэффициент восстановления при прямом ударе двух тел, даст:

$$u_D - u_B = -k(v_D - v_B)$$

или

$$\omega_1 b - u_B = -k\omega_0 b.$$

Подставляя сюда значения ω_1 и S из уравнений (а), найдем скорость ударника в конце удара:

$$u_B = \frac{J_A b(1+k)}{J_A + mb^2}\omega_0.$$

Для определения S_A — импульсивной реакции, действующей со стороны оси на курок, составляем уравнение (80) в проекциях на оси Ax и Ay. Учитывая, что

$$Q_{0x} = Mv_{Cx} = M\omega_0 a, \quad Q_{1x} = Mu_{Cx} = M\omega_1 a,$$

будем иметь:

$$Ma(\omega_1 - \omega_0) = -S + S_{Ax}, \qquad S_{Ay} = 0. \qquad \text{(б)}$$

Но из уравнений (а)

$$S = mu_B, \quad \omega_1 - \omega_0 = -\frac{mb}{J_A}u_B.$$

Подставляя эти величины в равенство (б) и заменяя u_B найденным его значением, получим окончательно:

$$S_{Ax} = \frac{J_A - Mab}{J_A + mb^2} mb(1+k)\omega_0.$$

Отсюда видно, что при $b = \frac{J_A}{Ma}$, т. е. когда точка D является центром удара, величина $S_A = 0$. Когда $Mab < J_A$, получаем $S_{Ax} > 0$, т. е. импульсивное давление на курок направлено влево, а давление на ось — вправо. При $Mab > J_A$ давление на ось направлено влево.

ГЛАВА XXX

ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА. ДАВЛЕНИЯ НА ОСЬ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТЕЛА

§ 166. Принцип Даламбера. Все методы решения задач динамики, которые мы до сих пор рассматривали, основываются на уравнениях, вытекающих или непосредственно из законов Ньютона, или же из общих теорем, являющихся следствиями этих законов. Однако этот

путь не является единственным. Оказывается, что уравнения движения или условия равновесия механической системы можно получить, положив в основу вместо законов Ньютона другие общие положения, называемые ***принципами механики.*** В ряде случаев применение этих принципов позволяет, как мы увидим, найти более эффективные методы решения соответствующих задач. В этой главе будет рассмотрен один из общих принципов механики, называемый принципом Даламбера.

Пусть мы имеем систему, состоящую из n материальных точек. Выделим какую-нибудь из точек системы с массой m_k. Под действием приложенных к ней внешних и внутренних сил $\boldsymbol{F}_k^e$ и $\boldsymbol{F}_k^i$ (в которые входят и активные силы, и реакции связей) точка получает по отношению к инерциальной системе отсчета некоторое ускорение $\boldsymbol{w}_k$.

Введем в рассмотрение величину

$$\boldsymbol{F}_k^{\text{и}} = -m_k\boldsymbol{w}_k, \tag{96}$$

имеющую размерность силы. Векторную величину, равную по модулю произведению массы точки на ее ускорение и направленную противоположно этому ускорению, называют *силой инерции* точки (иногда даламберовой силой инерции).

Тогда оказывается, что движение точки обладает следующим общим свойством: если в каждый момент времени к фактически действующим на точку силам $\boldsymbol{F}_k^e$ и $\boldsymbol{F}_k^i$ прибавить силу инерции $\boldsymbol{F}_k^{\text{и}}$, то полученная система сил будет уравновешенной, т. е. будет

$$\boldsymbol{F}_k^e + \boldsymbol{F}_k^i + \boldsymbol{F}_k^{\text{и}} = 0. \tag{97}$$

Это положение выражает принцип Даламбера для одной материальной точки. Нетрудно убедиться, что оно эквивалентно второму закону Ньютона, и наоборот. В самом деле, второй закон Ньютона для рассматриваемой точки дает $m_k\boldsymbol{w}_k = \boldsymbol{F}_k^e + \boldsymbol{F}_k^i$. Перенося здесь член $m_k\boldsymbol{w}_k$ в правую часть равенства и учитывая обозначение (96), придем к соотношению (97). Наоборот, перенося в уравнении (97) член $\boldsymbol{F}_k^{\text{и}}$ в другую часть равенства и учитывая обозначение (96), получим выражение второго закона Ньютона.

Повторяя проделанные выше рассуждения по отношению к каждой из точек системы, придем к следующему результату, выражающему принцип Даламбера для системы: *если в любой момент времени к каждой из точек системы, кроме фактически действующих на нее внешних и внутренних сил, приложить соответствующие силы инерции, то полученная система сил будет находиться в равновесии и к ней можно будет применять все уравнения статики.*

Математически принцип Даламбера выражается системой n векторных равенств вида (97), которые, очевидно, эквивалентны дифференциальным уравнениям движения системы (13), полученным в § 134. Следовательно, из принципа Даламбера, как и из уравнений (13), можно получить все общие теоремы динамики.

Значение принципа Даламбера состоит в том, что при непосредственном его применении к задачам динамики уравнения движения системы составляются в форме хорошо известных уравнений равновесия; это делает единообразным подход к решению задач и обычно намного упрощает соответствующие расчеты. Кроме того, в соединении с принципом возможных перемещений, который будет рассмотрен в следующей главе, принцип Даламбера позволяет получить новый общий метод решения задач динамики (§ 173).

Применяя принцип Даламбера, следует иметь в виду, что он, как и основной закон динамики, относится к движению, рассматриваемому по отношению к *инерциальной системе отсчета*. При этом на точки механической системы, движение которой изучается, действуют *только* внешние и внутренние силы $\boldsymbol{F}_k^e$ и $\boldsymbol{F}_k^i$, возникающие в результате взаимодействия точек системы друг с другом и с телами, не входящими в систему; под действием этих сил точки системы и движутся с соответствующими ускорениями $\boldsymbol{w}_k$. Силы же инерции, о которых говорится в принципе Даламбера, на движущиеся точки *не действуют* (иначе, согласно уравнениям (97), эти точки находились бы в покое или двигались без ускорений и тогда, как видно из равенства (96), не было бы и самих сил инерции). Введение сил инерции — это лишь прием, позволяющий составлять уравнения динамики с помощью более простых методов статики.

В § 120 рассматривались силы инерции, вводимые при изучении движения в *неинерциальных системах отсчета* и имеющие иной смысл, а именно, присоединение их к силам взаимодействия движущейся точки с другими телами позволяет сохранить для уравнений движения по отношению к неинерциальной системе отсчета тот же вид, что и в инерциальной. Называются эти силы *переносной* и *кориолисовой силами инерции*, что исключает смешение с термином просто *сила инерции*, относящимся к принципу Даламбера.

Из статики известно, что геометрическая сумма сил, находящихся в равновесии, и сумма их моментов относительно любого центра O равны нулю, причем по принципу отвердевания (§ 3) это справедливо для сил, действующих не только на твердое тело, но и на любую изменяемую систему. Тогда на основании принципа Даламбера должно быть:

$$\left.\begin{aligned} \sum(\boldsymbol{F}_k^e+\boldsymbol{F}_k^i+\boldsymbol{F}_k^{\text{и}})=0; \\ \sum[\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_k^e)+\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_k^i)+\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_k^{\text{и}})]=0. \end{aligned}\right\} \tag{98}$$

Введем обозначения:

$$\boldsymbol{R}^{\text{и}}=\sum \boldsymbol{F}_k^{\text{и}}, \quad \boldsymbol{M}_O^{\text{и}}=\sum \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_k^{\text{и}}). \tag{99}$$

Величины $\boldsymbol{R}^{\text{и}}$, $\boldsymbol{M}_O^{\text{и}}$ представляют собою *главный вектор и главный момент относительно центра O системы сил инерции.* В результате, учитывая, что геометрическая сумма внутренних сил и сумма их моментов равны нулю (§ 129), получим из равенств (98):

$$\sum \boldsymbol{F}_k^e + \boldsymbol{R}^{\text{и}} = 0, \qquad \sum m_O(\boldsymbol{F}_k^e) + \boldsymbol{M}_O^{\text{и}} = 0. \qquad (100)$$

Применение уравнений (100), вытекающих из принципа Даламбера, упрощает процесс решения задач, так как эти уравнения не содержат внутренних сил. По существу уравнения (100) эквивалентны уравнениям, выражающим теоремы об изменении количества движения и главного момента количеств движения системы, и отличаются от них только по форме.

Уравнениями (100) особенно удобно пользоваться при изучении движения твердого тела или системы твердых тел. Для полного изучения движения любой изменяемой системы этих уравнений будет недостаточно [1]).

В проекциях на оси координат равенства (100) дают уравнения, аналогичные соответствующим уравнениям статики (см. §§ 24, 49). Чтобы пользоваться этими уравнениями при решении задач, надо знать выражения главного вектора и главного момента сил инерций.

§ 167. Главный вектор и главный момент сил инерции твердого тела. Из равенств (99) следует (см. § 47), что систему сил инерции твердого тела можно заменить одной силой, равной $\boldsymbol{R}^{\text{и}}$ и приложенной в центре O, и парой с моментом, равным $\boldsymbol{M}_O^{\text{и}}$. Главный вектор системы сил, как известно, не зависит от центра приведения и может быть вычислен заранее. Так как $\boldsymbol{F}_k^{\text{и}} = -m_k \boldsymbol{w}_k$, то, принимая во внимание равенство (15) из § 135, будем иметь [2]):

$$\boldsymbol{R}^{\text{и}} = -\sum m_k \boldsymbol{w}_k = -\mathcal{M} \boldsymbol{w}_C. \qquad (101)$$

Следовательно, *главный вектор сил инерции тела, совершающего любое движение, равен произведению массы тела на ускорение его центра масс и направлен противоположно этому ускорению.*

Если ускорение $\boldsymbol{w}_C$ разложить на касательное и нормальное, то вектор $\boldsymbol{R}^{\text{и}}$ разложится на составляющие

$$\boldsymbol{R}_\tau^{\text{и}} = -\mathcal{M} \boldsymbol{w}_{C\tau}, \quad \boldsymbol{R}_n^{\text{и}} = -\mathcal{M} \boldsymbol{w}_{Cn}. \qquad (101')$$

---

[1]) Этот вывод вытекает из тех же рассуждений, которые были приведены в § 3 при рассмотрении принципа отвердевания. См. также сказанное об общих теоремах динамики в § 134.

[2]) В данной главе для большей ясности масса тела будет обозначаться буквой рукописного шрифта $\mathcal{M}$ (см. сноску на стр. 332).

Главный момент сил инерции найдем для некоторых частных случаев.

1. Поступательное движение. В этом случае тело никакого вращения вокруг центра масс C не имеет. Отсюда заключаем, что $\sum m_C(F_k^e) = 0$, и равенство (100) дает $M_C^{и} = 0$.

Следовательно, *при поступательном движении силы инерции твердого тела приводятся к одной равнодействующей, равной* $R^{и}$ *и проходящей через центр масс тела.*

2. Плоскопараллельное движение. Пусть тело имеет плоскость симметрии и движется параллельно ей. Вследствие симметрии главный вектор и результирующая пара сил инерции, так же как и центр масс C тела, лежат в плоскости симметрии.

Тогда, помещая центр приведения в точке C, получим из равенства (100) $M_C^{и} = -\sum m_C(F_k^e)$. С другой стороны (см. § 156), по последнему из уравнений (68) $\sum m_C(F_k^e) = J_C \cdot \varepsilon$. Отсюда заключаем, что

$$M_C^{и} = -J_C \cdot \varepsilon. \qquad (102)$$

Таким образом, в рассмотренном случае движения *система сил инерции приводится к результирующей силе, равной* $R^{и}$ [формула (101)] *и приложенной в центре масс C тела* (рис. 359), *и к лежащей в плоскости симметрии тела паре, момент которой определяется формулой* (102). Знак минус в формуле показывает, что направление момента $M_C^{и}$ противоположно направлению углового ускорения тела.

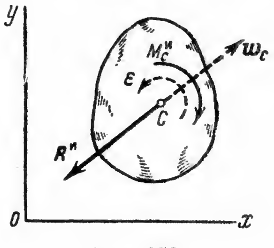


Рис. 359.

3. Вращение вокруг оси, проходящей через центр масс тела. Пусть опять тело имеет плоскость симметрии, а ось вращения Cz перпендикулярна к этой плоскости и проходит через центр масс тела. Тогда данный случай будет частным случаем предыдущего. Но при этом $w_C = 0$, а следовательно, и $R^{и} = 0$.

Таким образом, в рассматриваемом случае *система сил инерции приводится к одной паре, лежащей в плоскости, перпендикулярной к оси вращения тела, и имеющей момент*

$$M_z^{и} = -J_z \cdot \varepsilon. \qquad (102')$$

При решении задач по формулам (101) и (102) вычисляются модули соответствующих величин, а направления их указываются на чертеже.

§ 168. Решение задач. Принцип Даламбера дает единый метод составления уравнений движения любой несвободной системы[1]). С его помощью просто и наглядно решаются задачи, в которых, зная движение системы, нужно определить реакции наложенных связей. При этом из рассмотрения исключаются все наперед неизвестные внутренние силы. В случаях, когда надо определить реакции внутренних связей, систему следует расчленить на такие части, по отношению к которым искомые силы будут внешними.

Кроме того, принципом можно пользоваться для составления дифференциальных уравнений движения и, в частности, для определения ускорений движущихся тел.

В случае движения одной несвободной материальной точки применение принципа Даламбера приводит к уравнениям, аналогичным тем, которые рассматривались в §§ 118, 119 (см. задачу 151).

Рис. 360.

Задача 151. Решить задачу 112 (см. § 119) с помощью принципа Даламбера.

Решение. Изображаем груз в том положении, для которого надо найти натяжение нити (рис. 360). На груз действуют сила тяжести $\boldsymbol{P}$ и реакция нити $\boldsymbol{T}$. Присоединяем к этим силам нормальную и касательную силы инерции $\boldsymbol{F}_n^{\text{и}}$ и $\boldsymbol{F}_\tau^{\text{и}}$. Полученная система сил, согласно принципу Даламбера, будет находиться в равновесии. Приравнивая нулю сумму проекций всех этих сил на нормаль M_1O, получим

$$T - P - F_n^{\text{и}} = 0.$$

Так как $F_n^{\text{и}} = mw_n = \frac{mv_1^2}{l}$, где v_1 — скорость груза в положении M_1, то

$$T = P + F_n^{\text{и}} = P + \frac{mv_1^2}{l}.$$

Таким образом, мы получили для T то же выражение, что и в задаче 112. Определяя теперь, как и в задаче 112, величину v_1 с помощью теоремы об изменении кинетической энергии, найдем искомый результат.

Уравнение в проекции на касательную дает $F_\tau^{\text{и}} = 0$. Этот результат получается потому, что в точке M_1 производная $\frac{dv}{dt} = 0$, так как в этой точке величина скорости имеет максимальное значение.

Задача 152. Два груза весом P_1 и P_2 каждый, связанные нитью, движутся по горизонтальной плоскости под действием силы $\boldsymbol{Q}$, приложенной к первому грузу (рис. 361, a). Коэффициент трения грузов о плоскость равен f. Определить ускорения грузов и натяжение нити.

---

[1]) Для этой цели можно особенно эффективно пользоваться принципом Даламбера, применяя его вместе с принципом возможных перемещений (см. § 173).

Решение. Изображаем все действующие на систему внешние силы. Прибавляем к этим силам силы инерции грузов. Так как оба груза движутся

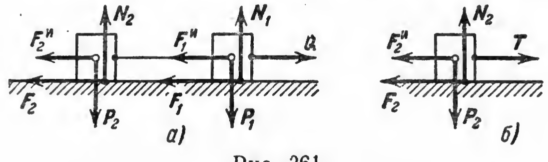


Рис. 361.

поступательно с одним и тем же ускорением w, то по модулю

$$F_1^и = \frac{P_1}{g} w, \quad F_2^и = \frac{P_2}{g} w.$$

Направления сил показаны на чертеже. Силы трения равны

$$F_1 = fP_1, \quad F_2 = fP_2.$$

Согласно принципу Даламбера полученная система сил должна находиться в равновесии. Составляя уравнение равновесия в проекции на горизонтальную ось, найдем:

$$Q - f(P_1 + P_2) - \frac{1}{g}(P_1 + P_2) w = 0.$$

Отсюда

$$w = \left(\frac{Q}{P_1 + P_2} - f \right) g.$$

Очевидно, грузы будут двигаться, если $f < \dfrac{Q}{P_1 + P_2}$.

Искомое натяжение нити является в рассматриваемой системе силой внутренней. Для ее определения расчленяем систему и применяем принцип Даламбера к одному из грузов, например ко второму (рис. 361, *б*). На этот груз действуют сила $\boldsymbol{P}_2$, нормальная реакция $\boldsymbol{N}_2$, сила трения $\boldsymbol{F}_2$ и натяжение нити $\boldsymbol{T}$. Присоединяя к ним силу инерции $\boldsymbol{F}_2^и$ и составляя уравнение равновесия в проекции на горизонтальную ось, будем иметь:

$$T - fP_2 - \frac{P_2}{g} w = 0.$$

Подставляя сюда найденное ранее значение w, получим окончательно

$$T = \frac{QP_2}{P_1 + P_2}.$$

Интересно, что натяжение нити в этом случае не зависит от силы трения и при одном и том же суммарном весе системы будет тем меньше, чем меньше вес второго (заднего) груза. Поэтому, например, в железнодорожном составе выгоднее в голове помещать более тяжелые вагоны, а в хвосте — более легкие.

Рассмотрим численный пример. Пусть $Q = 20$ *кГ*, $P_1 = 40$ *кГ*, $P_2 = 10$ *кГ*. Тогда движение возможно, если $f < 0{,}4$. Натяжение нити при этом равно 4 *кГ*. Если грузы поменять местами, то натяжение нити станет равно 16 *кГ*.

Задача 153. Решить задачу 133 (§ 146) с помощью принципа Даламбера и найти дополнительно натяжение нити.

Решение. 1) Рассматривая барабан и груз как одну систему, присоединяем к телам системы силы инерции (рис. 362). Груз A движется поступательно, и для него $R^{и} = \frac{Q}{g} w_A = \frac{Q}{g} r\varepsilon$. Силы инерции барабана приводятся к паре с моментом $M_O^{и}$, равным по модулю $J_O\varepsilon = \frac{P}{g}\rho_{и}^2\varepsilon$ и направленным противоположно вращению (см. § 167). Составляя для всех сил условие равновесия в виде $\sum m_O(F_k) = 0$, получим:

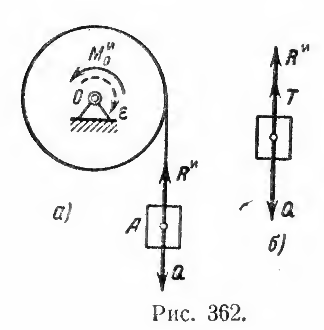


Рис. 362.

$$|M_O^{и}| + R^{и} r - Qr = 0$$

или

$$\frac{P}{g}\rho_{и}^2\varepsilon + \frac{Q}{g} r^2\varepsilon - Qr = 0.$$

Отсюда находим:

$$\varepsilon = \frac{Qgr}{P\rho_{и}^2 + Qr^2}.$$

2) Рассматривая теперь груз A отдельно и присоединяя к действующим на него силам $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{T}$ силу инерции $\boldsymbol{R}^{и}$, получим из условий равновесия, что натяжение нити

$$T = Q - R^{и} = Q\left(1 - \frac{r\varepsilon}{g}\right) = \frac{PQ\rho_{и}^2}{P\rho_{и}^2 + Qr^2}.$$

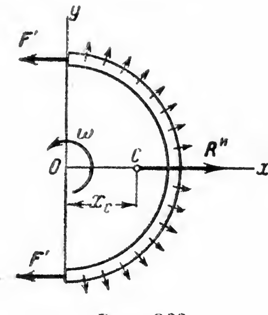


Рис. 363.

Задача 154. Определить силу, стремящуюся разорвать равномерно вращающийся маховик массы $\mathscr{M}$, считая его массу распределенной по ободу. Радиус маховика равен r, а угловая скорость ω.

Решение. Искомая сила является внутренней. Для ее определения разрезаем обод на две части и применяем принцип Даламбера к одной из половин (рис. 363). Действие отброшенной части заменяем одинаковыми силами $\boldsymbol{F}'$, численно равными искомой силе $\boldsymbol{F}$. Для каждого элемента обода сила инерции (центробежная сила) направлена вдоль радиуса. Эти сходящиеся в точке O силы имеют равнодействующую, равную главному вектору сил инерции $\boldsymbol{R}^{и}$ и направленную вследствие симметрии вдоль оси Ox. По формуле (101) $R^{и} = 0{,}5\mathscr{M} w_C = 0{,}5\mathscr{M} x_C \omega^2$, где x_C — координата центра масс дуги полуокружности, равная $\frac{2r}{\pi}$ (см. § 57). Следовательно,

$$R^{и} = \frac{\mathscr{M} r\omega^2}{\pi}.$$

Условия равновесия дают $2F = R^{и}$ и окончательно

$$F = \frac{\mathscr{M} r\omega^2}{2\pi}.$$

С помощью этой формулы можно найти предельную угловую скорость, при превышении которой маховику из данного материала грозит разрыв.

Задача 155. Однородный стержень AB длиной l и весом P прикреплен шарниром A к вертикальному валу, вращающемуся с угловой скоростью ω (рис. 364). Найти натяжение T горизонтальной нити, удерживающей стержень под углом α к валу.

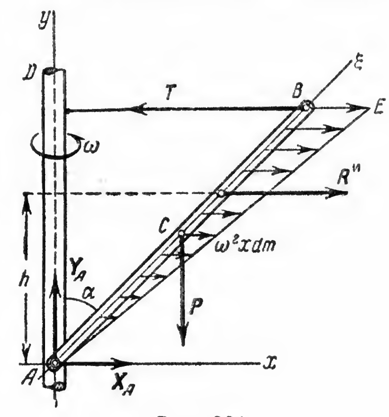


Рис. 364.

Решение. Пользуясь принципом Даламбера, присоединяем к действующим на стержень внешним силам $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{X}_A$, $\boldsymbol{Y}_A$ силы инерции. Для каждого элемента стержня с массой Δm центробежная сила инерции равна $\Delta m \omega^2 x$, где x — расстояние элемента от оси вращения Ay. Равнодействующая этих распределенных по линейному закону параллельных сил (см. § 28) проходит через центр тяжести треугольника ABE, т. е. на расстоянии $h = \frac{2}{3} l \cos\alpha$ от оси Ax. Так как эта равнодействующая равна главному вектору сил инерции[1]), то по формуле (101)

$$R^и = \mathscr{M} w_C = \mathscr{M} \omega^2 x_C = \frac{P}{g} \omega^2 \frac{l}{2} \sin\alpha$$

(здесь x_C — координата центра тяжести стержня).

Составляя теперь уравнение статики $\sum m_A(\boldsymbol{F}_k) = 0$, получим:

$$Tl\cos\alpha - R^и h - P\frac{l}{2}\sin\alpha = 0.$$

Подставляя сюда значения $R^и$ и h, найдем окончательно

$$T = P\left(\frac{l\omega^2}{3g}\sin\alpha + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\right).$$

Другое решение. Задачу можно решить, не пользуясь результатами § 28, а вычисляя сумму моментов сил инерций относительно центра A непосредственно путем интегрирования. Проведем вдоль стержня AB ось $A\xi$. На каждый элемент стержня $d\xi$ с координатой ξ действует сила инерции, равная $\omega^2 x dm$. Ее момент относительно центра A будет равен $-y\omega^2 x dm$. Тогда уравнение моментов даст

$$\sum m_A(\boldsymbol{F}_k) \equiv Tl\cos\alpha - P\frac{l}{2}\sin\alpha - \int_0^l \omega^2 yx\,dm = 0. \qquad (a)$$

[1]) Из статики известно, что для любой системы сил равнодействующая (если она существует) равна главному вектору этих сил. Следовательно, равнодействующая сил инерции, когда она существует, равна $\boldsymbol{R}^и$, но при непоступательном движении эта равнодействующая вообще не проходит через центр масс тела, что и имеет место в данном случае.

Выражая все величины, стоящие под знаком интеграла, через ξ, получим:

$$x = \xi \sin\alpha, \quad y = \xi \cos\alpha, \quad dm = \frac{\mathcal{M}}{l} d\xi.$$

В результате будем иметь:

$$\int_0^l \omega^2 yx\, dm = \frac{\mathcal{M}}{l} \omega^2 \sin\alpha \cos\alpha \int_0^l \xi^2 d\xi = \frac{1}{3} \frac{P}{g} l^2 \omega^2 \sin\alpha \cos\alpha.$$

Подставляя это значение в равенство (а), находим для T то же выражение, что и при предыдущем решении.

Задача 156. Однородный стержень, изогнутый под прямым углом, вращается в горизонтальной плоскости вокруг своего конца A (рис. 365) и имеет в данный момент угловую скорость ω и угловое ускорение ε. Длина $AB = a$, $BC = b$; масса единицы длины стержня равна ρ_1. Найти усилия в сечении стержня, отстоящем от точки B на расстоянии $BD = h$.

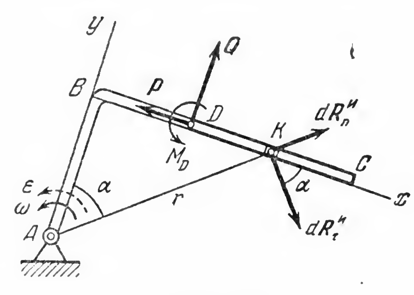


Рис. 365.

Решение. Искомые силы являются внутренними. Чтобы их найти, разрежем стержень на две части и рассмотрим движение части DC длиной $b - h$. Действие отброшенной части ABD заменится приложенной в центре сечения D силой, которую мы представим составляющими $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$ и парой с моментом M_D (см. § 27 и рис. 72). Величины P, Q, M_D и будут определять искомые усилия в сечении D стержня, т. е. силы, с которыми части ABD и DC действуют друг на друга. Для вычисления этих величин воспользуемся принципом Даламбера.

Разложим силы инерции частиц стержня на касательные и нормальные составляющие и обозначим главные векторы этих составляющих через $\boldsymbol{R}_\tau^и$ и $\boldsymbol{R}_n^и$. Тогда, проводя оси Bxy, как показано на рисунке, и составляя для действующих сил и сил инерции соответствующие уравнения равновесия, будем иметь

$$\left.\begin{aligned} -P + R_{\tau x}^и + R_{nx}^и = 0, \quad Q + R_{\tau y}^и + R_{ny}^и = 0, \\ M_D + M_{D1}^и + M_{D2}^и = 0, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(a)}$$

где $M_{D1}^и$ — сумма моментов относительно центра D касательных сил инерции, а $M_{D2}^и$ — нормальных.

Вычислим входящие в уравнения (а) величины. Для элемента K стержня длиною dx, отстоящего от точки B на расстоянии $BK = x$, касательная и нормальная составляющие силы инерции по модулю равны $dR_\tau^и = \varepsilon r\, dm$, $dR_n^и = \omega^2 r\, dm$, где $r = AK$ и $dm = \rho_1 dx$. Тогда, учитывая, что $r\cos\alpha = a$, $r\sin\alpha = x$, будем иметь:

$$dR_{\tau x}^и = (\rho_1 \varepsilon r\, dx)\cos\alpha = \rho_1 \varepsilon a\, dx, \quad dR_{\tau y}^и = -(\rho_1 \varepsilon r\, dx)\sin\alpha = -\rho_1 \varepsilon x\, dx.$$

Аналогично найдем, что

$$dR_{nx}^и = \rho_1 \omega^2 x\, dx, \quad dR_{ny}^и = \rho_1 \omega^2 a\, dx.$$

Отсюда

$$R^{\text{и}}_{\tau x}=\rho_1\varepsilon a\int\limits_h^b dx=\rho_1\varepsilon a\,(b-h),\quad R^{\text{и}}_{\tau y}=-\rho_1\varepsilon\int\limits_h^b x\,dx=-\frac{1}{2}\rho_1\varepsilon\,(b^2-h^2);$$

$$R^{\text{и}}_{nx}=\frac{1}{2}\rho_1\omega^2\,(b^2-h^2),\quad R^{\text{и}}_{ny}=\rho_1\omega^2\,a\,(b-h).$$

Далее, замечая, что составляющие сил инерций вдоль оси Bx дают относительно центра D моменты, равные нулю, получаем (см. рисунок):

$$M^{\text{и}}_{D1}=-\int\limits_h^b (x-h)\,\left|dR^{\text{и}}_{\tau y}\right|=-\rho_1\varepsilon\int\limits_h^b (x-h)\,x\,dx=-\frac{1}{6}\rho_1\varepsilon(h^3+2b^3-3b^2h),$$

$$M^{\text{и}}_{D2}=\int\limits_h^b (x-h)\,dR^{\text{и}}_{ny}=\rho_1\,\omega^2 a\int\limits_h^b (x-h)\,dx=\frac{1}{2}\rho_1\omega^2 a\,(b-h)^2.$$

Подставляя все вычисленные величины в уравнения (а), найдем, что в сечении D действуют растягивающая сила P, поперечная сила Q и изгибающий момент M_D, численно равные:

$$P=\rho_1\left[a\,(b-h)\,\varepsilon+\frac{1}{2}(b^2-h^2)\,\omega^2\right],$$

$$Q=\rho_1\left[\frac{1}{2}(b^2-h^2)\,\varepsilon-a\,(b-h)\,\omega^2\right],$$

$$M_D=\rho_1\left[\frac{1}{6}(2b^3+h^3-3b^2h)\,\varepsilon-\frac{1}{2}a\,(b-h)^2\,\omega^2\right].$$

Входящая сюда величина ρ_1 равна отношению массы стержня к его длине. Случай направленного в ту же сторону замедленного вращения получается заменой ε на $-\varepsilon$. При $a=0$ будем иметь случай вращения стержня BC вокруг его конца B.

§ 169*. Динамические реакции, действующие на ось вращающегося тела. Динамическое уравновешивание масс. Рассмотрим какое-нибудь твердое тело, *равномерно* вращающееся с угловой скоростью ω вокруг оси, закрепленной в подшипниках A и B (рис. 366). Найдем *динамические* реакции X_A, Y_A, Z_A, X_B, Y_B подшипников, действующие на ось, т. е. реакции, возникающие при вращении тела. Пусть на тело действуют заданные силы $\boldsymbol{P}^e_1$, $\boldsymbol{P}^e_2$, ..., $\boldsymbol{P}^e_n$. Обозначим проекции главного вектора этих сил на координатные оси $Axyz$, вращающиеся вместе с телом, через R^e_x, R^e_y, R^e_z ($R^e_x=\sum P^e_{kx}$ и т. д.), а их главные моменты относительно тех же осей — через M^e_x, M^e_y, M^e_z ($M^e_x=\sum m_x(\boldsymbol{P}^e_k)$ и т. д.). При этом, так как тело вращается равномерно, то $M^e_z=0$. Для определения искомых реакций воспользуемся принципом Даламбера и, присоединяя к силам, действующим на все точки тела, соответствующие силы инерции, составим урав-

нения (100) в проекциях на оси $Axyz$. В нашем случае эти уравнения (или соответствующие им уравнения § 49), если обозначить $AB = b$, принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} X_A + X_B + R_x^e + R_x^{\text{и}} = 0, \\ Y_A + Y_B + R_y^e + R_y^{\text{и}} = 0, \quad Z_A + R_z^e + R_z^{\text{и}} = 0, \\ -Y_B b + M_x^e + M_x^{\text{и}} = 0, \; X_B b + M_y^e + M_y^{\text{и}} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (103)$$

Последнее уравнение $M_z^e + M_z^{\text{и}} = 0$ удовлетворяется тождественно (так как $\varepsilon = 0$) и мы его опускаем.

Главный вектор сил инерции $\boldsymbol{R}^{\text{и}} = -\mathcal{M}\boldsymbol{w}_C$. При $\omega = \text{const}$ центр масс C имеет только нормальное ускорение $w_{Cn} = \omega^2 h_C$, где h_C — расстояние точки C от оси вращения. Следовательно, направление вектора $\boldsymbol{R}^{\text{и}}$ совпадает с направлением OC [1]). Вычисляя проекции $\boldsymbol{R}^{\text{и}}$ на оси координат и учитывая, что $h_C \cos\alpha = x_C$, $h_C \sin\alpha = y_C$, где x_C и y_C — координаты центра масс, будем иметь:

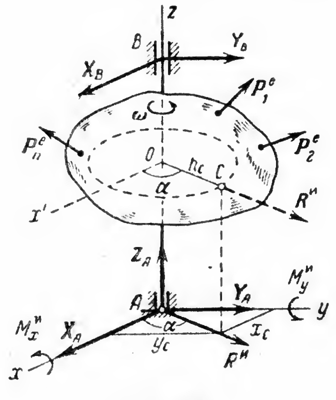


Рис. 366.

$$R_x^{\text{и}} = \mathcal{M}\omega^2 h_C \cos\alpha = \mathcal{M}\omega^2 x_C;$$

$$R_y^{\text{и}} = \mathcal{M}\omega^2 h_C \sin\alpha = \mathcal{M}\omega^2 y_C; \; R_z^{\text{и}} = 0.$$

Чтобы найти $M_x^{\text{и}}$ и $M_y^{\text{и}}$, рассмотрим какую-нибудь частицу тела с массой m_k, отстоящую от оси на расстоянии h_k. Для нее при $\omega = \text{const}$ сила инерции тоже имеет только центробежную составляющую $F_n^{\text{и}} = m_k\omega^2 h_k$, проекции которой, как и у вектора $\boldsymbol{R}^{\text{и}}$, равны:

$$F_{kx}^{\text{и}} = m_k\omega^2 x_k, \; F_{ky}^{\text{и}} = m_k\omega^2 y_k, \; F_{kz}^{\text{и}} = 0.$$

Тогда [см. § 43, формулы (52)]

$$m_x(\boldsymbol{F}_k^{\text{и}}) = -F_{ky}^{\text{и}} z_k = -m_k\omega^2 y_k z_k; \; m_y(\boldsymbol{F}_k^{\text{и}}) = F_{kx}^{\text{и}} z_k = m_k\omega^2 x_k z_k.$$

Составляя такие выражения для всех точек системы, складывая их и вынося общий множитель за скобку, будем иметь:

$$M_x^{\text{и}} = -\left(\sum m_k y_k z_k\right)\omega^2 = -J_{yz}\omega^2, \; M_y^{\text{и}} = \left(\sum m_k x_k z_k\right)\omega^2 = J_{xz}\omega^2, \quad (104)$$

---

[1]) Пунктиром на чертеже показано, как *направлен* вектор $\boldsymbol{R}^{\text{и}}$. Если же привести силы инерции к некоторому центру, например центру A, то они заменятся приложенной в этом центре *силой*, равной $\boldsymbol{R}^{\text{и}}$, и парой, момент которой для центра A слагается из $\boldsymbol{M}_x^{\text{и}}$ и $\boldsymbol{M}_y^{\text{и}}$.

где J_{xz} и J_{yz} — соответствующие центробежные моменты инерции [1]). Подставляя все найденные значения в равенства (103), получим:

$$\left.\begin{aligned} X_A+X_B=-R_x^e-\mathcal{M}x_C\omega^2, \qquad Y_A+Y_B=-R_y^e-\mathcal{M}y_C\omega^2,\\ Z_A=-R_z^e, \qquad X_Bb=-M_y^e-J_{xz}\omega^2, \qquad Y_Bb=M_x^e-J_{yz}\omega^2. \end{aligned}\right\} \quad (105)$$

Уравнения (105) и определяют *динамические реакции, действующие на ось равномерно вращающегося твердого тела, если осью вращения является ось Oz.*

Назовем условно *статическими реакциями* те значения реакций, которые дают уравнения (105), если в них положить $\omega=0$ (статическими, в смысле действующими на ось AB при покое, эти реакции будут, когда проекции на оси $Axyz$ приложенных сил постоянны). Как видно из уравнений (105), динамические реакции могут вообще быть значительно больше статических, причем это зависит не только от значения ω, но и от величин x_C, y_C, J_{xz}, J_{yz}, характеризующих распределение масс тела по отношению к оси вращения z.

Однако из уравнений (105) видно, что наличие вращения не будет влиять на величины реакций подшипников A и B, если

$$x_C=0, \quad y_C=0; \qquad (106)$$

$$J_{xz}=0, \quad J_{yz}=0. \qquad (107)$$

Равенства (106) и (107) выражают *условия того, что динамические реакции, действующие на ось вращающегося тела, равны статическим реакциям* или, как говорят, *условия динамической уравновешенности масс* тела при его вращении вокруг оси z.

Условия (106) означают, что центр масс тела должен лежать на оси вращения, а условия (107) — что ось вращения должна быть главной осью инерции тела для начала координат A. При одновременном же выполнении условий (106) и (107) ось Az будет главной центральной осью инерции тела (см. § 133). Таким образом, *динамические реакции, действующие на ось вращающегося тела, будут равны статическим, если ось вращения является одной из главных центральных осей инерции тела.* Этот вывод остается справедливым и в случае, когда тело вращается неравномерно.

Рассмотренная задача позволяет одновременно уяснить механический смысл величин J_{xz} и J_{yz}, а именно, *центробежные моменты инерции J_{xz} и J_{yz} характеризуют степень динамической неуравновешенности масс тела при его вращении вокруг оси z.*

Динамическое уравновешивание масс (или, как еще говорят, уравновешивание сил инерции) представляет собою важную техническую задачу, которая, как мы видим, сводится к определению

---

[1]) См. § 133, формулы (10). В равенствах (104) величины J_{xz}, J_{yz} входят в выражения моментов центробежных сил инерций; этим можно объяснить появление термина «центробежный момент инерции».

главных центральных осей инерции тела. В § 133 было показано, что любое тело имеет по крайней мере три взаимно перпендикулярные главные центральные оси инерции.

Докажем другое, практически не менее важное положение: *любую ось, проведенную в теле, можно сделать главной центральной осью инерции прибавлением к телу двух точечных масс.* Пусть для тела массы $\mathcal{M}$ величины x_C, y_C, J_{xz}, J_{yz} известны и не равны нулю. Прибавим к телу две массы m_1 и m_2 в точках с координатами (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2). Тогда из формул (1) и (10) следует, что если удовлетворить равенствам

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{M}x_C + m_1x_1 + m_2x_2 = 0, \quad &\mathcal{M}y_C + m_1y_1 + m_2y_2 = 0, \\ &J_{xz} + m_1x_1z_1 + m_2x_2z_2 = 0, \quad &J_{yz} + m_1y_1z_1 + m_2y_2z_2 = 0, \end{aligned}\right\} \quad (108)$$

то для полученного тела будет $x'_C = y'_C = J'_{xz} = J'_{yz} = 0$, т. е. ось Oz станет главной центральной осью инерции. Подбирая массы m_1, m_2 и их положения так, чтобы удовлетворялись уравнения (108), мы и решим поставленную задачу. Частью величин при этом следует, конечно, задаться наперед. Например, можно задать значения m_1, m_2 и z_1, z_2 (но так, чтобы было $z_1 \neq z_2$), а x_1, y_1, x_2, y_2 найти из уравнений (108) и т. п.

Такой метод уравновешивания масс широко используется в технике для уравновешивания коленчатых валов, кривошипов, спарников и т. п. При этом окончательная балансировка производится на специальных стендах.

Для определения давлений на ось в отдельных конкретных задачах обычно не пользуются готовыми уравнениями (105), а каждый раз непосредственно применяют принцип Даламбера.

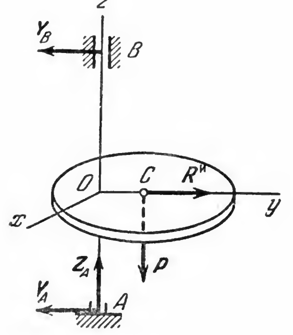


Рис. 367.

Задача 157. Ось вращения диска, перпендикулярная к его плоскости (рис. 367), смещена от центра масс на расстояние a. Вес диска равен P, угловая скорость постоянна и равна ω. Определить динамические реакции подшипников A и B, если $OA = OB = h$.

Решение. Проведем вращающиеся вместе с телом оси $Oxyz$ так, чтобы ось Oy прошла через центр масс C диска (см. рис. 367). Ось Oz будет главной осью инерции по отношению к точке O, поскольку плоскость Oxy является плоскостью симметрии диска. Тогда $J_{xz} = J_{yz} = 0$ и из формул (104) и условия $\omega = \text{const}$ вытекает, что $M_O^и = 0$. Следовательно, силы инерции приводятся к одной равнодействующей, проходящей через точку O и направленной вдоль линии OC (вдоль оси Oy). По модулю $R^и = Mw_{Cn} = \dfrac{P}{g} a\omega^2$. Так как силы $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{R}^и$ лежат в плоскости Oyz, то реакции под-

шипников лежат в этой же плоскости, т. е. имеют составляющие Y_A, Z_A в точке A и Y_B в точке B. Тогда, составляя на основании принципа Даламбера для всех действующих сил и сил инерции уравнения равновесия в проекциях на оси Oy и Oz и уравнение моментов относительно центра A, будем иметь:

$$R^{\text{и}} - Y_A - Y_B = 0,\ Z_A - P = 0,$$
$$Y_B \cdot 2h - Pa - R^{\text{и}} h = 0.$$

Решая эти уравнения, найдем:

$$Y_B = \frac{Pa\omega^2}{2g} + \frac{a}{2h}P, \quad Y_A = \frac{Pa\omega^2}{2g} - \frac{a}{2h}P, \quad Z_A = P.$$

Реакции Y_A и Y_B все время располагаются в плоскости Oyz, вращающейся вместе с телом.

Задача 158. Под прямым углом к вертикальному валу AB длины b приварены два одинаковых стержня, расположенных в одной плоскости на расстоянии h друг от друга (рис. 368); длина каждого из стержней равна $2l$, а масса m. Пренебрегая действием сил тяжести, найти динамические давления на вал, если он вращается с постоянной угловой скоростью ω.

Решение. По принципу Даламбера реакции подшипников и силы инерции образуют уравновешенную систему. В данном случае силы инерции каждого из стержней равны по модулю

$$F_1^{\text{и}} = F_2^{\text{и}} = ml\omega^2$$

и образуют пару, которая, очевидно, уравновешивается парой сил X_A, X_B. Моменты этих пар по модулю равны друг другу. Следовательно, $X_A b = F_1^{\text{и}} h$, откуда

$$X_A = X_B = \frac{F_1^{\text{и}} h}{b} = \frac{mlh}{b}\omega^2.$$

Рис. 368.

Пара все время расположена в плоскости Axz, вращающейся вместе с телом.

Покажем, как тот же результат находится из уравнений (105). В данном случае $x_C = y_C = 0$ и $J_{yz} = 0$, так как плоскость Axz — плоскость симметрии. Величина $J_{xz} = J'_{xz} + J''_{xz}$, т. е. равна сумме центробежных моментов инерции каждого из стержней. Для нижнего стержня все $z_k = a$, а для верхнего все $z_k = a + h$. Тогда по формулам (10)

$$J'_{xz} = \left(\sum m_k x_k\right) a = m x'_C a = -mla; \quad J''_{xz} = m x''_C (a+h) = ml(a+h),$$

откуда

$$J_{xz} = mlh.$$

Подставляя все вычисленные величины в уравнения (105), находим

$$Y_A = Y_B = 0; \quad X_A = -X_B = \frac{ml\omega^2}{b}$$

Знак минус у X_B здесь получается потому, что силы X_B на рис. 366 и 368 имеют противоположные направления.

Задача 159. Коленчатый вал одноцилиндрового двигателя несет на себе два одинаковых маховика A и B радиуса $r=0,5$ *м*. Рассматривая щеки и шейку колена вала как груз весом $p=21$ *кГ*, находящийся на расстоянии $h=0,2$ *м* от оси, определить веса p_A и p_B грузов, которые надо расположить на ободах маховиков, чтобы сбалансировать систему, если $a=0,6$ *м*, $b=1,4$ *м* (рис. 369).

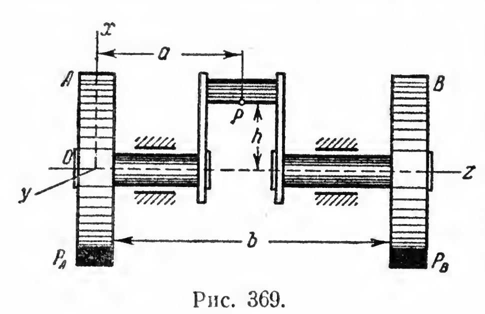


Рис. 369.

Решение. Проведем оси координат, вращающиеся вместе с телом, так, чтобы колено вала лежало в плоскости Oxz (см. чертеж). Тогда эта плоскость будет плоскостью симметрии. Следовательно, $y_C=0$, и так как при этом ось Oy по отношению к точке O будет главной, то и $J_{yz}=0$. Кроме того, если обозначить вес всей системы через P, то для нее

$$x_C=\frac{ph}{P},\quad J_{xz}=\frac{p}{g}ha.$$

Последний результат следует из того, что центробежный момент инерции системы равен сумме центробежных моментов инерции ее частей, а для маховиков и примыкающих к ним частей вала центробежные моменты J_{xz} равны нулю (ось Oz — ось симметрии).

Тогда, как видно из уравнений (108), для присоединяемых грузов координаты $y_A=y_B=0$, а веса p_A и p_B должны удовлетворять равенствам:

$$Px_C+p_Ax_A+p_Bx_B=0,\quad J_{xz}+\frac{p_A}{g}x_Az_A+\frac{p_B}{g}x_Bz_B=0.$$

Так как грузы располагаются на ободах маховиков, то $z_A=0$, $z_B=b$ и $x_A=x_B=-r$ (при знаке плюс уравнения не имеют решений, следовательно, грузы должны быть снизу). Решая уравнения, найдем:

$$p_A=\frac{(b-a)\,h}{rb}p=4,8\ кГ,\quad p_B=\frac{ah}{rb}p=3,6\ кГ.$$

Присоединение этих грузов делает систему уравновешенной, а ось Oz — главной центральной осью инерции (но не осью симметрии) тела.

ГЛАВА XXXI

ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

§ 170. Возможные перемещения системы. Число степеней свободы. В этой главе будет рассмотрен еще один общий принцип механики — принцип возможных перемещений; этот принцип в наиболее общем виде устанавливает условия равновесия любой механической системы.

При изучении равновесия системы тел методами так называемой геометрической статики (раздел I курса) приходится рассматривать равновесие каждого из тел в отдельности, заменяя наложенные связи соответствующими наперед неизвестными реакциями. Когда число тел в системе велико, этот путь становится весьма громоздким и связан с необходимостью решать большое число уравнений со многими неизвестными.

Отличительная особенность метода, вытекающего из принципа возможных перемещений, состоит в том, что при его применении эффект действия связей учитывается не путем введения неизвестных наперед реакций, а путем рассмотрения перемещений, которые можно сообщить точкам системы, если вывести систему из занимаемого ею положения. Эти перемещения называют в механике *возможными* (или *виртуальными*) *перемещениями*.

Возможные перемещения точек системы должны удовлетворять двум условиям: 1) они должны быть *бесконечно малыми*, так как при конечных перемещениях система перейдет в другое положение, где условия равновесия могут быть другими; 2) они должны быть такими, чтобы при этом все *наложенные на систему связи сохранялись*, так как иначе мы изменим вид рассматриваемой механической системы (система станет другой).

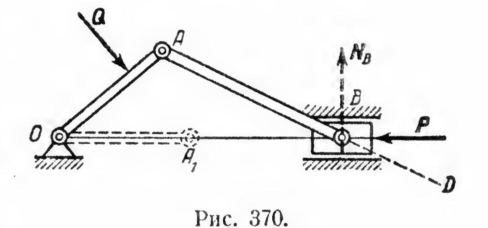


Рис. 370.

Например, для кривошипно-шатунного механизма, изображенного на рис. 370, перемещение точек кривошипа OA в положение OA_1 нельзя рассматривать как возможное, так как в этом положении условия равновесия механизма под действием сил P и Q будут уже другими. Точно так же нельзя считать возможным даже бесконечно малое перемещение точки B шатуна вдоль линии BD; оно было бы возможным, если в точке B вместо ползуна была бы качающаяся муфта (см. рис. 188, муфта C), т. е. когда механизм был бы другим.

Таким образом, *возможным перемещением системы мы будем называть любую совокупность бесконечно малых перемещений точек системы, допускаемых в данный момент всеми наложенными на систему связями*. Возможное перемещение любой точки системы будем изображать элементарным вектором δs, направленным в сторону перемещения.

В общем случае для точек и тел системы может существовать множество различных возможных перемещений (перемещения δs и $-\delta s$ мы не считаем разными). Однако для каждой системы, в зависимости от характера наложенных на нее связей, можно указать определенное число таких независимых между собой перемещений,

что всякое другое возможное перемещение будет получаться как их геометрическая сумма. Например, шарик, лежащий на какой-нибудь плоскости (или поверхности), можно переместить вдоль этой плоскости по множеству направлений. Однако любое его возможное перемещение δs можно получить как сумму двух перемещений δs_1 и δs_2 вдоль лежащих в этой плоскости взаимно перпендикулярных осей ($\delta s = \delta s_1 + \delta s_2$).

Число независимых между собою возможных перемещений системы называется числом степеней свободы этой системы. Так, рассмотренный выше шарик на плоскости (или на поверхности), если его считать материальной точкой, имеет 2 степени свободы. У кривошипно-шатунного механизма будет, очевидно, одна степень свободы. У свободной материальной точки — 3 степени свободы (независимыми будут 3 перемещения вдоль взаимно перпендикулярных осей). Свободное твердое тело имеет 6 степеней свободы (независимыми перемещениями будут: 3 поступательных перемещения вдоль осей координат и 3 вращательных вокруг этих осей).

§ 171. Принцип возможных перемещений. Введем понятие о так называемой возможной (или виртуальной) работе, т. е. об элементарной работе, которую действующая на материальную точку сила *могла бы совершить* на перемещении, совпадающем с возможным перемещением этой точки. При этом возможную работу активной силы $\boldsymbol{F}^{\text{а}}$ будем обозначать символом $\delta A^{\text{а}}$ ($\delta A^{\text{а}} = F^{\text{а}}\,\delta s\cos\alpha$, где α — угол между направлениями силы и перемещения), а возможную работу реакции связи $\boldsymbol{N}$ — символом δA^{r}.

В § 149 было введено важное понятие о системах с идеальными связями. В соответствии с равенством (52) из § 149 *наложенные на систему связи являются идеальными, если сумма элементарных работ реакций этих связей при любом возможном перемещении системы равна нулю,* т. е.

$$\sum \delta A_k^r = 0. \tag{109}$$

Примеры таких идеальных связей приведены в § 149.

Рассмотрим систему материальных точек, которая под действием всех приложенных к ней сил и наложенных на нее связей находится в равновесии. Будем при этом все связи системы считать идеальными.

Выделим произвольную точку B_k системы и обозначим равнодействующую всех приложенных к ней активных сил (внешних и внутренних) через $\boldsymbol{F}_k^{\text{а}}$, а равнодействующую всех реакций связей (тоже внешних и внутренних) — через $\boldsymbol{N}_k$. Так как точка B_k вместе со всей системой находится в равновесии, $\boldsymbol{F}_k^{\text{а}} + \boldsymbol{N}_k = 0$ или $\boldsymbol{N}_k = -\boldsymbol{F}_k^{\text{а}}$. Следовательно, при любом возможном перемещении точки B_k воз-

можные работы $\delta A_k^{\text{а}}$ и δA_k^{r} приложенных к ней сил $\boldsymbol{F}_k^{\text{а}}$ и N_k будут равны по модулю и противоположны по знаку и в сумме дадут нуль, т. е.

$$\delta A_k^{\text{а}} + \delta A_k^{\text{r}} = 0.$$

Повторяя аналогичные рассуждения, мы получим такие равенства для всех точек системы. Складывая эти равенства почленно, будем иметь:

$$\sum \delta A_k^{\text{а}} + \sum \delta A_k^{\text{r}} = 0.$$

Но если наложенные на систему связи являются идеальными, то вторая сумма согласно равенству (109) будет равна нулю. Следовательно, и

$$\sum \delta A_k^{\text{а}} = 0 \tag{110}$$

или

$$\sum (F_k^{\text{а}}\, \delta s_k \cos \alpha_k) = 0. \tag{110'}$$

Таким образом, мы доказали, что если механическая система с идеальными связями находится в равновесии, то действующие на нее активные силы удовлетворяют условию (110). Справедлив также и обратный вывод, т. е. если приложенные к механической системе активные силы удовлетворяют условию (110), то система находится в равновесии. Отсюда вытекает следующий принцип возможных перемещений[1]): ***для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех действующих на нее активных сил при любом возможном перемещении системы была равна нулю.*** Математически необходимое и достаточное условие равновесия любой механической системы выражается равенством (110), которое называют еще уравнением возможных работ. Это условие можно также представить в аналитической форме (см. § 112):

$$\sum (F_{kx}^{\text{а}} \delta x_k + F_{ky}^{\text{а}} \delta y_k + F_{kz}^{\text{а}} \delta z_k) = 0. \tag{111}$$

В равенстве (111) δx_k, δy_k, δz_k представляют собою проекции возможного перемещения δs_k точки B_k на оси координат. Они равны

---

[1]) В форме, близкой к современной, но без доказательства, этот принцип высказал знаменитый математик и механик (швейцарец по происхождению) Иоганн Бернулли (1667 — 1748). В общем виде принцип впервые сформулировал и доказал Ж. Лагранж (1788). Обобщение принципа на случай неудерживающих связей (связей, которые тело может покидать) было дано М. В. Остроградским в работах 1838 — 1842 гг.

элементарным приращениям координат этой точки при ее перемещении и вычисляются так же, как дифференциалы координат.

Значение принципа возможных перемещений состоит в том, что он дает в общей форме условие равновесия для любой механической системы, в то время как методы геометрической статики требуют рассмотрения равновесия каждого из тел системы в отдельности. При этом применение принципа требует учета одних только активных сил и позволяет заранее исключить из рассмотрения все неизвестные реакции связей, когда связи являются идеальными.

§ 172. Решение задач. Для систем с одной степенью свободы равенства (110) или (111) сразу дают условие равновесия системы. Если система имеет несколько степеней свободы, то условия (110) или (111) надо составлять *для каждого из независимых перемещений системы в отдельности*; тогда мы получим для системы столько условий равновесия, сколько она имеет степеней свободы.

В различных плоских механизмах при решении задач число степеней свободы можно практически определять так. Представим себе, что механизм движется. Если, остановив поступательное или вращательное движение какого-нибудь одного звена, мы одновременно останавливаем весь механизм, то механизм имеет одну степень свободы. Если после остановки поступательного или вращательного движения одного звена механизм может продолжать движение, но, когда затем будет остановлено перемещение какого-нибудь другого звена, механизм остановится, то он имеет две степени свободы и т. д.

Для решения задачи *геометрическим методом* надо: 1) изобразить все действующие на систему *активные* силы; 2) сообщить системе возможное перемещение и показать на чертеже векторы δs_k элементарных перемещений точек приложения сил или углы $\delta\varphi_k$ элементарных поворотов тел, на которые действуют силы (если у системы несколько степеней свободы, то ей надо сообщить одно из независимых перемещений); 3) подсчитать элементарные работы всех активных сил на данном перемещении по формулам

$$\delta A_k^{\text{a}} = F_{k\tau}^{\text{a}} \delta s_k \quad \text{или} \quad \delta A_k^{\text{a}} = m_O(F_k^{\text{a}})\,\delta\varphi_k \tag{112}$$

и составить условие (110); 4) установить зависимость между величинами δs_k и $\delta\varphi_k$, вошедшими в условие (110), и выразить все эти величины через какую-нибудь одну, что всегда можно сделать, так как системе сообщено *независимое* возможное перемещение.

После замены в условии (110) всех величин δs_k, $\delta\varphi_k$ через одну, мы получим уравнение, из которого и найдется искомая в задаче величина или зависимость.

У системы с несколькими степенями свободы указанный расчет повторяется для каждого независимого перемещения отдельно.

Зависимости между величинами δs_k, $\delta\varphi_k$ можно находить: а) из чисто геометрических соображений (задачи 160, 165); б) кинемати-

ческим методом, определяя связь между соответствующими линейными v_k или угловыми ω_k скоростями, которые имели бы точки или тела системы, если бы система двигалась, а затем, учитывая, что $\delta s_k = v_k\,dt$ и $\delta\varphi_k = \omega_k\,dt$ (задачи 161, 162 и др.).

При *аналитическом методе* расчета условие равновесия составляют в виде (111). Для этого выбирают оси координат, связанные с телом, которое при возможных перемещениях системы *остается неподвижным*. Затем вычисляют проекции всех активных сил на выбранные оси и координаты x_k, y_k, z_k точек приложения этих сил, выражая все координаты через какой-нибудь параметр (например, угол). После этого величины δx_k, δy_k, δz_k находятся дифференцированием координат x_k, y_k, z_k по этому параметру.

Если все координаты x_k, y_k, z_k выразить через один параметр сразу не удастся, то надо ввести несколько параметров, а затем установить зависимость между ними.

Отметим в заключение, что условиями (110) или (111) можно пользоваться для решения задач и при наличии трения, включая силу трения в число активных сил. Этим же путем можно находить реакции связей, если, отбросив связь, заменить ее соответствующей реакцией и включить последнюю также в число активных сил.

Задача 160. В механизме, изображенном на чертеже (рис. 371), найти зависимость между силами P и Q при равновесии.

Решение. Если сообщить системе возможное перемещение, то все диагонали параллелограммов, образованных стержнями, удлинятся на одну и ту же величину δs. Тогда $\delta s_A = \delta s$, $\delta s_B = 3\delta s$. Составляя уравнение (110), получим:

$$P\delta s_B - Q\delta s_A = 0 \text{ или } (3P - Q)\delta s = 0,$$

откуда $Q = 3P$. Результат получается очень просто.

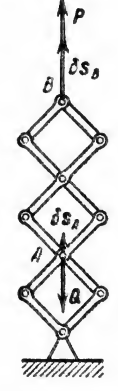




Рис. 371.

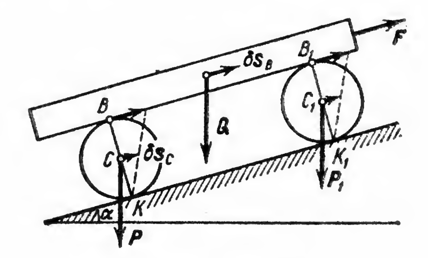


Рис. 372.

Задача 161. Вес бревна равен Q, вес каждого из двух цилиндрических катков, на которые оно положено, равен P. Какую силу F надо приложить к бревну, чтобы удержать его в равновесии на наклонной плоскости при данном угле α (рис. 372). Трение катков о плоскость и бревно обеспечивает отсутствие скольжения.

Решение. Если пренебречь сопротивлением качению, то плоскость для катков будет идеальной связью. Сообщая системе возможное перемещение, получаем по условию (110):

$$F\delta s_B - Q\sin\alpha\ \delta s_B - 2P\sin\alpha\ \delta s_C = 0,$$

где δs_B — возможное перемещение бревна, совпадающее с перемещением точки B.

Точка касания K является мгновенным центром скоростей катка. Следовательно, $v_B = 2v_C$ и $\delta s_B = 2\delta s_C$, так как $\delta s_B = v_B dt$, $\delta s_C = v_C dt$. Подставляя это значение δs_B в предыдущее уравнение, найдем окончательно

$$F = (Q + P)\sin\alpha.$$

Задача 162. Найти зависимость между моментом M пары, действующей на кривошип кривошипно-шатунного механизма (рис. 373), и силой давления P на поршень при равновесии. Длина кривошипа $OA = r$, а шатуна $AB = l$.

Решение. Условие равновесия (110) дает

$$P\delta s_B - M\,\delta\varphi = 0 \quad \text{или} \quad M\omega_{OA} = Pv_B,$$

так как $\delta\varphi = \omega_{OA}dt$, $\delta s_B = v_B dt$. Решение сводится к нахождению зависимости между v_B и ω_{OA}. Эта кинематическая задача была решена ранее (§ 82, задача 71). Пользуясь полученным там результатом, находим:

$$M = Pr\left(1 + \frac{r\cos\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}\right)\sin\varphi.$$

Задача 163. Для редуктора, рассмотренного в задаче 91 (см. § 95), найти зависимость между вращающим моментом M_A, приложенным к ведущему валу A, и моментом сопротивлений M_B, приложенным к ведомому валу B, когда оба вала вращаются равномерно.

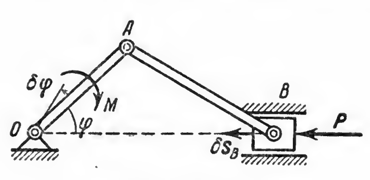


Рис. 373.

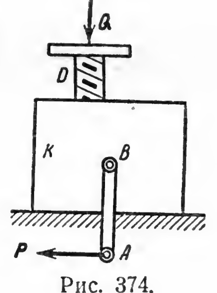


Рис. 374.

Решение. При равномерном вращении соотношение между M_A и M_B будет таким же, как при равновесии. Следовательно, по условию (110) будет

$$M_A\,\delta\varphi_A - M_B\,\delta\varphi_B = 0 \quad \text{или} \quad M_A\,\omega_A = M_B\,\omega_B,$$

так как $\delta\varphi_A = \omega_A\,dt$, $\delta\varphi_B = \omega_B\,dt$. Отсюда, пользуясь результатом, полученным при решении задачи 91, находим:

$$M_A = \frac{\omega_B}{\omega_A}M_B = \frac{n_B}{n_A}M_B = 2{,}8M_B.$$

Задача 164. Найти зависимость между силами P и Q в подъемном механизме, детали которого скрыты в коробке K (рис. 374), если известно, что при каждом повороте рукоятки AB ($AB = l$) винт D выдвигается на величину h.

Решение. Составляя условия равновесия (110), получаем

$$Pl\,\delta\varphi_{AB} - Q\,\delta s_D = 0.$$

Считая, что при равномерном вращении рукоятки винт вывинчивается также равномерно, будем иметь:

$$\frac{\delta\varphi_{AB}}{2\pi} = \frac{\delta s_D}{h} \quad \text{или} \quad \delta\varphi_{AB} = \frac{2\pi}{h}\,\delta s_D.$$

Подставляя это значение $\delta\varphi_{AB}$ в предыдущее равенство, находим

$$Q = \frac{2\pi l}{h} P.$$

Заметим, что методами геометрической статики эту несложную задачу вообще нельзя было бы решить, так как детали механизма не известны.

Задача 165. Балка, состоящая из двух брусьев, соединенных шарниром C, несет нагрузку $\boldsymbol{P}$ (рис. 375, *а*). Размеры балки и расположение опор показаны на чертеже. Пренебрегая весом балки, определить давление на опору B.

Решение. Отбрасываем опору B и заменяем ее реакцией N_B, численно равной искомому давлению (рис. 375, *б*). Сообщив теперь системе

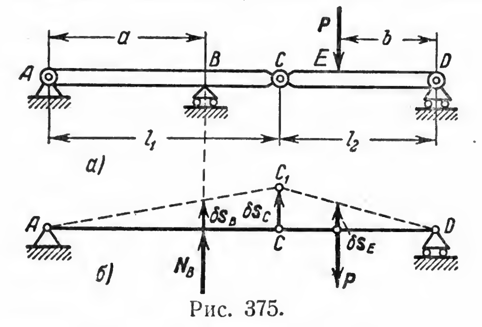


Рис. 375.

возможное перемещение, составляем условие (110)

$$N_B\,\delta s_B - P\,\delta s_E = 0.$$

Связь между δs_B и δs_E находим из пропорций

$$\frac{\delta s_B}{a} = \frac{\delta s_C}{l_1}, \quad \frac{\delta s_E}{b} = \frac{\delta s_C}{l_2}, \qquad \text{откуда} \quad \delta s_E = \frac{bl_1}{al_2}\,\delta s_B.$$

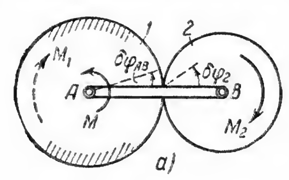
Следовательно,

$$N_B = \frac{bl_1}{al_2} P.$$

При применении метода геометрической статики решение оказалось бы более длинным (пришлось бы рассмотреть равновесие частей балки и ввести дополнительно реакции других связей, а затем исключить эти реакции из полученной системы уравнений равновесия).

Задача 166. В планетарном механизме с дифференциальной передачей (см. § 95) на ось A независимо друг от друга насажены шестерня *1* радиуса r_1 и кривошип AB, несущий на себе ось B шестерни *2* радиуса r_2 (рис. 376). На кривошип действует вращающий момент M, а на шестерни *1* и *2* — моменты сопротивлений M_1 и M_2. Найти значения M_1 и M_2 при равновесии механизма.

Решение. Механизм имеет две степени свободы, так как в нем возможны два независимых перемещения: а) поворот кривошипа AB при неподвижной шестерне 1 и б) поворот шестерни 1 при неподвижном кривошипе AB. Сообщим сначала системе возможное перемещение, при котором шестерня 1 остается неподвижной (рис. 376, a). Для этого перемещения уравнение (110) дает



$$M\,\delta\varphi_{AB} - M_2\delta\varphi_2 = 0.$$

Но когда шестерня 1 неподвижна, точка касания шестерен будет мгновенным центром скоростей для шестерни 2. Следовательно, $v_B = \omega_2 r_2$. В то же время $v_B = \omega_{AB}(r_1 + r_2)$. Отсюда $\omega_2 r_2 = \omega_{AB}(r_1 + r_2)$ или $\delta\varphi_2 r_2 = \delta\varphi_{AB}(r_1 + r_2)$, и мы получаем:

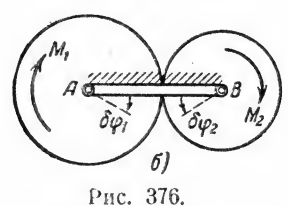


Рис. 376.

$$M_2 = \frac{r_2}{r_1 + r_2}M.$$

Теперь сообщим системе другое, независимое от первого возможное перемещение, при котором кривошип AB неподвижен (рис. 376, $б$). Для этого перемещения по условию (110) будем иметь $M_1\delta\varphi_1 - M_2\delta\varphi_2 = 0$. Но при неподвижном кривошипе

$$\frac{\delta\varphi_2}{\delta\varphi_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2} \quad \text{и} \quad M_1 = \frac{r_1}{r_2}M_2.$$

Окончательно находим:

$$M_1 = \frac{r_1}{r_1 + r_2}M, \qquad M_2 = \frac{r_2}{r_1 + r_2}M.$$

Задача 167. В прессе, изображенном на чертеже (рис. 377), найти зависимость между силами $\boldsymbol{Q}_1$, $\boldsymbol{Q}_2$ и $\boldsymbol{P}_3$ при равновесии ($Q_1 = Q_2 = Q$, $P_3 = P$). Углы α и β известны. Весом стержней пренебречь.

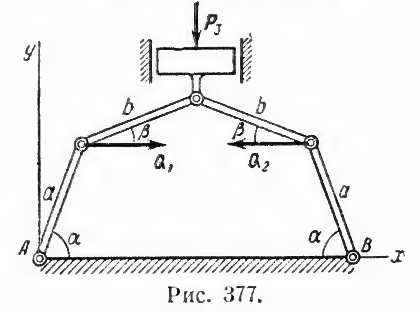


Рис. 377.

Решение. Чтобы дать пример аналитического расчета, воспользуемся условием равновесия (111). Беря начало в *неподвижной* точке A и проводя оси x и y, получим:

$$Q_{1x}\delta x_1 + Q_{2x}\delta x_2 + P_{3y}\delta y_3 = 0, \quad \text{(a)}$$

так как остальные проекции сил обращаются в нули.

Для нахождения δx_1, δx_2, δx_3 вычислим координаты x_1, x_2, y_3 точек приложения сил, выразив их через углы α и β. Получим, обозначая длины стержней через a и b:

$$x_1 = a\cos\alpha, \quad x_2 = a\cos\alpha + 2b\cos\beta, \quad y_3 = b\sin\beta + a\sin\alpha.$$

Дифференцируя эти выражения, найдем:

$$\delta x_1 = -a\sin\alpha\,\delta\alpha, \; \delta x_2 = -(a\sin\alpha\,\delta\alpha + 2b\sin\beta\,\delta\beta), \quad \delta y_3 = b\cos\beta\,\delta\beta + a\cos\alpha\,\delta\alpha.$$

Подставляя полученные значения в равенство (а) и учитывая, что $Q_{1x} = Q$, $Q_{2x} = -Q$, $P_{3y} = -P$, будем иметь:

$$2Qb\sin\beta\,\delta\beta - P(b\cos\beta\,\delta\beta + a\cos\alpha\,\delta\alpha) = 0. \quad \text{(б)}$$

Для нахождения зависимости между $\delta\alpha$ и $\delta\beta$ воспользуемся тем, что в данном случае расстояние $AB = \text{const}$. Следовательно, $2(a\cos\alpha + b\cos\beta) = \text{const}$. Дифференцируя это равенство, получим

$$a\sin\alpha\,\delta\alpha + b\sin\beta\,\delta\beta = 0 \text{ и } \delta\alpha = -\frac{b}{a}\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\delta\beta.$$

Подставляя найденное значение $\delta\alpha$ в равенство (б), будем иметь:

$$2Q\sin\beta - P(\cos\beta - \operatorname{ctg}\alpha\sin\beta) = 0,$$

откуда

$$P = \frac{2Q}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}.$$

При угле β, близком к α, давление P получается очень большим.

§ 173. Общее уравнение динамики.

§ 173. Общее уравнение динамики. Принцип возможных перемещений дает общий метод решения задач статики. С другой стороны, принцип Даламбера позволяет использовать методы статики для решения задач динамики. Следовательно, применяя эти два принципа одновременно, мы можем получить общий метод решения задач динамики.

Рассмотрим систему материальных точек, на которую наложены идеальные связи. Если ко всем точкам системы, кроме действующих на них активных сил $\boldsymbol{F}_k^{\text{а}}$ и реакций связей N_k, прибавить соответствующие силы инерции $\boldsymbol{F}_k^{\text{и}} = -m_k\boldsymbol{w}_k$, то согласно принципу Даламбера полученная система сил будет находиться в равновесии. Тогда, применяя к этим силам принцип возможных перемещений, получим:

$$\sum \delta A_k^{\text{а}} + \sum \delta A_k^{\text{и}} + \sum \delta A_k^{\text{r}} = 0.$$

Но последняя сумма по условию (109) равна нулю и окончательно будет

$$\sum \delta A_k^{\text{а}} + \sum \delta A_k^{\text{и}} = 0. \qquad (113)$$

Равенство (113) представляет собою общее уравнение динамики. Из него вытекает следующий принцип Даламбера — Лагранжа: *при движении системы с идеальными связями в каждый данный момент времени сумма элементарных работ всех приложенных активных сил и всех сил инерции на любом возможном перемещении системы будет равна нулю.*

В аналитической форме уравнение (113) имеет вид

$$\sum \left[(F_{kx}^{\text{а}} + F_{kx}^{\text{и}})\,\delta x_k + (F_{ky}^{\text{а}} + F_{ky}^{\text{и}})\,\delta y_k + (F_{kz}^{\text{а}} + F_{kz}^{\text{и}})\,\delta z_k \right] = 0. \qquad (114)$$

Уравнения (113) или (114) позволяют составить дифференциальные уравнения движения любой механической системы.

Если при этом система представляет собою совокупность каких-нибудь твердых тел, то для составления уравнений нужно к

действующим на каждое тело активным силам прибавить приложенную в любом центре силу, равную главному вектору сил инерции, и пару с моментом, равным главному моменту сил инерции относительно этого центра, а затем применить принцип возможных перемещений.

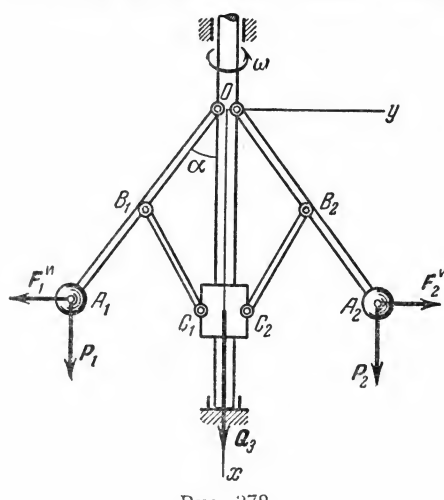


Рис. 378.

Задача 168. В центробежном регуляторе, равномерно вращающемся вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω (рис. 378), вес каждого из шаров A_1 и A_2 равен p, а вес муфты C_1C_2 равен Q. Пренебрегая весом стержней, определить величину угла α, если $OA_1 = OA_2 = l$; $OB_1 = OB_2 = B_1C_1 = B_2C_2 = a$.

Решение. Присоединяем к активным силам $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ и $\boldsymbol{Q}_3$ центробежные силы инерции $\boldsymbol{F}_1^и$ и $\boldsymbol{F}_2^и$ (сила инерции муфты, очевидно, будет равна нулю) и составляем общее уравнение динамики в виде (114). Тогда, вычисляя проекции всех сил на оси координат, будем иметь:

$$p_1\delta x_1 + p_2\delta x_2 - F_1^и\delta y_1 + F_2^и\delta y_2 + Q_3\delta x_3 = 0. \qquad (a)$$

При этом

$$Q_3 = Q;\quad p_1 = p_2 = p;\quad F_1^и = F_2^и = \frac{p}{g}w_A = \frac{p}{g}\omega^2 l\ \sin\alpha.$$

Координаты точек приложения сил равны

$$x_1 = x_2 = l\cos\alpha;\quad y_2 = -y_1 = l\sin\alpha;\quad x_3 = 2a\cos\alpha.$$

Дифференцируя эти выражения, находим:

$$\delta x_1 = \delta x_2 = -l\sin\alpha\,\delta\alpha;\quad \delta y_2 = -\delta y_1 = l\cos\alpha\,\delta\alpha;\quad \delta x_3 = -2a\sin\alpha\,\delta\alpha.$$

Подставляя все найденные значения в уравнение (a), получаем:

$$\left(-2pl\sin\alpha + 2\frac{p}{g}l^2\omega^2\sin\alpha\cos\alpha - 2Qa\sin\alpha\right)\delta\alpha = 0.$$

Отсюда окончательно будем иметь:

$$\cos\alpha = \frac{pl + Qa}{pl^2\omega^2}g.$$

Так как $\cos\alpha \leqslant 1$, то шары будут отклоняться, когда

$$\omega^2 > \frac{pl + Qa}{pl^2}g.$$

С увеличением ω угол α растет, стремясь к 90° при $\omega \to \infty$.

Задача 169. В подъемнике, изображенном на рис. 379, к шестерне *2* веса P_2 с радиусом инерции ρ_2 приложен вращающий момент M. Определить ускорение поднимаемого груза A весом Q, пренебрегая весом веревки и трением в осях. Барабан, на который наматывается веревка, и жестко скрепленная с ним шестерня *1*, имеют общий вес P_1 и радиус инерции ρ_1. Радиусы шестерен равны r_1 и r_2, радиус барабана r.

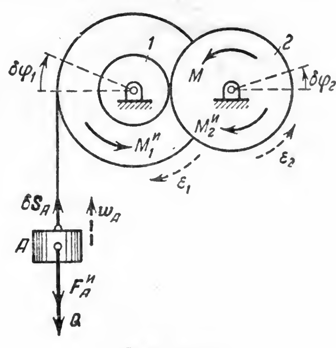


Рис. 379.

Решение. Изображаем действующую на систему активную силу $\boldsymbol{Q}$ и вращающий момент M (силы $\boldsymbol{P}_1$ и $\boldsymbol{P}_2$ работы не производят); присоединяем к ним силу инерции груза $\boldsymbol{F}_A^и$ и пары с моментами $M_1^и$ и $M_2^и$, к которым приводятся силы инерции вращающихся тел (см. § 167). Эти величины по модулю равны:

$$F_A^и = \frac{Q}{g} w_A; \quad \left|M_1^и\right| = \frac{P_1}{g}\rho_1^2\varepsilon_1;$$

$$\left|M_2^и\right| = \frac{P_2}{g}\rho_2^2\varepsilon_2.$$

Направления всех величин показаны на чертеже. Сообщая системе возможное перемещение и составляя уравнение (113), получим:

$$-(Q+F_A^и)\,\delta s_A - M_1^и\delta\varphi_1 + (M - M_2^и)\,\delta\varphi_2 = 0.$$

Выражая все перемещения через $\delta\varphi_1$, будем иметь:

$$\delta s_A = r\delta\varphi_1; \quad \frac{\delta\varphi_2}{\delta\varphi_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2} \text{ и } \delta\varphi_2 = \frac{r_1}{r_2}\delta\varphi_1.$$

Окончательно уравнение движения примет вид

$$Q\left(1+\frac{w_A}{g}\right)r + \frac{P_1}{g}\rho_1^2\varepsilon_1 + \frac{P_2}{g}\rho_2^2\varepsilon_2\frac{r_1}{r_2} - M\frac{r_1}{r_2} = 0.$$

Входящие сюда величины ε_1 и ε_2 выразим через искомое ускорение w_A. Учитывая, что ε_1, ε_2 связаны между собой так же, как и ω_1, ω_2, получим:

$$\varepsilon_1 = \frac{w_A}{r}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{r_1}{r_2}\varepsilon_1 = \frac{r_1}{r_2}\frac{w_A}{r}.$$

В результате найдем окончательно:

$$w_A = \frac{\dfrac{r_1}{r_2}M - rQ}{rQ + \dfrac{\rho_1^2}{r}P_1 + \dfrac{\rho_2^2}{r}\dfrac{r_1^2}{r_2^2}P_2}\,g.$$

Задачу можно было бы решить и с помощью теоремы об изменении кинетической энергии (см. § 150).

Задача 170. Сплошной цилиндр весом p_1 обмотан нитью, перекинутой через блок O и прикрепленной к грузу A весом p_2 (рис. 380). Груз может скользить вдоль горизонтальной плоскости; коэффициент трения груза о плоскость f. Найти ускорения груза и центра C цилиндра при движении системы, пренебрегая массами блока O и нити.

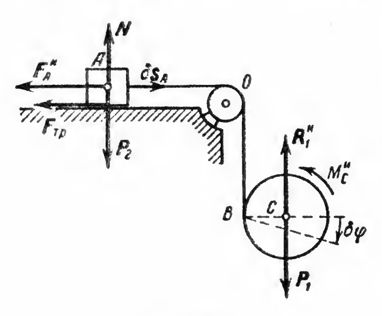


Рис. 380.

Решение. Если движение начинается из состояния покоя, то центр C цилиндра перемещается вертикально и система имеет две степени свободы (независимыми перемещениями будут поворот цилиндра относительно нити при неподвижном грузе и перемещение груза при невращающемся цилиндре).

Присоединяем к действующим на систему силам p_1, p_2 и $F_{тр}$ силы инерции цилиндра, которые приводятся к главному вектору $R_1^и$ и паре с моментом $M_C^и$ (см. § 167), и силу инерции груза $F_A^и$. При этом по модулю

$$F_A^и = \frac{p_2}{g} w_A, \qquad R_1^и = \frac{p_1}{g} w_C, \qquad \left| M_C^и \right| = J_C \cdot \varepsilon = \frac{p_1}{2g} r^2 \frac{w_C - w_A}{r}.$$

Последний результат следует из того, это если точка C цилиндра имеет скорость v_C, а точка B (вместе с нитью) — скорость $v_B = v_A$, то угловая скорость цилиндра $\omega = \dfrac{v_C - v_A}{r}$ (см. § 81, формула 56) и, следовательно, $\varepsilon = \dfrac{w_C - w_A}{r}$; кроме того, для цилиндра $J_C = 0{,}5mr^2$, где r — радиус цилиндра.

Сообщаем теперь системе возможное перемещение δs_A, при котором цилиндр не вращается, а перемещается поступательно вместе с грузом. Пара с моментом $M_C^и$ на этом перемещении работы не совершает и мы по уравнению (113) получим:

$$(-F_{тр} - F_A^и - R_1^и + p_1)\,\delta s_A = 0.$$

Отсюда, так как $F_{тр} = fp_2$, находим:

$$\frac{p_1}{g} w_C + \frac{p_2}{g} w_A = p_1 - fp_2. \tag{а}$$

Теперь сообщаем системе другое, независимое от первого возможное перемещение, при котором груз A неподвижен, а цилиндр совершает поворот около точки B (которая для данного перемещения является мгновенным центром вращения) на угол $\delta\varphi$. Для этого перемещения уравнение (113) дает

$$(p_1 - R_1^и)\, r\delta\varphi - M_C^и \delta\varphi = 0.$$

Подставляя сюда значения $R_1^и$ и $M_C^и$, получим окончательно:

$$3w_C - w_A = 2g. \tag{б}$$

Решая совместно систему уравнений (а) и (б), найдем искомые ускорения

$$w_A = \frac{p_1 - 3fp_2}{p_1 + 3p_2} g, \qquad w_C = \frac{p_1 + (2-f)\ p_2}{p_1 + 3p_2} g.$$

Из полученного решения видно, что рассматриваемое движение возможно, когда $f \leqslant p_1/3p_2$. Если коэффициент трения будет больше этой величины, то груз A будет неподвижен. Тогда перемещение δs_A для системы не будет возможным и уравнения (а) не будет. Движение центра цилиндра будет при этом описываться уравнением (б), если в нем положить $w_A = 0$. Следовательно, при $f > p_1/3p_2$ груз A неподвижен, а центр C цилиндра опускается с ускорением $w_C = {}^2/_3 g$.

Обращаем внимание на то, что для систем, имеющих больше одной степени свободы, метод, изложенный в § 150, не даст всех уравнений движения. В этих случаях иногда можно решить задачу, используя несколько общих теорем; обычно же применяют или общее уравнение динамики или же уравнения Лагранжа, которые будут получены в следующей главе.

ГЛАВА XXXII*

УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ В ОБОБЩЕННЫХ КООРДИНАТАХ

§ 174. Обобщенные координаты и обобщенные скорости. Число координат (параметров), определяющих положение механической системы, зависит от количества точек (или тел), входящих в систему, и от числа и характера наложенных связей. Будем в дальнейшем рассматривать только системы с *геометрическими связями*, т. е. со связями, налагающими ограничения на положения точек системы в пространстве, но не на их скорости. Числом степеней свободы механической системы называется, как известно, число независимых между собою возможных перемещений системы (§ 170). Геометрические связи уменьшают на одно и то же количество единиц и число независимых возможных перемещений системы, и число независимых между собою координат, определяющих положение этой системы. Например, если какую-нибудь точку B_k системы с координатами x_k, y_k, z_k связать жестким стержнем длины l (геометрическая связь) с неподвижной точкой $A\ (x_A, y_A, z_A)$, то число возможных перемещений системы уменьшится на единицу, так как станет невозможным перемещение точки вдоль прямой AB_k. Одновременно координаты точки будут все время удовлетворять уравнению $(x_A - x_k)^2 + (y_A - y_k)^2 + (z_A - z_k)^2 = l^2$, выражающему эту связь математически; следовательно, число независимых между собою координат системы тоже уменьшится на единицу. В результате оказывается, что *число независимых координат, определяющих положение системы с геометрическими связями, равно числу степеней свободы этой системы*. В качестве таких координат можно выбирать параметры, имеющие любую

размерность и любой геометрический (или физический) смысл, в частности отрезки прямых или дуг, углы, площади и т. п.

Независимые между собою параметры любой размерности, число которых равно числу степеней свободы системы и которые однозначно определяют ее положение, называют *обобщенными координатами* системы. Будем обозначать обобщенные координаты буквой q. Так как свободная точка имеет три степени свободы, то система, состоящая из n материальных точек, координаты которых в силу наложенных на систему геометрических связей должны удовлетворять k уравнениям, выражающим эти связи, будет иметь $s=3n-k$ степеней свободы и ее положение будет определяться s обобщенными координатами

$$q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_s. \tag{115}$$

Наоборот, если установлено, что положение данной системы однозначно определяется какими-нибудь s независимыми между собою параметрами, то эта система имеет s степеней свободы.

Поскольку обобщенные координаты между собою независимы, то элементарные приращения этих координат

$$\delta q_1,\ \delta q_2,\ \ldots,\ \delta q_s, \tag{116}$$

будут также между собою независимы. При этом *каждая из величин* (116) *определяет соответствующее, независимое от других возможное перемещение системы.*

Как при всяком переходе от одной системы координат к другой, декартовы координаты x_k, y_k, z_k любой точки рассматриваемой механической системы можно выразить через обобщенные координаты зависимостями вида $x_k=x_k(q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_s)$ и т. д. Следовательно, и для радиуса-вектора $\boldsymbol{r}_k$ этой точки, который определяется его проекциями, т. е. координатами x_k, y_k, z_k ($\boldsymbol{r}_k=x_k\boldsymbol{i}+y_k\boldsymbol{j}+z_k\boldsymbol{k}$), будем иметь [1])

$$\boldsymbol{r}_k=\boldsymbol{r}_k(q_1,\ q_2,\ \ldots,q_s) \tag{117}$$

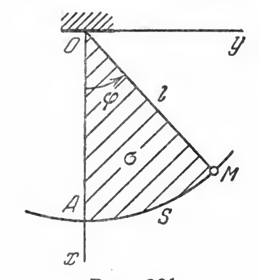


Рис. 381.

Пример 1. Плоский математический маятник (рис. 381) имеет, очевидно, одну степень свободы ($s=1$); следовательно, его положение определяется одной обобщенной координатой q. В качестве этой координаты здесь можно выбрать *или* угол φ, *или* длину S дуги $\smile{AM}$, *или* площадь σ сектора OAM, указав во всех случаях положительное и отрицательное направление отсчета каждой из этих координат. Выбор в качестве обобщенной координаты абсциссы x точки M будет неудачным, так как эта

[1]) Считаем для сокращения записей, что наложенные связи со временем не изменяются (иначе $\boldsymbol{r}_k$ зависели бы еще от аргумента t). Вид окончательных уравнений (§ 177) от этого допущения не зависит и они будут справедливы и для связей, изменяющихся со временем.

координата не определяет положение точки M однозначно (при данной величине x маятник может быть отклоненным от вертикали вправо или влево).

Если в качестве обобщенной координаты выбрать угол φ, то возможное перемещение маятника получим, сообщив углу приращение $\delta\varphi$. Декартовы координаты x и y точки M можно выразить через φ в виде $x = l\cos\varphi$, $y = l\sin\varphi$, где $l = OM$. Тогда, в соответствии с равенством (117), и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\varphi)$.

Пример 2. Двойной плоский маятник (рис. 382) имеет, очевидно, две степени свободы и в качестве обобщенных координат можно выбрать углы φ и ψ ($q_1 = \varphi$, $q_2 = \psi$); эти углы между собою независимы, так как можно изменять угол φ, сохраняя неизменным ψ, и наоборот. Величины $\delta\varphi$ и $\delta\psi$ определяют независимые между собою возможные перемещения системы. Выражения декартовых координат точек A и B через обобщенные даются равенствами вида $x_A = l_1\cos\varphi$, $x_B = l_1\cos\varphi + l_2\cos(\varphi + \psi)$ и т. д., где $l_1 = OA$, $l_2 = AB$. Следовательно, в соответствии с равенством (117), и $\boldsymbol{r}_A = \boldsymbol{r}_A(\varphi)$, $\boldsymbol{r}_B = \boldsymbol{r}_B(\varphi, \psi)$.

Рис. 382.

При движении системы ее обобщенные координаты будут с течением времени непрерывно изменяться, и закон этого движения определится уравнениями:

$$q_1 = f_1(t), \quad q_2 = f_2(t), \; \ldots, \; q_s = f_s(t). \tag{118}$$

Уравнения (118) представляют собою кинематические *уравнения движения системы в обобщенных координатах.*

Производные от обобщенных координат по времени называются *обобщенными скоростями* системы. Будем обозначать обобщенные скорости символами

$$\dot{q}_1, \; \dot{q}_2, \; \ldots, \; \dot{q}_s,$$

где $\dot{q}_1 = \dfrac{dq_1}{dt}$ и т. д. Размерность обобщенной скорости зависит от размерности соответствующей обобщенной координаты. Если q — линейная величина, то $\dot{q}$ — линейная скорость; если q — угол, то $\dot{q}$ — угловая скорость; если q — площадь, то $\dot{q}$ — секторная скорость и т. д. Как видим, понятием об обобщенной скорости охватываются все встречавшиеся нам ранее в кинематике понятия о скоростях.

§ 175. Обобщенные силы. Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек, на которые действуют силы $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$. Пусть система имеет s степеней свободы и ее положение определяется обобщенными координатами (115). Сообщим системе такое независимое возможное перемещение, при котором координата q_1 получает приращение δq_1, а остальные координаты не изменяются. Тогда каждый из радиусов-векторов $\boldsymbol{r}_k$ точек системы получит

элементарное приращение $(\delta \boldsymbol{r}_k)_1$ [1]). Поскольку, согласно равенству (117), $\boldsymbol{r}_k = \boldsymbol{r}_k(q_1, q_2, \ldots, q_s)$, а при рассматриваемом перемещении изменяется *только* координата q_1 (остальные сохранят постоянные значения), то $(\delta \boldsymbol{r}_k)_1$ вычисляется как *частный дифференциал* и, следовательно,

$$(\delta \boldsymbol{r}_k)_1 = \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_1}\delta q_1. \tag{119}$$

Вычислим теперь сумму элементарных работ всех действующих сил на рассматриваемом перемещении, которую обозначим δA_1. Используя формулу (36′) из § 112 и равенство (119), получим

$$\delta A_1 = \boldsymbol{F}_1 \cdot (\delta \boldsymbol{r}_1)_1 + \boldsymbol{F}_2 \cdot (\delta \boldsymbol{r}_2)_1 + \ldots + \boldsymbol{F}_n \cdot (\delta \boldsymbol{r}_n)_1 =$$
$$= \boldsymbol{F}_1 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_1}{\partial q_1}\delta q_1 + \boldsymbol{F}_2 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_2}{\partial q_1}\delta q_1 + \ldots + \boldsymbol{F}_n \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_n}{\partial q_1}\delta q_1.$$

Напоминаем, что точка здесь есть символ скалярного перемножения двух векторов. Вынося общий множитель δq_1 за скобку, будем окончательно иметь:

$$\delta A_1 = Q_1 \delta q_1, \tag{120}$$

где обозначено

$$Q_1 = \sum \boldsymbol{F}_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_1}. \tag{121}$$

По аналогии с равенством $\delta A = F_\tau \delta s$, определяющим элементарную работу силы $\boldsymbol{F}$, величину Q_1 называют *обобщенной силой*, соответствующей координате q_1.

Сообщая системе другое независимое возможное перемещение, при котором изменяется *только* координата q_2, получим для элементарной работы всех действующих сил на этом перемещении выражение

$$\delta A_2 = Q_2 \delta q_2, \tag{122}$$

где

$$Q_2 = \sum \boldsymbol{F}_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_2}. \tag{123}$$

Величина Q_2 представляет собою обобщенную силу, соответствующую координате q_2, и т. д.

Очевидно, что если системе сообщить такое возможное перемещение, при котором одновременно изменяются *все* ее обобщенные координаты, то сумма элементарных работ приложенных сил на этом перемещении определится равенством

$$\sum \delta A_k = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots + Q_s \delta q_s. \tag{124}$$

---

[1]) Символ $(\delta \boldsymbol{r}_k)_1$ означает, что берется то элементарное приращение, которое радиус-вектор $\boldsymbol{r}_k$ получает при изменении *только* координаты q_1 на величину δq_1.

Формула (124) дает *выражение полной элементарной работы всех действующих на систему сил в обобщенных координатах.* Из этого равенства видно, что *обобщенные силы — это величины, равные коэффициентам при приращениях обобщенных координат в выражении полной элементарной работы действующих на систему сил.*

Если все наложенные на систему связи являются идеальными, то работу при возможных перемещениях совершают только активные силы и величины $Q_1, Q_2, \ldots, Q_s$ будут представлять собою *обобщенные активные силы* системы.

Размерность обобщенной силы зависит от размерности соответствующей обобщенной координаты. Так как произведение $Q\delta q$, а следовательно и Qq, имеет размерность работы, то

$$[Q]=\frac{[A]}{[q]}, \tag{125}$$

т. е. *размерность обобщенной силы равна размерности работы, деленной на размерность соответствующей обобщенной координаты.* Отсюда видно, что если q — линейная величина, то Q имеет размерность обычной силы (*кГ* в системе *МкГС*); если q — угол (величина безразмерная), то Q будет измеряться в *кГм*, т. е. имеет размерность момента; если q — объем (например, положение поршня в цилиндре можно определять объемом запоршневого пространства), то Q будет измеряться в *кГ/м²*, т. е. имеет размерность давления, и т. д. Как видим, по аналогии с обобщенной скоростью, понятием об обобщенной силе охватываются все величины, встречавшиеся нам ранее как меры механического взаимодействия материальных тел (сила, момент, давление).

Вычисление обобщенных сил производится по формулам вида (120), (122) и сводится к вычислению возможной элементарной работы (см. § 172). Сначала следует установить, каково число степеней свободы системы, выбрать обобщенные координаты и изобразить на чертеже все приложенные к системе активные силы и силы трения (если они совершают работу). Затем для определения Q_1 надо сообщить системе такое возможное перемещение, при котором изменяется *только* координата q_1, вычислить на этом перемещении сумму элементарных работ всех действующих сил по формулам (112) и представить полученное выражение в виде (120). Тогда коэффициент при δq_1 и дает искомую величину Q_1. Аналогично вычисляются $Q_2, Q_3, \ldots$

Пример 1. Подсчитаем обобщенную силу для системы, изображенной на рис. 383, где груз A весом P_1 перемещается по гладкой наклонной плоскости, а груз B весом P_2 — по шероховатой горизонтальной плоскости, коэффициент трения о которую равен f. Грузы связаны нитью, перекинутой через блок O. Массой нити и блока пренебрегаем. Система имеет, очевидно,

одну степень свободы, и ее положение определяется координатой $q_1 = x$ (положительное направление отсчета x показано стрелкой). Для определения Q_1 сообщаем системе возможное перемещение δx и вычисляем на этом перемещении элементарные работы сил $\boldsymbol{P}_1$ и $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$; остальные силы работы не совершают. Так как $F_{\text{тр}} = fN = fP_2$, то

$$\delta A = (P_1 \sin\alpha - fP_2)\,\delta x.$$

Следовательно,

$$Q_1 = P_1 \sin\alpha - fP_2.$$

Пример 2. Пренебрегая трением, найдем обобщенные силы для системы, изображенной на рис. 384. Однородный стержень AB имеет длину l и вес P и может вращаться вокруг оси A в вертикальной плоскости. Нанизанный на него шарик M имеет вес p. Длина пружины AM равна в ненапряженном состоянии a, а жесткость — c.

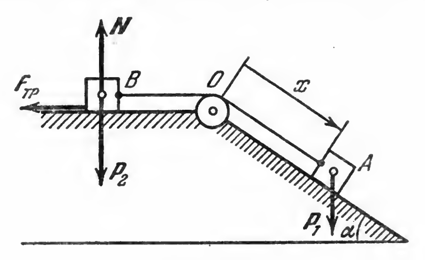


Рис. 383.

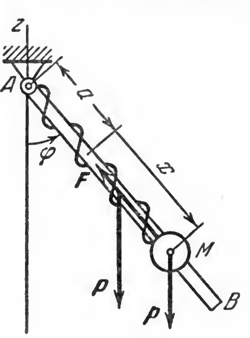


Рис. 384.

Система имеет, очевидно, две степени свободы (независимыми являются перемещение шарика вдоль стержня и поворот стержня вокруг оси A). В качестве обобщенных координат выберем угол φ и расстояние x шарика от конца ненапряженной пружины ($q_1 = \varphi$, $q_2 = x$); положительные направления отсчета координат показаны стрелками.

Сообщаем сначала системе возможное перемещение, при котором угол φ получает приращение $\delta\varphi$ ($\delta\varphi > 0$), а $x = \text{const}$. На этом перемещении работу совершают силы $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{p}$. По второй из формул (112) находим (знак минус здесь потому, что направление момента противоположно направлению $\delta\varphi$):

$$\delta A_1 = \left[-P\frac{l}{2}\sin\varphi - p(a+x)\sin\varphi\right]\delta\varphi.$$

Следовательно,

$$Q_1 = -\left[P\frac{l}{2} + p(a+x)\right]\sin\varphi.$$

Теперь сообщаем системе возможное перемещение, при котором изменяется только координата x, получая приращение $\delta x > 0$, а угол $\varphi = \text{const}$. На этом перемещении работу совершают сила тяжести $\boldsymbol{p}$ и сила упругости, модуль которой $F = cx$. Тогда

$$\delta A_2 = (p\cos\varphi - cx)\,\delta x$$

и

$$Q_2 = p\cos\varphi - cx.$$

Обобщенная сила Q_1 имеет в этом случае размерность момента, так как $q_1 = \varphi$, а сила Q_2 — размерность обычной силы.

Случай потенциальных сил. Если все действующие на систему силы являются потенциальными, то для системы, как известно, существует такая *силовая функция* U, зависящая от координат x_k, y_k, z_k точек системы, что сумма элементарных работ действующих сил равна полному дифференциалу этой функции, т. е. $\sum \delta A_k = \delta U$ [§ 151, формула (62)]. Но при переходе к обобщенным координатам $q_1, q_2, \ldots, q_s$ все x_k, y_k, z_k могут быть выражены через эти координаты и тогда $U = U(q_1, q_2, \ldots, q_s)$. Следовательно, вычисляя δU как полный дифференциал от функции $U(q_1, q_2, \ldots, q_s)$, мы найдем, что

$$\sum \delta A_k = \delta U = \frac{\partial U}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial U}{\partial q_s}\delta q_s.$$

Сравнивая это выражение с равенством (124), заключаем, что в данном случае

$$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1}, \quad Q_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2}, \ldots, Q_s = \frac{\partial U}{\partial q_s}, \tag{126}$$

или, так как потенциальная энергия $\Pi = -U$, то

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}, \quad Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2}, \ \ldots, \ Q_s = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_s}. \tag{127}$$

Следовательно, *если все действующие на систему силы потенциальны, то обобщенные силы равны частным производным от силовой функции (или взятым со знаком минус частным производным от потенциальной энергии) по соответствующим обобщенным координатам.*

Пример 3. Все силы, действующие на систему, изображенную на рис. 384, потенциальны. Если при этом направить координатную ось Az вертикально вверх, то по формулам (59) и (59'), учитывая, что $\Pi = -U$, будем иметь для всей системы

$$\Pi = -P\frac{l}{2}\cos\varphi - p(a+x)\cos\varphi + \frac{1}{2}cx^2,$$

где обобщенные координаты $q_1 = \varphi$, $q_2 = x$. Тогда

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -\left[P\frac{l}{2} + p(a+x)\right]\sin\varphi, \quad Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = p\cos\varphi - cx,$$

что совпадает с результатами, полученными в примере 2.

§ 176. Условия равновесия системы в обобщенных координатах. Согласно принципу возможных перемещений необходимым и достаточным условием равновесия механической системы является равенство нулю суммы элементарных работ всех активных сил (и сил трения, если они совершают работу) на любом возможном

перемещении системы, т. е. условие $\sum \delta A_k = 0$. В обобщенных координатах это условие, согласно равенству (124), дает

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots + Q_s \delta q_s = 0. \tag{128}$$

Так как все величины $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_s$ между собою независимы, то равенство (128) может выполняться лишь тогда, когда каждый из коэффициентов при $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_s$ в отдельности равен нулю, т. е.

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \ldots, \quad Q_s = 0. \tag{129}$$

В самом деле, если допустить, что одна из этих величин, например Q_1, не равна нулю, то всегда можно сообщить системе такое возможное перемещение, при котором $\delta q_1 \neq 0$, а $\delta q_2 = \delta q_3 = \ldots = \delta q_s = 0$, и мы придем к противоречию с условием (128).

Таким образом, *для равновесия механической системы необходимо и достаточно, чтобы все обобщенные силы, соответствующие выбранным для системы обобщенным координатам, были равны нулю.* Число условий равновесия (129) равно, как видим, числу обобщенных координат, т. е. *числу степеней свободы системы.*

Из сравнения метода вычисления обобщенных сил (§ 175) и способа решения задач, которым мы пользовались в § 172, видно, что по существу при решении задач с помощью принципа возможных перемещений мы вычисляли соответствующие обобщенные силы, а затем приравнивали их нулю.

Рассмотрим еще два примера.

1. Условием равновесия системы, изображенной на рис. 383, будет $Q_1 = 0$ или $P_1 = fP_2 \csc \alpha$. Поскольку при вычислении Q_1 было принято, что $F_{тр} = fN = F_{пр}$, то условие $Q_1 = 0$ дает наибольшее значение P_1, при котором груз A не опускается, т. е. определяет *предельное* положение равновесия (см. § 39). Система будет в равновесии и при $P_1 < fP_2 \csc \alpha$.

2. Для системы, изображенной на рис. 384, из условий равновесия $Q_1 = 0$ и $Q_2 = 0$ получаем очевидный результат: при равновесии $\varphi = 0$, $x = p/c = \delta_{ст}$.

Случай потенциальных сил. В этом случае условия равновесия (129), если учесть равенства (126) и (127), дают

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0, \ \ldots, \quad \frac{\partial U}{\partial q_s} = 0 \tag{130}$$

или

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0, \ \ldots, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_s} = 0. \tag{130'}$$

Отсюда следует, что при равновесии полный дифференциал функций U или Π равен нулю, т. е.

$$dU(q_1, q_2, \ldots, q_s) = 0 \quad \text{или} \quad d\Pi(q_1, q_2, \ldots, q_s) = 0. \tag{131}$$

Таким образом, система, на которую действуют потенциальные силы, находится в равновесии в тех положениях, для которых силовая функция или потенциальная энергия системы имеют экстремум (в частности, минимум или максимум).

§ 177. Уравнения Лагранжа. Чтобы найти уравнения движения механической системы с геометрическими связями в обобщенных координатах, обратимся к общему уравнению динамики (113), которое дает

$$\sum \delta A_k + \sum \delta A_k^{\text{и}} = 0. \tag{132}$$

Для общности не будем предполагать, что все наложенные на систему связи являются идеальными. Поэтому в первую сумму могут входить как работы активных сил, так и, например, работы сил трения.

Пусть система имеет s степеней свободы и ее положение определяется обобщенными координатами (115). Тогда по формуле (124)

$$\sum \delta A_k = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots + Q_s \delta q_s. \tag{133}$$

Очевидно, что совершенно так же, как это было сделано в § 175 для сил $\boldsymbol{F}_k$, можно преобразовать к обобщенным координатам элементарную работу сил инерции $\boldsymbol{F}_k^{\text{и}}$. При этом получим

$$\sum \delta A_k^{\text{и}} = Q_1^{\text{и}} \delta q_1 + Q_2^{\text{и}} \delta q_2 + \ldots + Q_s^{\text{и}} \delta q_s, \tag{133'}$$

где $Q_1^{\text{и}}$, $Q_2^{\text{и}}$, ..., $Q_s^{\text{и}}$ — *обобщенные силы инерции,* которые согласно формулам (121), (123) будут равны:

$$Q_1^{\text{и}} = \sum \boldsymbol{F}_k^{\text{и}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_1}, \qquad Q_2^{\text{и}} = \sum \boldsymbol{F}_k^{\text{и}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_2}, \quad \ldots \tag{134}$$

Подставляя величины (133) и (133') в уравнение (132), найдем, что

$$(Q_1 + Q_1^{\text{и}}) \delta q_1 + (Q_2 + Q_2^{\text{и}}) \delta q_2 + \ldots + (Q_s + Q_s^{\text{и}}) \delta q_s = 0.$$

Так как все δq_1, $\delta q_2, \ldots$, δq_s между собою независимы, то полученное равенство может выполняться лишь тогда, когда каждый из коэффициентов при δq_1, δq_2, ..., δq_s в отдельности равен нулю, в чем убеждаемся, рассуждая так же, как при выводе уравнений (129). Следовательно, должно быть

$$Q_1 + Q_1^{\text{и}} = 0, \qquad Q_2 + Q_2^{\text{и}} = 0, \ \ldots, \ Q_s + Q_s^{\text{и}} = 0. \tag{135}$$

Полученными уравнениями можно непосредственно пользоваться для решения задач динамики. Однако процесс составления этих уравнений значительно упростится, если выразить все входящие сюда обобщенные силы инерции через кинетическую энергию системы. Преобразуем сначала соответствующим образом величину $Q_1^{\text{и}}$.

Поскольку сила инерции любой из точек системы $\boldsymbol{F}_k^{\text{и}} = -m_k \boldsymbol{w}_k = -m_k \frac{d\boldsymbol{v}_k}{dt}$, то первая из формул (134) дает

$$-Q_1^{\text{и}} = \sum m_k \frac{d\boldsymbol{v}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_1}. \tag{136}$$

Чтобы выразить $Q_1^{\text{и}}$ через кинетическую энергию системы, надо преобразовать правую часть равенства (136) так, чтобы она содержала только скорости $\boldsymbol{v}_k$ точек системы. С этой целью заметим прежде всего, что

$$\frac{d\boldsymbol{v}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{v}_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_1}\right) - \boldsymbol{v}_k \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_1}\right). \tag{137}$$

В справедливости равенства (137) легко убедиться, продифференцировав произведение, стоящее справа в круглой скобке. Учтем далее, что

$$\frac{d\boldsymbol{r}_k}{dt} = \dot{\boldsymbol{r}}_k = \boldsymbol{v}_k \quad \text{и} \quad \frac{dq_1}{dt} = \dot{q}_1,$$

где $\boldsymbol{v}_k$ — скорость точки системы, определяемой радиусом-вектором $\boldsymbol{r}_k$, а $\dot{q}_1$ — обобщенная скорость, соответствующая координате q_1. Тогда для входящих в равенство (137) производных от $\boldsymbol{r}_k$ будут справедливы следующие два результата:

1) Операции полного дифференцирования по t и частного дифференцирования по q_1 переместительны, что дает

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{d\boldsymbol{r}_k}{dt}\right) = \frac{\partial \boldsymbol{v}_k}{\partial q_1}. \tag{138}$$

2) Частная производная от $\boldsymbol{r}_k$ по q_1 есть предел отношения частного приращения $(\Delta \boldsymbol{r}_k)_1$ к приращению Δq_1, откуда в соответствии с известным правилом Лопиталя[1])

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_1} = \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_k}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial \boldsymbol{v}_k}{\partial \dot{q}_1}. \tag{139}$$

Пользуясь соотношениями (138) и (139), представим равенство (137) в виде

$$\frac{d\boldsymbol{v}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{v}_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}_k}{\partial \dot{q}_1}\right) - \boldsymbol{v}_k \frac{\partial \boldsymbol{v}_k}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \frac{\partial v_k^2}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{1}{2} \frac{\partial v_k^2}{\partial q_1}.$$

---

[1]) В самом деле, обозначая для краткости частное приращение $\boldsymbol{r}_k$ символом $\Delta \boldsymbol{r}_k$ и учитывая, что производная от разности равна разности производных, будем иметь

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_1} = \lim \frac{\Delta \boldsymbol{r}_k}{\Delta q_1} = \lim \frac{\frac{d(\Delta \boldsymbol{r}_k)}{dt}}{\frac{d(\Delta q_1)}{dt}} = \lim \frac{\Delta\left(\frac{d\boldsymbol{r}_k}{dt}\right)}{\Delta\left(\frac{dq_1}{dt}\right)} = \lim \left(\frac{\Delta \dot{\boldsymbol{r}}_k}{\Delta \dot{q}}\right) = \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_k}{\partial \dot{q}_1}.$$

Тогда выражение (136), если учесть, что масса — величина постоянная, а сумма производных равна производной от суммы, примет вид

$$-Q_1^{\text{и}} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\left(\sum \frac{m_k v_k^2}{2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\sum \frac{m_k v_k^2}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1},$$

где

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2}$$

есть кинетическая энергия системы.

Аналогичные выражения получатся для всех остальных обобщенных сил инерции. В результате равенства (135) дадут окончательно

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} &= Q_1, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} &= Q_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} &= Q_s. \end{aligned}\right\} \qquad (140)$$

Уравнения (140) и представляют собою *дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных координатах или уравнения Лагранжа.* Число этих уравнений, как видим, равно числу степеней свободы системы.

Уравнения Лагранжа дают единый и притом достаточно простой метод решения задач динамики. Важное преимущество этих уравнений состоит в том, что их вид и число не зависят ни от количества тел (или точек), входящих в рассматриваемую систему, ни от того, как эти тела движутся; определяется число уравнений Лагранжа только числом степеней свободы системы. Кроме того, при идеальных связях в правые части уравнений (140) входят *обобщенные активные силы,* и, следовательно, эти уравнения позволяют заранее исключить из рассмотрения все наперед неизвестные реакции связей.

Основная задача динамики в обобщенных координатах состоит в том, чтобы, зная обобщенные силы $Q_1, Q_2, \ldots, Q_s$ и начальные условия, найти закон движения системы в виде (118), т. е. определить обобщенные координаты q_1 $q_2, \ldots, q_s$, как функции времени. Так как кинетическая энергия T зависит от обобщенных скоростей $\dot{q}_i$, то при дифференцировании первых членов уравнений (140) по t в левых частях этих уравнений появятся вторые производные по времени $\ddot{q}_i$ от искомых координат. Следовательно, уравнения Лагранжа представляют собою обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка относительно обобщенных координат $q_1, q_2, \ldots, q_s$.

Случай потенциальных сил. Если все действующие на систему силы потенциальные, то, используя формулы (127), можно первое из уравнений (140) представить в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_1}+\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}=0 \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial (T-\Pi)}{\partial \dot{q}_1}\right]-\frac{\partial (T-\Pi)}{\partial q_1}=0.$$

Последнее равенство справедливо потому, что потенциальная энергия П зависит только от координат $q_1, q_2, \ldots, q_s$, а от обобщенных скоростей не зависит и $\partial\Pi/\partial\dot{q}_1=0$.

Аналогично преобразуются все остальные уравнения системы (140). Введем функцию

$$L=T-\Pi. \qquad (141)$$

Функция L от обобщенных координат и обобщенных скоростей, равная разности между кинетической и потенциальной энергиями системы, называется *функцией Лагранжа* или *кинетическим потенциалом*. Тогда в случае потенциальных сил уравнения Лагранжа примут вид

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_1}=0,\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_2}=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_s}=0.
\end{aligned}\right\} \qquad (142)$$

Из полученного результата следует, что состояние механической системы, на которую действуют потенциальные силы, определяется заданием одной только функции Лагранжа, так как, зная эту функцию, можно составить дифференциальные уравнения движения системы.

При соответствующем обобщении понятий, функции, аналогичные функции Лагранжа, описывают состояние других физических систем (непрерывной среды, гравитационного или электромагнитного поля и др.). Поэтому уравнения Лагранжа вида (142) играют важную роль в ряде областей физики.

§ 178. Решение задач. Уравнениями Лагранжа можно пользоваться для изучения движения любой механической системы с геометрическими связями, независимо от того, сколько тел (или точек) входит в систему, как движутся эти тела и какое движение (абсолютное или относительное) рассматривается.

Чтобы для данной механической системы составить уравнения Лагранжа, надо: 1) установить число степеней свободы системы и выбрать обобщенные координаты (§ 174); 2) изобразить систему в произвольном положении и показать на рисунке все действующие силы (для систем с идеальными связями *только активные*); 3) вычислить обобщенные силы Q_i путем, указанным в § 175; при этом во избежание ошибок в знаках каждое сообщаемое системе возможное перемещение должно быть направлено так, чтобы приращение соответствующей координаты было *положительным*; 4) вычислить

кинетическую энергию T системы в ее абсолютном движении и *выразить эту энергию через обобщенные координаты q_i и обобщенные скорости $\dot{q}_i$*; 5) подсчитать соответствующие частные производные от T по q_i и $\dot{q}_i$ и подставить все вычисленные величины в уравнения (140).

Из полученных уравнений, если заданы действующие силы и начальные условия, можно, интегрируя эти уравнения, найти закон движения системы в виде (118). Если же задан закон движения, то составленные уравнения позволяют определить действующие силы.

Когда все приложенные к системе силы являются потенциальными, уравнения Лагранжа можно составлять в виде (142). При этом вместо вычисления обобщенных сил надо определить потенциальную энергию системы, выразив ее через обобщенные координаты, и затем, подсчитав кинетическую энергию, составить функцию Лагранжа (141).

Чтобы подчеркнуть универсальность уравнений Лагранжа, решим с их помощью несколько задач, к которым ранее применялись различные, в каждом случае свои, методы.

Задача 171. Составить, пользуясь методом Лагранжа, дифференциальное уравнение колебаний физического маятника (§ 155).

Решение. Маятник имеет одну степень свободы и его положение определяется углом φ (см. рис. 333). Следовательно, $q_1 = \varphi$. Сообщая углу φ *положительное* приращение $\delta\varphi$, найдем, что на этом перемещении работу совершает только сила тяжести $\boldsymbol{P}$ и $\delta A_1 = (-P a \sin\varphi)\,\delta\varphi$, где $a = OC$. Поэтому $Q_1 = -P a \sin\varphi$. Далее, по формуле (43), кинетическая энергия маятника $T = \frac{1}{2} J_O \omega^2$ или $T = \frac{1}{2} J_O \dot{\varphi}^2$ (напоминаем, что величина T должна быть выражена через обобщенную скорость, а $\omega = \dot{\varphi}$). Уравнение Лагранжа имеет в данном случае вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_1. \qquad \text{(a)}$$

Подсчет дает, поскольку T от угла φ не зависит, что

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = J_O \dot{\varphi} \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = J_O \ddot{\varphi}.$$

Подставляя вычисленные величины в уравнение (а), получим

$$J_O \ddot{\varphi} = -P a \sin\varphi,$$

т. е. тот же результат, что и в § 155.

Поскольку сила тяжести $\boldsymbol{P}$ потенциальная, то уравнение Лагранжа можно составить в виде (142). Направляя ось Oz вертикально вниз, имеем в данном случае $\Pi = -Pz = -Pa\cos\varphi$, и по формуле (141)

$$L = \frac{1}{2} J_O \dot{\varphi}^2 + Pa\cos\varphi.$$

Отсюда

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = J_O \dot{\varphi}, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -Pa\sin\varphi$$

и уравнение (142) также дает $J_O \ddot{\varphi} + Pa\sin\varphi = 0$.

Задача 172. Решить с помощью уравнений Лагранжа задачу 141 (§ 150).

Решение. Механизм имеет одну степень свободы (см. рис. 327), и его положение определяется координатой φ $(q_1=\varphi)$. Сообщая углу φ приращение $\delta\varphi$, найдем, что на этом перемещении элементарная работа δA_1 будет иметь выражение, совпадающее с выражением dA^i в задаче 141, если только заменить в нем $d\varphi$ на $\delta\varphi$. Следовательно,

$$Q_1=-c\frac{(l-r)^2}{r^2}\varphi.$$

Величина T для механизма также была вычислена [формула (б) в задаче 141]. Учитывая, что $\omega_{\text{кр}}=\dot\varphi$, будем иметь,

$$T=\frac{1}{12g}(2Q+9P)\,l^2\dot\varphi^2\,,$$

откуда

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi}=0,\ \frac{\partial T}{\partial\dot\varphi}=\frac{1}{6g}\,(2Q+9P)\,l^2\dot\varphi.$$

Подставляя все найденные величины в уравнение Лагранжа, имеющее вид уравнения (а) в задаче 171, получим

$$\frac{1}{6g}(2Q+9P)\,l^2\ddot\varphi=-c\,\frac{(l-r)^2}{r^2}\,\varphi$$

или $\ddot\varphi+k^2\varphi=0$, как и в задаче 141.

Обращаем внимание на то, что *для системы с одной степенью свободы составление дифференциального уравнения движения методом Лагранжа сводится по существу к тем же расчетам, что и при использовании теоремы об изменении кинетической энергии.*

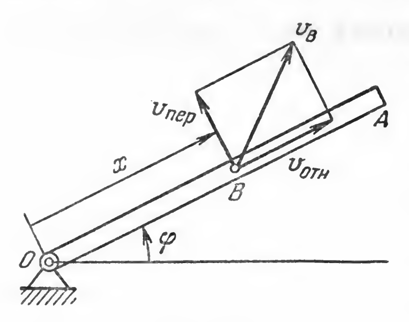


Рис. 385.

Задача 173. Найти закон движения шарика B вдоль трубки OA, вращающейся равномерно в горизонтальной плоскости с угловой скоростью ω (рис. 385). В начальный момент шарик находится от оси O на расстоянии a и его скорость вдоль трубки равна нулю.

Решение. На примере данной простой задачи покажем, как можно составлять уравнения относительного движения с помощью уравнений Лагранжа, не вводя переносной и кориолисовой сил инерции. Положение шарика в относительном движении вдоль трубки определяется одной координатой x. Следовательно, движение определяется одним уравнением Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot x}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}=Q_1. \qquad (а)$$

На перемещении, при котором x получает приращение δx, действующие силы работы не совершают. Следовательно, $\delta A_1=0$ и $Q_1=0$.

Кинетическую энергию шарика вычисляем в его *абсолютном движении.* Тогда $T=0{,}5\ mv_B^2$, где v_B — абсолютная скорость шарика, причем векторно

$v_B = v_{отн} + v_{пер}$. В данном случае численно $v_{отн} = \dot{x}$, $v_{пер} = OB \cdot \omega = x\omega$, а по направлению $v_{отн}$ и $v_{пер}$ взаимно перпендикулярны. Следовательно,

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2).$$

Отсюда

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = m\omega^2 x.$$

Подставляя все найденные значения в равенство (а) и сокращая на m, получим дифференциальное уравнение относительного движения шарика в виде

$$\ddot{x} - \omega^2 x = 0.$$

Интегрируя это уравнение и определяя постоянные интегрирования по начальным условиям задачи (при $t=0$ $x=a, \dot{x}=0$), найдем окончательно закон движения шарика вдоль трубки

$$x = \frac{a}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t}).$$

Задача 173. Решить с помощью уравнений Лагранжа задачу 170 (§ 173).

Решение. При условиях задачи, как было установлено, система имеет две степени свободы. Выберем в качестве обобщенных координат расстояние x груза A от какой-то точки D плоскости (рис. 386) и расстояние y центра C цилиндра от некоторой точки E (узелка) на нити ($q_1 = x$, $q_2 = y$). Уравнениями Лагранжа для данной системы будут

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_1, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial T}{\partial y} = Q_2. \end{aligned}\right\} \qquad (а)$$

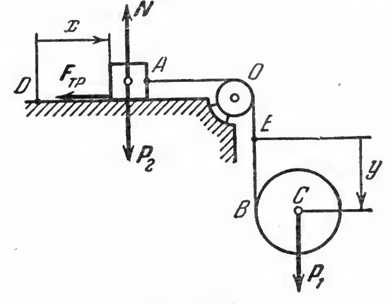


Рис. 386.

Изобразим на рисунке действующие силы и вычислим Q_1 и Q_2. Сначала сообщаем системе возможное перемещение, при котором изменяется *только* координата x, получая приращение $\delta x > 0$, а $y = \text{const}$. На этом перемещении совершают работу силы p_1 и $F_{тр}$ ($F_{тр} = fp_2$) и $\delta A_1 = (p_1 - fp_2)\,\delta x$. Затем сообщим системе возможное перемещение, при котором изменяется *только* координата y, получая приращение $\delta y > 0$, а $x = \text{const}$; на этом перемещении $\delta A_2 = p_1 \delta y$. Следовательно,

$$Q_1 = (p_1 - fp_2), \qquad Q_2 = p_1. \qquad (б)$$

Теперь вычисляем кинетическую энергию T системы, равную сумме энергий груза и цилиндра: $T = T_{гр} + T_{цил}$. По формулам (42) и (44), учитывая, что $v_A = \dot{x}$, имеем

$$T_{гр} = \frac{1}{2} \cdot \frac{p_2}{g} \dot{x}^2, \quad T_{цил} = \frac{1}{2} \frac{p_1}{g} v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega^2. \qquad (в)$$

Скорость v_C центра цилиндра слагается из относительной (по отношению к нити) скорости, равной $\dot{y}$, и переносной скорости, равной $\dot{x}$; так

как обе скорости направлены по вертикали вниз, то $v_C = \dot{x} + \dot{y}$. Угловая же скорость цилиндра $\omega = \frac{\dot{y}}{r}$ (r — радиус цилиндра), так как мгновенный центр вращения цилиндра в относительном движении находится в точке B, а при изменении координаты x цилиндр не вращается. Учитывая, что $J_C = \frac{1}{2} \cdot \frac{p_1}{g} r^2$, находим окончательно

$$T = \frac{p_2}{2g} \dot{x}^2 + \frac{p_1}{2g}\left[(\dot{x}^2 + \dot{y})^2 + \frac{1}{2} \dot{y}^2\right].$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= \frac{p_2}{g} \dot{x} + \frac{p_1}{g} (\dot{x} + \dot{y}), \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} &= \frac{p_1}{g}\left(\dot{x} + \dot{y} + \frac{1}{2} \dot{y}\right). \end{aligned}\right\} \quad \text{(г)}$$

Подставляя величины (б) и (г) в уравнения Лагранжа (а), получим дифференциальные уравнения движения системы

$$(p_1 + p_2) \ddot{x} + p_1 \ddot{y} = (p_1 - f p_2) g, \quad 2\ddot{x} + 3\ddot{y} = 2g.$$

Решая эти уравнения, находим

$$\ddot{x} = \frac{p_1 - 3f p_2}{p_1 + 3p_2} g, \qquad \ddot{y} = \frac{2(1+f) p_2}{p_1 + 3p_2} g. \quad \text{(д)}$$

Отсюда $w_A = \ddot{x}$, $w_C = \ddot{x} + \ddot{y}$ ($\ddot{y}$ дает только относительное ускорение центра масс цилиндра); эти результаты, как нетрудно подсчитать, совпадают с полученными в задаче 170.

Покажем ход расчета при другом выборе обобщенных координат. Пусть по-прежнему $q_1 = x$, а $q_2 = z$, где z — расстояние центра цилиндра от неподвижной точки O. В этом случае, давая системе перемещение, при котором x получает приращение $\delta x > 0$, а $z = \text{const}$ (что можно сделать, повернув одновременно цилиндр), получим $\delta A_1 = -f p_2 \delta x$. Для второго же независимого перемещения ($\delta z > 0$, $x = \text{const}$) будет $\delta A_2 = p_1 \delta z$. Таким образом, теперь

$$Q_1 = -f p_2, \quad Q_2 = p_1.$$

Далее, выражая кинетическую энергию через обобщенные координаты, получим, поскольку в данном случае $v_C = \dot{z}$, а $\omega = \frac{\dot{z} - \dot{x}}{r}$;

$$T = \frac{p_2}{2g} \dot{x}^2 + \frac{p_1}{2g}\left[\dot{z}^2 + \frac{1}{2} (\dot{z} - \dot{x})^2\right].$$

Отсюда

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{p_2}{g} \dot{x} - \frac{p_1}{2g} (\dot{z} - \dot{x}), \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = \frac{p_1}{g}\left[\dot{z} + \frac{1}{2} (\dot{z} - \dot{x})\right],$$

а производные по x и z равны нулю. Подставляя все найденные значения в уравнения Лагранжа, найдем окончательно

$$p_1 \ddot{z} - (2p_2 + p_1) \ddot{x} = 2f p_2 g, \quad 3\ddot{z} - \ddot{x} = 2g.$$

Решая эти уравнения, определим величины $w_A = \ddot{x}$ и $w_C = \ddot{z}$. Как видим, при $q_2 = z$ значение w_C находится сразу и в этом отношении такой выбор

координаты q_2 предпочтительнее. Наоборот, если требуется найти относительное ускорение центра C или угловое ускорение ε цилиндра, то расчет будет проще, если выбрать $q_2 = y$.

Таким образом, выбирать обобщенные координаты системы можно разными способами, и нередко удачный выбор этих координат существенно упрощает ход решения задачи.

Задача 175. К оси B однородного катка весом P, который может кататься без скольжения вдоль горизонтальной плоскости, прикреплен шарнирно однородный стержень BD длиной l и весом p (рис. 387). Составить дифференциальные уравнения движения системы и найти закон ее малых колебаний, если в начальный момент стержень отклоняют от равновесного положения на малый угол φ_0 и отпускают без начальной скорости.

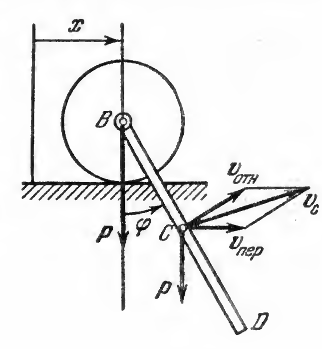


Рис. 387.

Решение. Система имеет очевидно две степени свободы. Выберем в качестве обобщенных координат расстояние x центра цилиндра от его начального положения и угол φ отклонения стержня от вертикали ($q_1 = x$, $q_2 = \varphi$).

Уравнения Лагранжа для рассматриваемой системы будут:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_1, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_2. \quad \text{(a)}$$

Вычислим сначала Q_1 и Q_2. Сообщая системе перемещение, при котором x получает приращение $\delta x > 0$, а $\varphi = \text{const}$, найдем, что $\delta A_1 = 0$. Для другого независимого перемещения, на котором φ получает приращение $\delta\varphi > 0$, а $x = \text{const}$, будем иметь $\delta A_2 = -0{,}5lp \sin\varphi \cdot \delta\varphi$. Следовательно,

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = -0{,}5pl \sin\varphi.$$

Кинетическая энергия системы $T = T_{цил} + T_{ст}$. Значение $T_{цил}$ для рассматриваемого случая вычислено в задаче 134 (§ 147). Учитывая полученный там результат и формулу (44), имеем:

$$T_{цил} = \frac{3}{4}\frac{P}{g}v_B^2, \qquad T_{ст} = \frac{1}{2}\frac{p}{g}v_C^2 + \frac{1}{2}\frac{pl^2}{12g}\dot{\varphi}^2.$$

Здесь $v_B = \dot{x}$, а $\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_{отн} + \boldsymbol{v}_{пер}$, где численно $v_{отн} = 0{,}5l\dot{\varphi}$, $v_{пер} = \dot{x}$; следовательно (см. рис. 387),

$$v_C^2 = \frac{l^2}{4}\dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2 + l\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi.$$

Окончательно найдем следующее выражение для кинетической энергии системы:

$$T = \frac{3P}{4g}\dot{x}^2 + \frac{p}{2g}\left(\dot{x}^2 + l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + \frac{l^2}{3}\dot{\varphi}^2\right).$$

Отсюда

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{3P + 2p}{2g}\dot{x} + \frac{pl}{2g}\dot{\varphi}\cos\varphi; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0.$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{p}{g}\left(\frac{l}{2}\dot{x}\cos\varphi + \frac{l^2}{3}\dot{\varphi}\right); \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{p}{2g}l\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi.$$

Подставляя эти величины и найденные значения Q_1, Q_2 в равенства (а), получим после очевидных сокращений следующие дифференциальные уравнения движения системы:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}[(3P+2p)\dot{x}+pl\dot{\varphi}\cos\varphi]=0,\\ &\frac{d}{dt}\left(\dot{x}\cos\varphi+\frac{2}{3}l\dot{\varphi}\right)+\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi=-g\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{б}$$

Перейдем теперь к отысканию закона малых колебаний системы. При этом считаем угол φ и смещение x малыми величинами одного и того же порядка малости, т. е. полагаем, что $\varphi=\varepsilon f_1(t)$, $x=\varepsilon f_2(t)$, где ε — малая величина, а $f_1(t)$, $f_2(t)$ — некоторые функции от времени (ограниченные вместе с их производными), определяющие закон колебаний. Очевидно, что при этом и скорости $\dot{\varphi}=\varepsilon f_1'(t)$, $\dot{x}=\varepsilon f_2'(t)$ будут также малыми величинами порядка ε.

Чтобы составить дифференциальные уравнения малых колебаний системы, надо в уравнениях (б) сохранить только члены порядка ε, а малые более высокого порядка отбросить. Для этого в слагаемом $pl\dot{\varphi}\cos\varphi$, которое входит в первое из уравнений, надо положить $\cos\varphi=1$, а во втором уравнении принять $\sin\varphi=\varphi$, $\cos\varphi=1$ и член $l\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi$ отбросить целиком, как имеющий порядок ε^3. В результате будем иметь:

$$\frac{d}{dt}[(3P+2p)\dot{x}+pl\dot{\varphi}]=0,\quad \frac{d}{dt}\left(\dot{x}+\frac{2}{3}l\dot{\varphi}\right)+g\varphi=0.$$

Отсюда, вычисляя производные, найдем окончательно следующие дифференциальные уравнения малых колебаний рассматриваемой системы:

$$(3P+2p)\ddot{x}+pl\ddot{\varphi}=0,\qquad \ddot{x}+\frac{2}{3}l\ddot{\varphi}+g\varphi=0. \tag{в}$$

Вычисляя из первого уравнения $\ddot{x}$ и подставляя его значение во второе уравнение, получим

$$\ddot{\varphi}+k^2\varphi=0, \tag{г}$$

где

$$k^2=\frac{3(3P+2p)}{6P+p}\cdot\frac{g}{l}. \tag{д}$$

Интегрируя уравнение (г) и определяя постоянные интегрирования по начальным условиям задачи (при $t=0$ $\varphi=\varphi_0$, $\dot{\varphi}=0$), найдем окончательно:

$$\varphi=\varphi_0\cos kt. \tag{е}$$

Интегрируя теперь первое из уравнений (в) и учитывая, что при $t=0$, $x=0$, $\dot{x}=0$, $\varphi=\varphi_0$, $\dot{\varphi}=0$, будем иметь

$$(3P+2p)x+pl(\varphi-\varphi_0)=0.$$

Заменяя здесь φ его значением из равенства (е), получим

$$x=\frac{p}{3P+2p}l\varphi_0(1-\cos kt). \tag{ж}$$

Уравнения (е), (ж) и определяют закон малых колебаний системы. Частота k этих колебаний дается равенством (д).

Такой сравнительно простой результат получился в данной задаче потому, что здесь $Q_1=0$. Вообще же, когда $Q_1\neq 0$ и $Q_2\neq 0$, колебания си-

стемы с двумя степенями свободы оказываются значительно более сложными и складываются из колебаний с двумя разными частотами k_1 и k_2.

Задача 176. Составить уравнения движения симметричного гироскопа в форме Лагранжа.

Р е ш е н и е. Гироскоп имеет три степени свободы. В качестве обобщенных координат выберем углы Эйлера φ, ψ и θ (см. рис. 235). Тогда уравнения Лагранжа будут:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varphi}=Q_{\varphi}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \psi}=Q_{\psi},$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \theta}=Q_{\theta}. \tag{а}$$

Кинетическая энергия гироскопа определяется формулой (75) из § 158. Считаем, как всегда, ось Oz направленной по оси симметрии гироскопа. Тогда $J_x=J_y$ и

$$T=\frac{1}{2}\left[J_x\left(\omega_x^2+\omega_y^2\right)+J_z\,\omega_z^2\right]. \tag{б}$$

Чтобы выразить T в обобщенных координатах, воспользуемся кинематическими уравнениями Эйлера [§ 97 равенства (98)]:

$$\omega_x=\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi+\dot{\theta}\cos\varphi,$$
$$\omega_y=\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi-\dot{\theta}\sin\varphi,$$
$$\omega_z=\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta.$$

Из этих уравнений находим:

$$\omega_x^2+\omega_y^2=\dot{\psi}^2\sin^2\theta+\dot{\theta}^2; \quad \omega_z^2=(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)^2.$$

Подставляя найденные величины в равенство (б), получим

$$T=\frac{1}{2}\left[J_x\left(\dot{\psi}^2\sin^2\theta+\dot{\theta}^2\right)+J_z\left(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta\right)^2\right].$$

Тогда, учитывая, что $J_z(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)=J_z\omega_z$, будем иметь:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=J_z(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)=J_z\omega_z; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi}=0;$$
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}=J_x\dot{\psi}\sin^2\theta+J_z\omega_z\cos\theta; \quad \frac{\partial T}{\partial \psi}=0;$$
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}=J_x\dot{\theta}; \quad \frac{\partial T}{\partial \theta}=J_x\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta-J_z\omega_z\dot{\psi}\sin\theta.$$

Для подсчета обобщенных сил обратимся к рис. 235. Если координате φ сообщить приращение $\delta\varphi$, то гироскоп совершит элементарный поворот вокруг оси Oz. Элементарная работа при таком повороте равна $\delta A_1=M_z\delta\varphi$, где M_z — главный момент всех действующих сил относительно оси Oz. Следовательно, $Q_{\varphi}=M_z$. Аналогичным путем, учитывая, что при изменении угла ψ гироскоп совершает поворот вокруг оси Oz_1, а при изменении угла θ — вокруг линии узлов OK, найдем, что $Q_{\psi}=M_{z1}$, $Q_{\theta}=M_{OK}$.

Подставляя все вычисленные величины в равенства (а), получим окончательно следующие *дифференциальные уравнения движения гироскопа в форме Лагранжа:*

$$J_z \frac{d\omega_z}{dt} = M_z,$$

$$\frac{d}{dt}(J_x\dot{\psi} \sin^2\theta + J_z\omega_z\cos\theta) = M_{z1},$$

$$J_x\ddot{\theta} - J_x\dot{\psi}^2 \sin\theta\cos\theta + J_z\omega_z\dot{\psi} \sin\theta = M_{OK},$$

где

$$\omega_z = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta.$$

В отличие от уравнений Эйлера (§ 158, п. 3), эти уравнения определяют движение только симметричного тела, для которого $J_x = J_y$; но зато они проще, чем совокупность динамических и кинематических уравнений Эйлера.

В частном случае, когда на гироскоп действует только сила тяжести P, приложенная в какой-то точке C на оси Oz (см. рис. 235; точка C на нем не показана), и расстояние $OC = a$, а ось Oz_1 вертикальна, будем иметь $M_z = 0$, $M_{z1} = 0$, $M_{OK} = Pa\sin\theta$.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аксиома параллелограмма сил 20
— связей 24
Аксиомы статики 18—21
Амплитуда колебаний 160, 302
Афелий 286

Бинормаль 155

Вариньона теорема 48, 118
Ватт 271
Вектор главный 25, 27, 60, 114, 115
— — внутренних сил 332
— — сил инерции 428
— перемещения точки 114
— свободный 110
— скользящий 19
Вес тела 131, 245, 325
Виллиса метод 233
Винт динамический 116
Вращение замедленное 174
— Земли, его влияние на равновесие и движение тел 295
— равномерное 174
— собственное 206
— ускоренное 174
Время 139
— удара 412
— установления колебаний 312

Галилея формула 279, 415
Гироскоп 401
— свободный 402
— симметричный 402, 471
Градиент скалярной функции 385
График движения точки 161
— касательного ускорения 161
— нормального ускорения 161
— полного ускорения 161
— расстояний 161
— скорости 161
Гюйгенса теорема 338

Давление на связи динамическое 31
— — — статическое 30
Даламбера принцип 426, 427, 430, 438, 449
Даламбера — Лагранжа принцип 449
Движение вблизи поверхности Земли относительное 296
— механическое 11
— по земной поверхности 297
— по инерции 35, 244
— под действием центральной силы 285
— ракеты 356
— свободного твердого тела 210, 411
— твердого тела вокруг неподвижной точки 207, 407
— — — вращательное 172, 238, 370, 389
— — — плоскопараллельное 179, 212, 370, 395
— — — поступательное 170, 180, 229, 232, 238, 243, 389
— — — сложное 229
— тела в поле земного тяготения 317
— — винтовое 239
— точки абсолютное 214
— —, брошенной под углом к горизонту 262
— — замедленное 159
— — криволинейное 140, 261
— — несвободное 247, 286
— — относительное 213, 291
— — переносное 213
— — прямолинейное 140
— — сложное 212—213
— — составное 212
— — ускоренное 159
Декремент колебаний 308
— логарифмический 308
Джоуль 270
Диаграмма Максвелла — Кремоны 92
Динама 116

Динамика 12, 13, 242
Длина приведенная физического маятника 394

Жуковского правило 405

Задача динамики вторая 247
— — основная 247, 343
— — первая 247
— статически неопределенная 37
— — определенная 37
Заделка жесткая 67
Заклинивание 97
Закон движения точки вдоль данной кривой 140, 150
— вращательного движения твердого тела 172
— динамики основной 244
— — — для относительного движения точки 292
— инерции 244
— независимости действия сил 245
— о равенстве действия и противодействия 21, 245
— площадей 286
— свободного падения тел 245
— сохранения главного момента количеств движения системы 364
— — движения центра масс системы 345
— — количества движения 352—354
— — механической энергии 388
— — момента количеств движения 366
Законы трения скольжения 94, 95
— динамики 243—245
— Ньютона 243—245

Импульс силы 266
— — элементарный 266
— ударный 412
Инертность 243

Карно теорема 420
Килограмм-сила 17, 246
Килограмм-масса 246
Кинематика 12, 13, 138
Колебания вынужденные 308, 310, 312, 313, 315
— — при наличии сопротивления 311
— — при отсутствии сопротивления 309
— гармонические 160, 302
— затухающие 307
— маятника 392
— параметрические 365
Колебания свободные при отсутствии сопротивления 301
— — при сопротивлении, пропорциональном скорости 306
— собственные 310, 312
Количество движения системы 349, 350
— движения точки 265
Координаты обобщенные 454
Кориолиса теорема 221
Коэффициент восстановления при ударе 415
— динамичности 313
— жесткости пружины 273
— трения верчения 103
— — качения 102
— — скольжения динамический 96
— — статический 95—96

Лагранжа уравнения 463, 464
— функция 464
Линия действия силы 17
— узлов 205

Максвелла — Кремоны диаграмма 92
Масса системы 332
— тела 243, 245
Маятник математический 393
— оборотный 394
— физический 392
Метод Виллиса 233
— вырезания узлов 88
— остановки 233
— Риттера 90
— сечений 90
Механика теоретическая (общая) 11
Мещерского уравнение 357
Многоугольник векторный 27
— веревочный 82
— силовой 27, 81
Модуль силы 17
Момент вращающий 389
— гироскопический 405
— главный 60, 114, 115
— — внутренних сил 332
— — сил инерции 429
— инерции относительно оси 333, 337
— — центробежный 339, 437, 439
— кинетический 282, 359, 360
— количеств движения системы главный 359, 360
— количества движения 282
— пары 53, 110
— реактивный 366
— силы относительно оси 106 — 109

Момент силы относительно точки (центра) 47, 53, 104, 105, 109
Моменты инерции главные 341
Мощность 271, 374

Невесомость 325—330
Неуравновешенность масс динамическая 437
Нить, ее реакция 23
Нормаль главная 155
Нутация 206
Ньютон (единица силы) 17, 246
Ньютона законы 243—245

Опора защемляющая неподвижная 67
— шарнирная неподвижная 67
— — подвижная 67
Оси инерции главные 339—342
— — — центральные 340, 342, 438
Ось винтовая мгновенная 241
— вращения мгновенная 188, 207
— динамы 116
Отклонение падающей точки от вертикали 298
— точки статическое 304

Падение тела в сопротивляющейся среде 258
Пара вращений 231—232
— гироскопическая 405
— результирующая, ее графическое определение 84
— сил 53
Пары эквивалентные 54
Передача дифференциальная 233
— зубчатая цилиндрическая 232
— планетарная 233
Перемещение виртуальное 441
— возможное 441
— элементарное абсолютное 218
— — относительное 218
— — переносное 218
Перигелий 286
Период колебаний 160, 302, 304
— — затухающих 307
— малых колебаний математического маятника 394
— — — физического маятника 393
План скоростей 194
— ускорений 202
Платформа Жуковского 365
Плечо пары 53
Плоскость соприкасающаяся 147
Поверхность гладкая, ее реакция 23
— равного потенциала 386
— уровня 386
Подпятник, его реакция 24
Подшипник, его реакция 23
Покой на поверхности Земли относительный 295
Поле силовое 383
— — потенциальное 384, 385
— тяжести однородное 131
Полюс 82
Потеря кинетической энергии при неупругом ударе двух тел 420
Правило Жуковского 405
— параллелепипеда 26
— параллелограмма 25
— силового треугольника 25
Прецессия 206
— гироскопа 404
— — регулярная 404, 411
Приведение плоской системы сил к данному центру 60—61
— — — — к простейшему виду 62
— пространственной системы сил к данному центру 113
— — — — к простейшему виду 115
Принцип возможных перемещений 440, 443, 444, 449
— Даламбера 426, 427, 430, 438, 449
— Даламбера — Лагранжа 449
— отвердевания 21, 22, 73
— относительности классической механики 293
Принципы механики 426
— статики 18
Проекция силы на ось 31, 32
— — на плоскость 32
Произведения инерции 339

Работа виртуальная 442
— возможная 442
— потенциальной силы 387
— сил, приложенных к вращающемуся телу 374
— — трения 273, 374
— — тяжести 272, 373
— силы 270
— — тяготения 274
— — элементарная 268, 269
— упругой силы 272
Равновесие 15
— абсолютное 15
— астатическое 128
— безразличное 128
— механической системы 443
— неустойчивое 128
— несвободного твердого тела 127
— относительное 15, 293

Равновесие плоской системы параллельных сил 66
— при наличии трения 97
— произвольной плоской системы сил 64
— — пространственной системы сил 117
— системы сходящихся сил 35
— — тел 73
— устойчивое 128
Равнодействующая 18
—, ее графическое определение 83
— сходящихся сил 27
Радиус-вектор 142
— инерции 334
Разложение силы 27, 28
— — на параллельные силы 52
Реакции динамические, действующие на ось вращающегося тела 435, 437
— опорные, их графическое определение 85, 88
— связей, их определение в динамике 289
Реакция динамическая 289
— импульсивная 422
— связи 22, 24, 247, 331
— шероховатой связи 96
Резаля теорема 403
Резонанс 311, 314, 315, 316
Риттера метод 90

Самоторможение 97, 100
Связи 22—24
— геометрические 453
— внешние 73
— внутренние 73
— идеальные 377, 442
Сдвиг фазы 313
Сила 11, 16, 242
— активная 22, 331
— — обобщенная 463
— внешняя 18, 21, 331
— внутренняя 18, 21, 331, 369, 376
— возмущающая 308
— восстанавливающая 301, 306
— гармоническая 309
— давления на связь 22
— живая 265
— инерции 426, 427
— — даламберова 426
— — кориолисова 292, 427
— — обобщенная 461
— — переносная 292, 427
— массовая 325
— непотенциальная 274, 384
Сила обобщенная 456, 457
— — активная 457
— объемная 325
— поверхностная 326
— потенциальная 272, 273, 275, 384, 459, 460, 464
— притяжения 274
— противодействия 427
— равнодействующая 18
— распределенная 18, 78—80
— реактивная 357
— реакции связи 22
— сосредоточенная 18
— трения предельная 95
— — скольжения 94, 96
— тяготения 274
— тяжести 296
— ударная 412
— уравновешивающая 18
— центральная 285
Силы сходящиеся 27
Система единиц международная 139, 246
— — *МкГс* 246
— механическая 331
— — неизменяемая 376
— — с идеальными связями 377
— отсчета 138
— — инерциальная 244, 291, 403
— — местная 329
— — неподвижная 213
— — подвижная 213
— сил 17
— — уравновешенная 17
— —, эквивалентная нулю 17
— статически неопределимая 37
— — определимая 37
Системы сил эквивалентные 17
Скорость абсолютная 214
— в полярных координатах 165
— космическая вторая 321
— — круговая 322
— — первая 322
— линейная 175
— мгновенная 207
— обобщенная 455
— окружная 175
— относительная 213
— падения предельная 260
— параболическая 321
— переносная 213
—, потерянная при ударе 420
— секторная 285
— средняя 145
— точки 145, 149, 154
— угловая 173

Сложение вращений вокруг двух параллельных осей 230
— — — пересекающихся осей 236
— двух сил 25
— пар 56
— — в пространстве 110
— параллельных сил 50, 51
— переменных сил 242
— поступательного и вращательного движений 238
— поступательных движений 229
— сил аналитическим способом 33
— — геометрическим способом 25
— системы сил 26
— скоростей 215
— трех сил, не лежащих в одной плоскости 26
— ускорений 218, 221
Соединение шарнирное 24
Состояние весомости 325, 327
— невесомости 325, 328
Спутники Земли искусственные 321
Статика 12, 15
Стержень, его реакция 24
— нулевой 90, 91
Сумма сил геометрическая 25—27

Тело абсолютно твердое 16
— несвободное 22, 127
— переменной массы 356
— свободное 17, 22
Теорема Вариньона 48, 118
— Гюйгенса 338
— Карно 420
— Кориолиса 221
— моментов 282, 361—362
— — относительно оси 282
— — — центра 283
— — — — масс 362
— — при ударе 413
— о движении центра масс 343—344
— о параллельном переносе силы 58
— о трех силах 36, 43
— об изменении главного момента количеств движения 361—413
— — — кинетической энергии системы 375, 378, 388
— — — — — точки 275
— — — количества движения системы 351, 352
— — — — — — при ударе 413
— — — — — точки 267, 268
— — — момента количества движения точки 282
— Резаля 403
— Эйлера — Даламбера 206
Теоремы динамики общие 265
Точка материальная 243
Траектория абсолютная 214
— относительная 213
— точки 140
— эллиптическая тела, брошенного с земной поверхности 323
Трение 94
— верчения 103
— качения 102
— нити о цилиндрическую поверхность 100
— скольжения 94—97

Угол нутации 206
— прецессии 206
— смежности 156
— собственного вращения 206
— трения 96
Углы Эйлера 206
Удар 412
— абсолютно неупругий 415, 418, 420, 421
— — упругий 415, 419
— косой 416, 417
— по вращающемуся телу 422
— прямой 416
— — центральный 417
— тела о неподвижную преграду 416
— центральный 416
— шаров 417
Узлы фермы 87
Уравнение вращательного движения твердого тела дифференциальное 390
— вынужденных колебаний точки при наличии сопротивления дифференциальное 311
— — — — при отсутствии сопротивления дифференциальное 309
— движения точки переменной массы дифференциальное 357
— динамики общее 449
— Мещерского 357
— относительного равновесия точки 293
— прямолинейного движения точки дифференциальное 250
— свободных колебаний при отсутствии трения дифференциальное 301
Уравнения движения твердого тела вокруг неподвижной точки 206
— — — — — — — дифференциальные 409
— — системы в обобщенных координатах дифференциальные 463

Уравнения движения системы в обобщенных координатах кинематические 455
— — — дифференциальные 342
— — точки в декартовых прямоугольных координатах 141
— — — по заданной кривой дифференциальные 287
— — центра масс дифференциальные 344
— криволинейного движения точки дифференциальные 261
— Лагранжа 463, 464
— моментов для сходящихся сил 49
— плоскопараллельного движения твердого тела 180
— — — — — дифференциальные 395
— трех моментов 65
— Эйлера динамические 410
— — кинематические 238, 410
Уравновешенность масс динамическая 437
Уравновешивание масс динамическое 437
Усилие внутреннее 77
Ускорение абсолютное 214
— вращательное 209
— касательное 157, 158, 161
— кориолисово 221, 222
— нормальное 157, 158, 161
— осестремительное 209
— относительное 213, 292
— переносное 213
— поворотное 220
— свободного падения 245
— точки 146, 149, 157
— угловое 173, 207
Условие равновесия пар 57
Условия начальные 251
— равновесия несвободного твердого тела 127
— — плоской системы параллельных сил 66
— — — — сил графические 85
— — произвольной плоской системы сил 64
— — — пространственной системы сил 117
— — пространственной системы сходящихся сил 36
— — системы в обобщенных координатах 459
— — — пар 111
— — — сходящихся сил 36
Установление колебаний 313
Устойчивость равновесия 128

Фаза колебаний 302
Ферма 87
— плоская, ее графический расчет 91, 92
Формула Галилея 279, 415
— Циолковского 358
— Эйлера 209
Функция Лагранжа 464
— силовая 384—386
— — для силы тяготения 385
— — — — тяжести 384
— — — упругой силы 385

Центр вращения мгновенный 188
— инерции 333
— качаний физического маятника 394
— масс 333
— параллельных сил 130
— приведения 60
— скоростей мгновенный 185, 203
— тяжести линии 132, 135
— — объема 132, 137
— — площади 132, 136
— — тела 18, 131—135
— удара 424
— ускоренный мгновенный 203
Центроида неподвижная 188
— подвижная 188
Циолковского формула 358
— число 358

Частота возмущающей силы 308
— колебаний 303
— — круговая 302
Число передаточное 233
— степеней свободы 442, 453
— Циолковского 358

Шарнир, его реакция 24
— цилиндрический, его реакция 23
— шаровой, его реакция 24
Шестерни 232

Эйлера формула 209
Эйлера — Даламбера теорема 206
Энергия потенциальная 387
— системы кинетическая 369
— тела кинетическая 370, 371
— точки кинетическая 265
Эффект гироскопический 405

Семен Михайлович Тарг

Краткий курс теоретической механики

М., 1968 г., 480 стр. с илл.

Редактор *В. В. Крементуло*

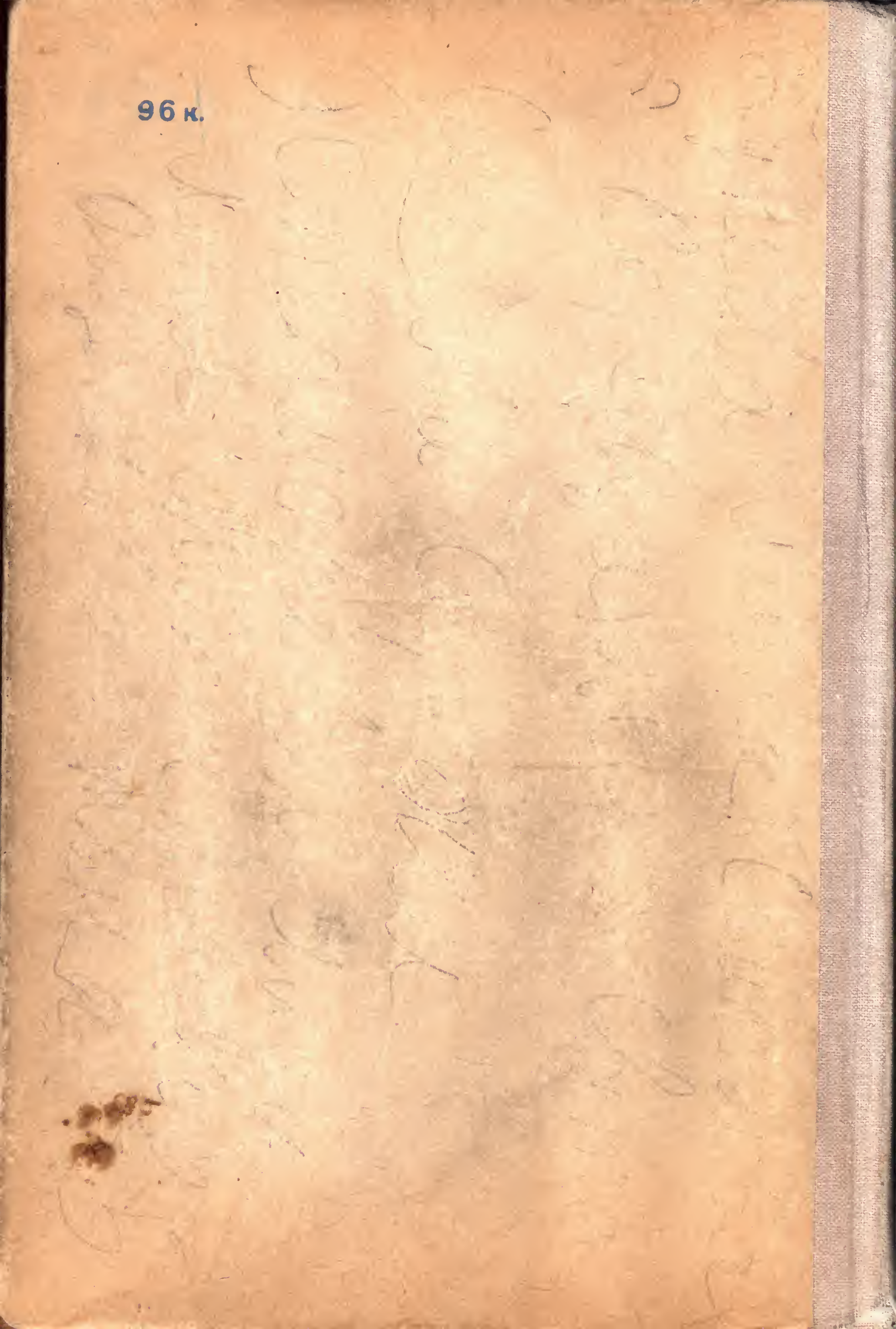
Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*

Корректор *О. А. Бутусова*

Сдано в набор 6/XI 1967 г. Подписано к печати 5/IV 1968 г. Бумага 60×90¹/₁₆. Физ. печ. л. 30. Условн. печ. л. 30. Уч.-изд. л. 30,66. Тираж допечатка 100 000 экз. Т-00313. Цена книги 96 коп. Заказ № 1932.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 1 «Печатный Двор» им. А. М. Горького Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР, г. Ленинград, Гатчинская ул., 26.


96 к.


С.М.ТАРГ · КРАТКИЙ КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ